Tema 4

Derivación de funciones de una variable

4.1. Definición de derivada. Interpretaciones

La derivación es una herramienta muy potente del cálculo. Si las funciones continuas son aquellas cuyas gráficas no presentan saltos, las funciones derivables tienen la propiedad de que su gráfica, además de ser continua, no presenta picos, cambios bruscos de dirección, o rectas tangentes verticales.

Existen varias formas de aproximarse al concepto de derivada de una función de una variable en un punto. Nosotros eligiremos dos: la primera, a través de la *tasa de variación instantánea* de una función; la segunda, a partir del problema de la *recta tangente* a una gráfica en un punto.

4.1.1. Tasa de variación instantánea de una función

En Física, la velocidad media de un móvil es el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en ello. Ahora bien, ¿qué significado tiene entonces la llamada velocidad instantánea? En un instante, un móvil no recorre nada, y la cantidad de tiempo necesitada es también cero. Por tanto, el concepto de velocidad instantánea sólo puede ser entendido como un paso al límite. Es decir, si medimos el espacio recorrido por el vehículo en un tiempo h pequeño, y lo dividimos entre h, el resultado será próximo a nuestra idea de velocidad instantánea. Y será más próximo cuanto más pequeño sea h. Así pues, la velocidad $v(t_0)$ en un instante t_0 no es otra cosa que:

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{e(t_0+h)-e(t_0)}{h},$$

donde $e(t)$ es el espacio recorrido en función del tiempo t. Cuando dicho límite existe y es finito se llama *derivada* de $e(t)$ en t_0.

En general, siguiendo la idea que se ha visto en el ejemplo anterior, la derivada representa la tasa instantánea de cambio de una magnitud. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo abierto I. Se llama tasa de variación media de f en $[u,v] \subset I$ al número real:

$$TVM(f,[u,v]) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(v)-f(u)}{v-u},$$

que representa cómo cambia la magnitud $y = f(x)$ respecto de x en $[u,v]$. Si nos preguntamos por la tasa de variación instantánea de f en un punto concreto $a \in I$, entonces debemos calcular tasas de variación media en intervalos de la forma $[a, a+h]$ con h cada vez más pequeño. De este modo:

$$TVI(f, a) = \lim_{h \to 0} TVM(f, [a, a+h]) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Cuando este límite existe y es finito se llama derivada de $f(x)$ en a.

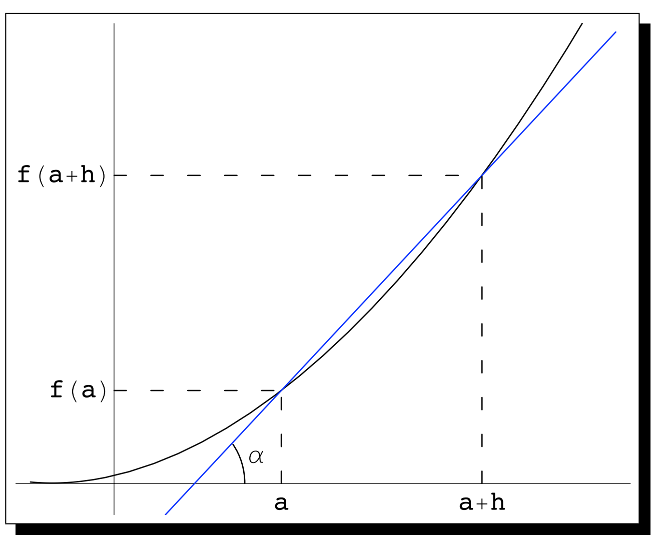
4.1.2. El problema de la recta tangente

Dada una curva C en el plano y un punto $p \in C$, se llama *recta tangente* a C en p, a una recta R que aproxima de forma óptima a C alrededor de p, es decir, los dibujos de C y R están muy próximos en un entorno pequeño de C que contiene a p. Para que una curva C tenga en p una recta tangente es intuitivamente claro que C debe de ser "suave" en p, es decir, C no puede presentar en p un pico ni un cambio brusco de dirección. Esto se puede ilustrar con ayuda de la curva $y = |x|$ en el punto $(0,0)$. El *problema de la recta tangente* consiste en descubrir condiciones para que C tenga recta tangente en p y, en caso de tenerla, calcular dicha recta en términos de C y p.

