Relación de problemas 2

Fundamentos Matemáticos de CCAA

Curso 2009-10

1. Decidir razonadamente si los siguientes subconjuntos son o no subespacios vectoriales:

   (a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = y = z\}$, (b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; x + t = 2\}$,

   (c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; xy = 3\}$, (d) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y = 0\}$,

   (e) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; 2x + t = y\}$, (f) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = y^2\}$.

2. Para cada uno de los siguientes casos decidir si el vector v pertenece o no al subespacio vectorial U:

   (a) $v = (1, -2, 5)$, $U = \langle (1, -3, 2), (2, -4, -1), (1, -5, 7) \rangle$.

   (b) $v = (8, 1, 1)$, $U = \langle (1, -3, 2), (2, -1, 1) \rangle$.

   (c) $v = (1, -3, 2, -1)$, $U = \langle (2, -1, 0, 0), (-1, 3, -2, 1) \rangle$.

3. Decidir si los vectores de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:

   a) $\left\{ \begin{array}{l} (1, 1, -2, 3, 4) \\ (2, 3, 3, -1, 3) \\ (5, 7, 4, 1, 5) \end{array} \right\}$ b) $\left\{ \begin{array}{l} (1, 1, 1) \\ (2, 3, -1) \\ (0, 1, 7) \\ (-6, 5, 14) \end{array} \right\}$ c) $\left\{ \begin{array}{l} (2, 1, 3) \\ (4, -1, 5) \\ (2, 1, 2) \end{array} \right\}$ d) $\left\{ \begin{array}{l} (1, 1, 1) \\ (2, 3, 4) \\ (-1, 3, 7) \\ (2, 4, 6) \end{array} \right\}$.

4. Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son ó no una base del subespacio vectorial U indicado:

   a) $S = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$, $U = \mathbb{R}^3$.

   b) $S = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 2), (2, 5, 6, 4), (2, 6, 8, 5)\}$, $U = \mathbb{R}^4$.

   c) $S = \{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = y\}$.

   d) $S = \{(1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 1), (-1, 1, 0, 4)\}$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; z = x + y\}$.

5. Obtener una base de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales:

   (a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z = 0\}$.

   (b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = y = z\}$.

   (c) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; z = 3x, y = t\}$.

   (d) $U = \langle (1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4), (3, 8, -3, -5) \rangle$.

6. Encontrar unas ecuaciones implícitas para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales:

   (a) $V = \langle (1, 1, -2), (2, -3, 1) \rangle$.

   (b) $V = \langle (1, 1, 2), (-1, 1, 1), (5, -3, 2) \rangle$.

   (c) $V = \langle (1, 2, -1, 3), (-2, -4, 2, -6) \rangle$.

(d) $V = \langle(1,1,2,-3,-1),(1,0,1,0,1),(0,1,1,2,-3)\rangle$.

7. Sean $B = \{(1,0,-1),(2,1,1),(0,1,1)\}$ y $C = \{(1,1,-2),(0,2,0),(-1,1,1)\}$. Demostrar que B y C son bases de $\mathbb{R}^3$. Además:

   (a) Calcular el vector $(4,-2,5)$ en coordenadas respecto de B y de C.

   (b) Calcular el vector $(1,-2,0)_B$ en coordenadas respecto de C.

   (c) Calcular el vector $(-2,1,3)_C$ en coordenadas respecto de B.

8. Dados $u = (2,-2)$, $v = (5,8)$ y $w = (-4,3)$, calcular:

   $u \cdot v$, $u \cdot (2v)$, $\|w\|^2$, $\|u - 2v\|$, $v \cdot (u+w)$, $(w-3v)\cdot(w-u)$.

9. Calcular el ángulo determinado por los siguientes pares de vectores:

   (a) $u = (1,2)$ y $v = (-1,3)$.

   (b) $u = (3,3)$ y $v = (2,0)$.

   (c) $u = (1,1,2)$, $v = (2,-1,1)$.

   (d) $u = (2,3,1)$ y $v = (-3,2,0)$.

10. ¿Cuántos vectores linealmente independientes se pueden encontrar en $\mathbb{R}^4$, si les exigimos que sean perpendiculares al vector $(1,2,-3,1)$? Calcúlalos.

11. Diremos que un vector de $\mathbb{R}^n$ es un VECTOR NORMAL a un subespacio U de $\mathbb{R}^n$ si es unitario y ortogonal a todo vector de U. Calcular un vector normal a los subespacios:

    (a) $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z - t = 0\}$.

    (b) $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z + t\}$.

    (c) $U = \langle(3,-2,0),(2,2,5/3)\rangle$.

    (d) $U = \langle(2,-1)\rangle$.

    (e) $U = \langle(0,1,0),(4,1,-3)\rangle$.

12. Demostrar que si un conjunto S está formado por vectores no nulos y perpendiculares entre sí, entonces los vectores de S son linealmente independientes.

13. Decidir de forma razonada si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

    (a) Si $\{u,v\}$, $\{u,w\}$, $\{v,w\}$ son parejas de vectores linealmente independientes, entonces $\{u,v,w\}$ son también linealmente independientes.

    (b) Si u y v son perpendiculares, y v y w también, entonces u y w son a su vez perpendiculares.

    (c) Si u y v son perpendiculares entonces $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

14. Una base B de $\mathbb{R}^n$ se dice que es ORTONORMAL si todos sus vectores son unitarios y perpendiculares dos a dos entre sí. Comprobar si las siguientes bases son ortonormales o no:

    (a) En $\mathbb{R}^3$, $B = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}), (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$.

    (b) En $\mathbb{R}^3$, $B = \{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0), (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0), (0, 0, 1)\}$.

    (c) En $\mathbb{R}^4$, $B = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$.

15. Dado el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, $B = \{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})\}$, se pide:

    (a) Probar que B es una base ortonormal.

    (b) Calcular las coordenadas de los vectores $u = (3, 2, -1)$ y $v = (1, 1, -1)$ respecto de B.

    (c) Calcular el resultado de multiplicar escalarmente u y v con cada vector de B. ¿Qué te parece el resultado?

16. Consideremos los vectores v_1, v_2 y v_3 de $\mathbb{R}^3$ dados por $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ y $v_3 = (-1, -2, -1)$. Se pide:

    (a) Calcular una base del subespacio $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

    (b) Calcular unas ecuaciones implícitas del subespacio U del apartado anterior.

    (c) Demostrar que el conjunto V formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$ que son perpendiculares a v_2 es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

17. Se pide:

    (a) Calcular una base para $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x - 3t = 0, \ y + 2z = 0\}$.

    (b) Comprobar si $S = \{(3, 0, 0, 1), (0, -2, 1, 0), (-3, -2, 1, -1)\}$ es una base de U.

18. Consideremos los vectores v_1, v_2 y v_3 de $\mathbb{R}^3$ dados por $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (-2, 1, 2)$ y $v_3 = (-1, 1, 3)$. Se pide:

    (a) Calcular una base del subespacio $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

    (b) Calcular unas ecuaciones implícitas del subespacio U del apartado anterior.

    (c) Demostrar que el conjunto V formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$ que son perpendiculares a v_2 es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

    (d) Calcular una base B del subespacio V del apartado anterior de forma que cualesquiera dos vectores distintos de B sean perpendiculares entre sí.