Relación de problemas 2

Matemáticas. Curso 2012-13

1. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$, $g(x) = \sqrt{x^3-1}$ y $h(x) = \ln(x-1)$ calcular (siempre y cuando sea posible):

$$f(0),\ f(-1),\ f(2),\ g(0),\ g(1),\ h(0),\ h(1),\ h(e+1).$$

2. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

$a)$ $\log_a(e) = \dfrac{1}{\ln(a)}$ $\quad b)$ $\ln(x+25) = \ln(x) + \ln(25)$ $\quad c)$ $\ln(e^{n+1}) - \ln(e^n) = 1$

$d)$ $a^x = e^{x\ln(a)}$ $\quad e)$ $\sqrt{\ln(x)} = \dfrac{1}{2}\ln(x)$.

3. Simplificar las expresiones:

$a)$ $\log_2(2^{x^2})$ $\quad b)$ $\ln(e^{\sqrt{2}})$ $\quad c)$ $e^{\ln(3x)}$ $\quad d)$ $10^{\log_{10} 2}$ $\quad e)$ $b^{\log_b \sqrt{x}}$.

4. Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

(iii) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$

(iv) $f(x) = 2 + \sqrt{1 - (x-1)^2}$

(v) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$

(vi) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}}$

(vii) $f(x) = 2^x + \pi$

(viii) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(ix) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

(x) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 5x + 3)$

(xi) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

(xii) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x^2 + 1)$

5. Calcular los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x \to -1} (-x^3 - x^2 - x + 12)$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right)$

(iii) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 - 4}$

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x}$

(v) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{\sqrt{x^2+3} - 2}$

(vi) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x^2 - 1}$

(vii) $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{3}{x+1}$

(viii) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

(ix) $\lim\limits_{x \to 1} x \operatorname{arc\,tg}(x)$

(x) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x+1}$

(xi) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 3x + 2)$

(xii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 7}$

(xiii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\operatorname{arc\,tg}(x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)$

(xiv) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^3 - 1}}{x^3 + 1}$

(xv) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}$

(xvi) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}$

6. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indicando, en su caso, el tipo de discontinuidades que presentan:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ 2x - 3 & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \ln(|x|) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x^2+x-3}{x-1} & x \neq 1 \\ 2008 & x = 1 \end{cases}.$$

7. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & x < 0 \\ ax + b & 0 \leq x < 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases},$$

calcular los valores de a y b para que sea continua.

8. En los siguientes ejemplos la función está definida en todo punto excepto para $x_0 = 2$. En cada caso, calcúlese el valor que se debe asignar a $f(2)$, si es que hay alguno, para que la función sea continua en 2.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$, (b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x} & x < 2 \\ \ln(\ln(x - 1)) & x > 2 \end{cases}$.

9. Sean a y b dos números reales que verifiquen $a < 0 < b$. Estudiar el límite en $x_0 = 0$ de las funciones $f, g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{x}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{x}\right), \quad g(x) = xf(x).$$

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ e^{\frac{-1}{x}} & x > 0 \end{cases}.$$

Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}$ y calcular $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

11. Estudiar la existencia de asíntotas de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$, b) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$, c) $f(x) = x\ln(x^2 - 1)$

d) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x^2}$, e) $f(x) = x + \sqrt{x}$

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\, e^x - (\cos(x))^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ (1+x^2)^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad 0 < x \le 2 \\ \dfrac{3x-8}{x-2} + \arctan(x) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) Determina los valores del parámetro α para los que la función es continua en $x = 0$.

b) Estudia la continuidad de f en $x = 2$.

c) Para el valor de α obtenido en el apartado a), determina las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas) y la posición relativa de la gráfica de la función con respecto a sus asíntotas.

d) Prueba que existe algún punto $x > 2$ tal que $f(x) = 0$.

13. Según la Ley de la Relatividad, la masa de un cuerpo no es siempre constante, sino que depende de la velocidad a la que viaja el mismo. Por supuesto, este efecto es pequeño a velocidades normales, pero se vuelve importante a velocidades muy altas. La fórmula que expresa la masa de un cuerpo dependiendo de la velocidad es:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donde m_0 es la masa en reposo del cuerpo y c es la velocidad de la luz. Calcula $\lim_{v \to c^-} m(v)$, $\lim_{v \to 0} m(v)$ e interpreta los resultados.

14. Para una población cualquiera, llamaremos m al número medio de hijos de una familia, contando sólo aquéllos que sobreviven hasta formar su propia familia. Obviamente, puede definirse este número medio para la población de cualquier especie siempre que forme unidades familiares. Podemos definir entonces la tasa de crecimiento de una población como $k = \frac{m-2}{2}$. El economista británico Thomas Malthus (1766-1834) fue el primero en tratar de modelar matemáticamente la evolución de una población. Malthus llamó $P(t)$ a la población existente en el tiempo t (medido, por ejemplo, en años), y llegó a la conclusión de que $P(t) = P_0 e^{ckt}$. En esta fórmula, c es una constante positiva y P_0 es la población inicial. Estudiar, dependiendo del parámetro k, la evolución de una población a lo largo del tiempo según este modelo. Interpretar los resultados en función de m.