Queremos ahora estudiar el problema de la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ de una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ en un punto $(a, f(a))$ con $a \in I$. Según la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente, la recta que buscamos, si existe, tendrá la ecuación

$$y = f(a) + m(x-a),$$

donde m es la pendiente de la recta, que habrá que determinar a partir de $f(x)$ y a. Recordemos que la pendiente de una recta es la tangente del ángulo α que forma la recta con el eje de abcisas. Para calcular m procedemos de esta forma. Aproximamos la recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ por las rectas secantes que pasan por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ con h cada vez más pequeño. Resulta entonces claro que, si la recta tangente existe, entonces las pendientes m_h de las rectas secantes deben aproximarse a la pendiente m cuando h tiende a cero. Esto quiere decir que $\lim_{h \to 0} m_h = m$.



Una recta secante a la curva $y = f(x)$

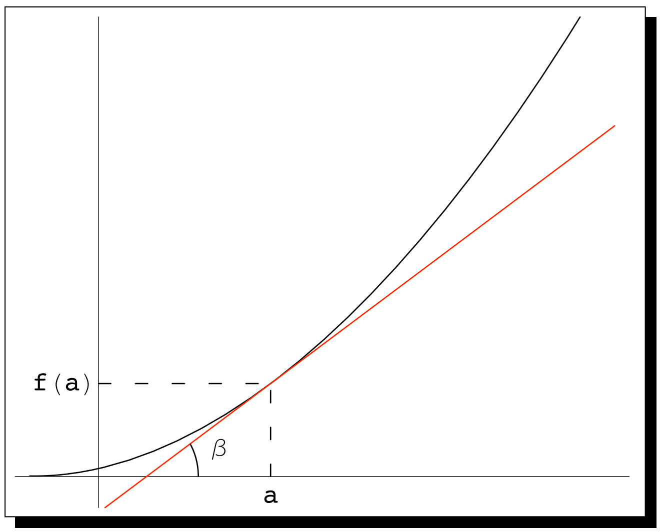
Por otro lado, es sencillo a partir de trigonometría elemental comprobar que las pendientes m_h se calculan de la siguiente manera, véase la figura de arriba:

$$m_h = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

De este modo, tenemos que:

$$m = \lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

que es la definición de derivada de f en a. Así pues, **la derivada de f en un punto a, cuando existe y es finita, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto** $(a, f(a))$. Por tanto, la derivada es igual a $\operatorname{tg}(\beta)$, donde β es el ángulo mostrado en la figura de abajo.



La recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$

4.1.3. Definición e interpretación geométrica de la derivada

Definición: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $a \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es DERIVABLE en a si existe y es finito el límite dado por:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

En tal caso, a dicho límite lo llamamos DERIVADA de f en a, y lo representamos por $f'(a)$ o por $\frac{df}{dx}(a)$. Obsérvese que el límite que aparece en la definición de derivada conduce a una indeterminación de tipo $(\frac{0}{0})$. Diremos que f es derivable en I si f es derivable en cada punto $a \in I$. En tal caso, se llama FUNCIÓN DERIVADA de f a la función $f' : I \to \mathbb{R}$, que asocia a cada punto $a \in I$ la derivada $f'(a)$.

Interpretación geométrica: Ya hemos visto que si f es derivable en a entonces la curva $y = f(x)$ tiene recta tangente no vertical en el punto $(a, f(a))$, y su pendiente es $m = f'(a)$. Por tanto, la ecuación de dicha recta es:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

En particular, esta recta es horizontal si sólo si $f'(a) = 0$. Cuando $f'(a) \neq 0$, entonces la recta normal a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ (recta perpendicular a la tangente) no es vertical y su ecuación viene dada por:

$$y = f(a) - (1/f'(a))(x-a).$$

Ejemplo: Calculemos las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ en el punto $(2,4)$. Para ello, consideramos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y estudiamos si es derivable en $a = 2$. Por definición de derivada, tenemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4+h^2+4h-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+4) = 4,$$

lo que nos indica que f es derivable en $a = 2$ y $f'(2) = 4$. Por tanto, las ecuaciones de las rectas tangente y normal a $y = x^2$ en $(2,4)$ son (tras simplificar):

$$y = 4x-4, \qquad y = \frac{-x}{4} + \frac{9}{2}.$$

Sabemos que para que exista el límite de una función en un punto, tienen que existir los dos límites laterales y ser iguales. Esto nos lleva a definir las derivadas laterales de una función en un punto. Las DERIVADAS LATERALES de f en a son, cuando existen y son finitos, los números reales siguientes:

