Relación de problemas 3

Fundamentos Matemáticos de CCAA

Curso 2009-10

1. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$, $g(x) = \sqrt{x^3-1}$ y $h(x) = \ln(x-1)$ calcular (siempre y cuando sea posible):

$$f(0),\ f(-1),\ f(2),\ g(0),\ g(1),\ h(0),\ h(1),\ h(e+1).$$

2. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) $\log_a(e) = \dfrac{1}{\ln(a)}$ *b*) $\ln(x+25) = \ln(x) + \ln(25)$ *c*) $\ln(e^{n+1}) - \ln(e^n) = 1$

   d) $a^x = e^{x\ln(a)}$ *e*) $\sqrt{\ln(x)} = \dfrac{1}{2}\ln(x)$.

3. Simplificar las expresiones:

   a) $\log_2(2^{x^2})$ *b*) $\ln(e^{\sqrt{2}})$ *c*) $e^{\ln(3x)}$ *d*) $10^{\log_{10} 2}$ *e*) $b^{\log_b \sqrt{x}}$.

4. Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

   (i) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

   (ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

   (iii) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$

   (iv) $f(x) = 2 + \sqrt{1-(x-1)^2}$

   (v) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

   (vi) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}}$

   (vii) $f(x) = 2^x + \pi$

(viii) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

(ix) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

(x) $f(x) = \mathrm{sen}(x^2 - 5x + 3)$

(xi) $f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

(xii) $f(x) = \mathrm{arc\,tg}(x^2 + 1)$

5. Calcular los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x \to -1} (-x^3 - x^2 - x + 12)$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right)$

(iii) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 - 4}$

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x}$

(v) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{\sqrt{x^2+3} - 2}$

(vi) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x^2 - 1}$

(vii) $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{3}{x+1}$

(viii) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

(ix) $\lim\limits_{x \to 1} x \,\mathrm{arc\,tg}(x)$

(x) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x+1}$

(xi) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 3x + 2)$

(xii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 7}$

(xiii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\mathrm{arc\,tg}(x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)$

6. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indicando, en su caso, el tipo de discontinuidades que presentan:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \le 0 \\ 2x - 3 & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \ln(|x|) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x^2+x-3}{x-1} & x \neq 1 \\ 2008 & x = 1 \end{cases}.$$

7. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & x < 0 \\ ax + b & 0 \leq x < 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases},$$

calcular los valores de a y b para que sea continua.

8. En los siguientes ejemplos la función está definida en todo punto excepto para $x_0 = 2$. En cada caso, calcúlese el valor que se debe asignar a $f(2)$, si es que hay alguno, para que la función sea continua en 2.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$, (b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & x < 2 \\ \ln(\ln(x-1)) & x > 2 \end{cases}$.

9. Sean a y b dos números reales que verifiquen $a < 0 < b$. Estudiar el límite en $x_0 = 0$ de las funciones $f, g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{x}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{x}\right), \quad g(x) = xf(x).$$

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ e^{\frac{-1}{x}} & x > 0 \end{cases}.$$

Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}$ y calcular $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

11. Estudiar la existencia de asíntotas de las funciones:

$$a) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \quad b) f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} \quad c) f(x) = x\ln(x^2 - 1)$$

$$d) f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^2} \qquad e) f(x) = x + \sqrt{x}$$

12. Según la Ley de la Relatividad, la masa de un cuerpo no es siempre constante, sino que depende de la velocidad a la que viaja el mismo. Por supuesto, este efecto es pequeño a velocidades normales, pero se vuelve importante a velocidades muy altas. La fórmula que expresa la masa de un cuerpo dependiendo de la velocidad es:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donde m_0 es la masa en reposo del cuerpo y c es la velocidad de la luz. Calcula $\lim_{v\to c^-} m(v)$, $\lim_{v\to 0} m(v)$ e interpreta los resultados.

13. Para una población cualquiera, llamaremos m al número medio de hijos de una familia, contando sólo aquéllos que sobreviven hasta formar su propia familia. Obviamente, puede definirse este número medio para la población de cualquier especie siempre que forme unidades familiares. Podemos definir entonces la tasa de crecimiento de una población como $k = \frac{m-2}{2}$. El economista británico Thomas Malthus (1766-1834) fue el primero en tratar de modelar matemáticamente la evolución de una población. Malthus llamó $P(t)$ a la población existente en el tiempo t (medido, por ejemplo, en años), y llegó a la conclusión de que $P(t) = P_0 e^{ckt}$. En esta fórmula, c es una constante positiva y P_0 es la población inicial. Estudiar, dependiendo del parámetro k, la evolución de una población a lo largo del tiempo según este modelo. Interpretar los resultados en función de m.

14. Utilizar el Teorema de Bolzano para justificar que la ecuación $x + \ln(x) = e$ tiene al menos una solución en $\mathbb{R}$.

15. Probar que existe un número real positivo x que verifica $\ln(x) + \sqrt{x} = 0$.

16. Demostrar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz en $\mathbb{R}$.

17. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir una montaña el sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del sábado.