15. Utilizar el Teorema de Bolzano para justificar que la ecuación $x + \ln(x) = e$ tiene al menos una solución en $\mathbb{R}$.

16. Probar que existe un número real positivo x que verifica $\ln(x) + \sqrt{x} = 0$.

17. Demostrar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz en $\mathbb{R}$.

18. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir una montaña el sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del sábado.

19. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en sus respectivos dominios:

(a) $f(x) = \operatorname{sen}^2(3x)$	(b) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}\right)$
(c) $f(x) = \dfrac{\ln(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}}$	(d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
(e) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	(f) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x) + \arccos(x)$
(g) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x) + \operatorname{arc\,tg}(\dfrac{1}{x})$	(h) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
(i) $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sqrt{x}}$	(j) $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\ln(x)}$
(k) $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x+1}) - \operatorname{sen}(\sqrt{x})$	(l) $f(x) = \log_a(1+\operatorname{tg}^2(x))$
(m) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	(n) $f(x) = \dfrac{x^3+7x^2+5}{x^4+x^2+1}$
(ñ) $f(x) = x^{\operatorname{sen}(x)}$	(o) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$

20. Utilizar la definición de derivada para demostrar que si a es un número positivo cualquiera y $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$.

21. Utilizar la definición de derivada para demostrar que si a es un número positivo cualquiera y $f(x) = \ln(x)$, entonces $f'(a) = 1/a$. Pista: hay que utilizar propiedades de los logaritmos y el criterio 1^∞.

22. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-1} + \cos^2(x) & \text{si} \quad x < 0 \\ b\,\mathrm{e}^x + \log(\mathrm{e} + \operatorname{sen}(x)) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Se pide:

a) Determina los valores de los parámetros a y b para los que la función f es continua.

b) Determina los valores de los parámetros a y b para los que la función f es derivable.

23. La población de una colonia de bacterias es de, aproximadamente, $P(t) = P_0 + 61t + 3t^2$ miles, t horas después del inicio de la observación, donde P_0 es la población inicial. Hallar la tasa de crecimiento de la colonia a las cinco horas.

24. Un estudio de medio ambiente de una comunidad suburbana concluye que, dentro de t años, el nivel medio de monóxido de carbono en el aire será de $q(t) = 0,05t^2 + 0,1t + 3,4$ partes por millón.

    a) Calcular la tasa de variación del monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de un año.

    b) Calcular cuánto variará el monóxido de carbono durante el primer año.

    c) Calcular cuánto variará el monóxido de carbono durante el segundo año.

25. Escribir las ecuaciones de la rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - \operatorname{arc\,sen}(x)$ en el punto $(0,0)$. Lo mismo para la función $f(x) = \cos(x-1)\ln(x)$ en el punto de abcisa $x = 1$.

26. Hallar el valor del parámetro k para que la recta tangente a la curva $y = \ln(x) - kx$ en el punto de abcisa $a = 2$ forme un ángulo de 45° con el eje de abcisas.

27. Hallar el valor de m para que la recta tangente a la curva $y = \arccos(x-1) + mx$ en el punto de abcisa $a = 1$ sea horizontal.

28. ¿En qué puntos de la gráfica de la función $f(x) = x - e^x$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

29. Encontrar los puntos en los que la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^4 - 2x + 1$ es paralela a la recta $2x - y - 3 = 0$.

30. Utilizar el Teorema del valor medio para demostrar que si f es una función derivable en un intervalo abierto I y $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces $f(x) = f(y)$ para cualesquiera $x, y \in I$, es decir f es constante sobre I.

31. Dos corredores inician una carrera al mismo tiempo y terminan empatados. Probar que tuvieron exactamente la misma velocidad en un instante de tiempo.

32. Estudiar el límite en $a = 0$ de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

    a) $A = \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}, \quad x \in A.$

    b) $A = (0, \pi/2), \quad f(x) = (\operatorname{sen}(x) + \cos(x))^{1/x}, \quad x \in A.$

    c) $A = (0, \pi/2), \quad f(x) = (1 - \operatorname{tg}(x))^{\frac{1}{x^2}}, \quad x \in A.$

33. Calcular los siguientes límites aplicando, cuando sea posible, la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^3}, \qquad \lim_{x\to0^+}(\text{sen}(x))\,(\ln(x)), \quad \lim_{x\to0^+}(1+\text{sen}(x))^{\ln(x)}, \qquad \lim_{x\to0} \tfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))},$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{\cos(x)}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \tfrac{\text{sen}^2(x)}{x^3}, \qquad \lim_{x\to0^+} \tfrac{x-\text{arc tg}(x)}{x^4}, \qquad \lim_{x\to1^+} \left(\tfrac{1}{\ln(x)} - \tfrac{1}{x-1}\right),$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\text{tg}(x)}{\text{tg}(2x)}, \qquad \lim_{x\to0^+}(\cos(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, \qquad \lim_{x\to0^-} \tfrac{\ln(x^2+1)}{x^2-x^3}, \qquad \lim_{x\to0^+} \left(\tfrac{1}{e^x-1} - \tfrac{1}{x}\right).$$