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Las derivadas laterales habrá que estudiarlas cuando la función tiene una expresión analítica distinta a ambos lados del punto a. Se tiene entonces lo siguiente:

Teorema 4.1. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Dado $a \in I$ se tiene que f es derivable en a si y sólo si existen las dos derivadas laterales, son iguales y son finitas. En tal caso, $f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a)$.*

Ejemplo: Vamos a probar que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $a = 0$. Como esta función tiene distintas expresiones a ambos lados de $a = 0$ utilizamos las derivadas laterales. Se tiene:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-1) = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1.$$

Por el Teorema 4.1, esta función no es derivable en $a = 0$. En general, una función cuya gráfica presente algún “pico” no será derivable en el punto correspondiente.

Ejemplo: Veamos que la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no es derivable en $a = 0$. Al utilizar directamente la definición de derivada, tenemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

En este caso, la pendiente de la recta tangente en $a = 0$ se hace $+\infty$, lo que impide que la función sea derivable en $a = 0$. En general, una función cuya gráfica presente un punto en el que la recta tangente es vertical no será derivable en dicho punto.

Nota: los ejemplos anteriores muestran que una función continua en un punto no tiene por qué ser derivable en dicho punto, véase la Figura 4.1. No obstante, si es cierto que derivabilidad implica continuidad. Este es el contenido del próximo resultado.

Teorema 4.2. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo abierto I. Si f es derivable en un punto $a \in I$, entonces f es continua en a.*

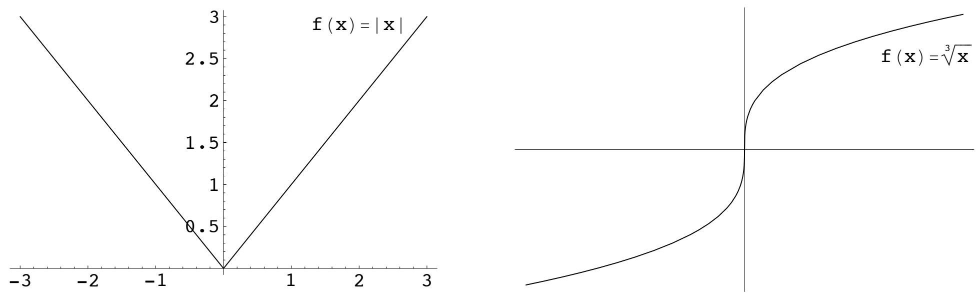


Figura 4.1: Ejemplos de funciones continuas no derivables en $a = 0$

4.2. Resultados relacionados con la derivación

Teorema 4.3 (de Rolle). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ de forma que $f'(c) = 0$.*

Geométricamente, el resultado anterior significa que si una gráfica es continua y suave, y sus extremos están a la misma altura, entonces hay un punto de la curva en el que la recta tangente es horizontal.

Nota: este teorema se suele usar de forma recíproca, es decir, si tenemos la garantía de que la derivada de f no se anula en un intervalo abierto I, entonces f tiene que ser inyectiva en I, o lo que es lo mismo, no existen $a, b \in I$ diferentes tales que $f(a) = f(b)$.

Ejemplo: Vamos a probar que la ecuación $\cos(x) = 2x$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$. Definimos $f(x) = \cos(x) - 2x$, que es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ y, por tanto, lo será en cualquier intervalo. Puesto que $f(0) = \cos(0) - 2\cdot 0 = 1 - 0 = 1 > 0$ y $f(1) = \cos(1) - 2 < 0$, deducimos, por el Teorema de Bolzano, que existe al menos un valor $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $\cos(c) = 2c$.

Ahora vamos a probar mediante el Teorema de Rolle que esta solución es única. Supongamos que hubiera otra solución c' de la misma ecuación, es decir, $f(c') = 0$. Entonces, $f(c) = f(c') = 0$, y por el Teorema de Rolle aplicado a f en el intervalo de extremos c y c', debería existir un número d entre c y c' de manera que $f'(d) = 0$. Pero la derivada de f tiene la expresión $f'(x) = -\operatorname{sen}(x) - 2$ (ver tabla de derivadas), que es una función siempre negativa. Por tanto, llegamos a una contradicción, lo que significa que no existe otra solución c'.

Nuestro próximo resultado es una generalización del Teorema de Rolle:

Teorema 4.4 (del valor medio). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ de tal manera que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geométricamente, este resultado significa que la recta secante a la curva $y = f(x)$ que pasa por los extremos de la curva es paralela a la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto interior. Si pensamos en las derivadas como tasas de variación instantánea de magnitudes, entonces el Teorema del valor medio implica que la tasa de variación media de una función en un intervalo coincide con la tasa de variación instantánea de la función en un punto concreto del intervalo.

Ejemplo: Si la velocidad media de un móvil entre las 8 y las 9 de la mañana es de 120 km/h, entonces en al menos un instante de tiempo entre las 8 y las 9 de la mañana, la velocidad del móvil ha sido exactamente de 120 km/h.

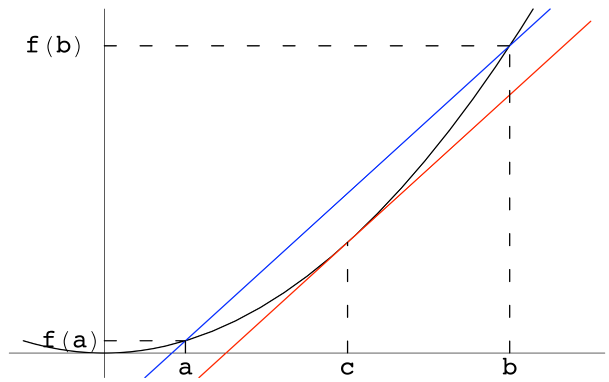


Figura 4.2: El Teorema del valor medio

4.3. Cálculo de derivadas. Reglas de derivación

Ahora aprenderemos a calcular de forma sistemática la derivada de cualquier función de una variable. Evidentemente, la definición original, pese a su clara interpretación, no es práctica a la hora de calcular derivadas de funciones complicadas. Realizaremos el cálculo de derivadas de forma mucho más fácil a partir de las *reglas de derivación*, basadas en dos herramientas fundamentales. La primera: el comportamiento de las derivadas frente a las operaciones de suma, producto y composición. La segunda: el cálculo concreto de la derivada de las funciones elementales.

Derivadas y operaciones con funciones: Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables sobre un intervalo abierto I. Entonces:

1. $f+g$ es derivable en I y $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$,

2. $\lambda \cdot f$ es derivable en I para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$,

3. $f \cdot g$ es derivable en I y $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Regla de Leibnitz),

4. $\dfrac{f}{g}$ es derivable en $I - \{x : \; g(x) = 0\}$ y $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$,

5. f^g es derivable en I y $(f^g)'(x) = g(x)\, f(x)^{g(x)-1} f'(x) + f(x)^{g(x)} \ln(f(x))\, g'(x)$ siempre que $f(x) > 0$ para cada $x \in I$,

6. **Regla de la cadena:** La composición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es derivable en I con derivada:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x).$$

Función	Derivada	Función	Derivada
C	0	$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
x	1	$\lambda\cdot f(x)$	$\lambda\cdot f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-f'(x)}{f(x)^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$(f(x))^n$	$n\,(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$
e^x	e^x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}\cdot f'(x)$
a^x	$a^x\cdot\ln(a)$	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}\cdot\ln(a)\cdot f'(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\operatorname{sen}(f(x))$	$\cos(f(x))\cdot f'(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$	$\cos(f(x))$	$-\operatorname{sen}(f(x))\cdot f'(x)$
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\operatorname{tg}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$
$\operatorname{arc\,sen}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,sen}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\operatorname{arc\,cos}(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,cos}(f(x))$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\operatorname{arc\,tg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arc\,tg}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Ejemplo: Las funciones polinómicas son derivables en $\mathbb{R}$ y su derivada es otro polinomio. Las funciones racionales son derivables en su dominio y su derivada es otra vez una función racional. Sin embargo, hay otras funciones que después de derivar se convierten en funciones más sencillas. Calcular las derivadas de $p(x)=3x^3+7x^2-\sqrt{3}x-\pi$ y de $r(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

Ejemplo: Calcular la derivada de $f(x)=\operatorname{sen}(\cos(x))$, $g(x)=\ln(\ln(\sqrt{x}))$ y $h(x)=\ln\left(\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}\right)$.