34. Calcular y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones dentro del intervalo I que se indica en cada caso:

(i) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, \qquad I = \mathbb{R}.$

(ii) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \qquad I = \mathbb{R}.$

(iii) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{(x+1)\,(x-1)}, \qquad I = (-1,1).$

(iv) $f(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad I = \mathbb{R}.$

(v) $f(x) = x - \text{sen}(x), \qquad I = \mathbb{R}.$

(vi) $f(x) = x + \cos(x), \qquad I = (-\pi,\pi).$

(vii) $f(x) = x - \text{arc tg}(x), \qquad I = \mathbb{R}.$

(viii) $f(x) = e^x + e^{-x}, \qquad I = \mathbb{R}.$

(ix) $f(x) = x\,\ln(x), \qquad I = (0,+\infty).$

35. Estudiar la monotonía, la curvatura, los puntos críticos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$

(ii) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}.$

(iii) $h(x) = x - \text{arc tg}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

(iv) $i(x) = \ln(x), \quad x \in (0,+\infty).$

36. Determinar el máximo y el mínimo absolutos de las funciones $f(x) = x^3 + x + 1$ y $g(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ en el intervalo $[-1,2]$.

37. Probar que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \geq 0$.

38. Hallar el número positivo que sumado a su inverso da lugar a la suma mínima. ¿Hay algún número positivo de tal manera que la suma con su inverso sea máxima?

39. Un agricultor quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si el precio del metro de valla es de 5 euros para el lado del campo más cercano al camino y de 1 euro para los restantes lados, hallar la mayor superficie de campo que se puede vallar con 2400 euros.

40. La pista de un pabellón deportivo consta de una zona rectangular y de un semicírculo en cada uno de los extremos. Si el perímetro de la pista ha de tener una longitud de 200 metros, calcular las dimensiones que hacen máxima el área de la zona rectangular.

41. Calcular el máximo volumen que se puede conseguir al fabricar una caja sin tapa superior con una pieza cuadrada de cartón de 2 cm de lado al cortar y doblar cuadraditos iguales de cada esquina.

42. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de dos metros de largo en dos trozos. Uno de los dos trozos se va a doblar en forma de circunferencia y el otro en forma de cuadrado. Determinar cómo se debe de cortar el alambre para que el área total encerrada por las dos figuras creadas sea mínimo /máximo.

43. Una lata cilíndrica debe contener $64cm^3$. Hallar sus dimensiones de manera que la cantidad de metal sea mínima supuesta la lata: a) abierta por arriba, b) cerrada.

44. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

45. Sea f la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\mathrm{e}}{x^2 - 5x + 6} & \text{si} \quad x > 1 \\ \\ x\mathrm{e}^x & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Se pide:

a) Determina el dominio de definición de f y estudia la continuidad de dicha función.

b) Determina las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas) y la posición relativa de la función con respecto a sus asíntotas.

c) Calcula la primera derivada de la función f. ¿Es la función derivable en $x = 1$? Determina los puntos críticos de f, máximos y mínimos de f y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

d) Calcula la segunda derivada de la función f. Determina los intervalos de convexidad y concavidad de f y los puntos de inflexión de f.

e) Utilizando todo lo anterior, dibuja la gráfica de la función f.

f) Prueba que existe un único punto $x > 3$ tal que $f(x) = \ln(x)$.

46. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2\sqrt{x^2+1}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \\ \dfrac{e^{-x}}{x+2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Se pide:

a) Determina los ceros de f, el signo de f, las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas) y la posición relativa de la gráfica de la función con respecto a sus asíntotas. Estudia la continuidad de f en $x = 0$ y el dominio maximal donde la función f es continua.

b) Calcula la primera derivada de la función f. ¿Es f derivable en $x = 0$? Determina los puntos críticos de f, los máximos y mínimos (absolutos y relativos) de f y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) Calcula la segunda derivada de la función f. ¿Es f dos veces derivable en $x = 0$? Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y los puntos de inflexión de f.

Por último, utilizando todo lo anterior, dibuja la gráfica de la función f.

47. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{5x^2+1}{x^2+1}\right) & \text{si} \quad x > -1 \\ \\ \dfrac{x^2+\log(3)}{x+2} - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \end{cases}.$$

Se pide:

a) Determina los ceros de f, el signo de f, las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas) y la posición relativa de la gráfica de la función con respecto a sus asíntotas. Estudia la continuidad de f en $x = -1$ y el dominio maximal donde la función f es continua.

b) Calcula la primera derivada de la función f. ¿ Es f derivable en $x = -1$? Determina los puntos críticos de f, los máximos y mínimos (absolutos y relativos) de f y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) Calcula la segunda derivada de la función f. ¿ Es f dos veces derivable en $x = -1$? Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y los puntos de inflexión de f.

Por último, utilizando todo lo anterior, dibuja la gráfica de la función f.

48. Estudiar las gráficas de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{3(x^2 - 4)}{x^2 - 1}$ (d) $f(x) = x \, \ln(x)$

(e) $f(x) = e^{-x^2/2}$ (f) $f(x) = x \, e^x$

(g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{1 + \ln(x)}$