Ejemplo: Calculamos la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}^3(x) + \dfrac{x\ln(x)}{e^{\frac{1}{x}}}$. Se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x) + \frac{\left(1\cdot\ln(x) + x\,\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} - x\ln(x)\,e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{(e^{\frac{1}{x}})^2} \\ &= 3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x) + \frac{(\ln(x)+1)\,e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\,e^{\frac{1}{x}}\ln(x)}{e^{\frac{2}{x}}} \\ &= 3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x) + \frac{1+\ln(x)+\frac{1}{x}\ln(x)}{e^{\frac{1}{x}}}. \end{aligned}$$

Terminamos esta sección hablando de derivadas segundas y de orden superior.

Definición: Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo abierto I. Recordemos que la función derivada es la función $f' : I \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in I$ le hace corresponder $f'(x)$. Diremos que f es DOS VECES DERIVABLE en $a \in I$ si la función derivada f' es derivable en a. En este caso, representamos $f''(a) = (f')'(a)$ y lo llamamos DERIVADA SEGUNDA de f en a. Así se pueden definir, sucesivamente, las derivadas tercera, cuarta, etc.

Ejemplo: Calcular las derivadas sucesivas de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

4.4. Aplicaciones de las derivadas

Las aplicaciones del cálculo diferencial son muy numerosas. Aquí nos preocuparemos sobre todo de aspectos relacionados con la representación gráfica de funciones de una variable.

4.4.1. La regla de L'Hôpital

La Regla de L'Hôpital es una aplicación de la derivación que nos permite calcular límites indeterminados de tipo cociente que se vuelven más sencillos cuando derivamos.

Teorema 4.5 (Regla de L'Hôpital). *Consideremos $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en un intervalo abierto I. Dado $a \in I \cup \{\pm\infty\}$, supongamos que al calcular alguno de los límites*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$$

llegamos a una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$. Entonces, se cumple que:

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre que este último límite exista (aunque sea $\pm\infty$).

Notas: 1. No confundir Regla de L'Hôpital con derivada de un cociente. NO ES VERDAD QUE:

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'.$$

2. A veces hay que aplicar la regla varias veces hasta poder calcular el límite.

3. A la hora de aplicar la regla, **es importante comprobar que el límite** que estamos tratando **es del tipo** $(\frac{0}{0})$ o $(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})$. Por ejemplo, claramente $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x} = 2$, pero si derivamos numerador y denominador, nos queda $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1} = 1 \neq 2$.

4. Si el límite $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ no existiera, ésto no significa que el límite original, $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ no exista. Por ejemplo, si aplicamos la regla de L'Hôpital al límite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x}$ que es del tipo $(\frac{+\infty}{+\infty})$, nos queda:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos(x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} (1+\cos(x)),$$

que no existe. En cambio, el límite original sí que existe. De hecho::

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) = 1.$$

Ejemplo: Para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$, aplicamos la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

Ejemplo: Para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^2}$, aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2} = 0.$$

Nota: En principio, la Regla de L'Hôpital sólo se puede utilizar para límites indeterminados de tipo cociente. Por ello, si nos encontramos con otro tipo de indeterminación, debemos de transformarla hasta obtener una de tipo cociente a la que sí podemos aplicar la regla.

Ejemplo: Vamos a resolver una indeterminación del tipo $(+\infty-\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right) = (+\infty-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x\operatorname{sen}(x)} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

En este momento podemos aplicar la Regla de L'Hôpital para calcular el último límite (ejercicio).

Ejemplo: Si al calcular $\lim(f(x)\cdot g(x))$ se obtiene una indeterminación del tipo $0\cdot(\pm\infty)$, entonces podemos transformar la indeterminación en otra de tipo cociente si ponemos:

$$\lim(f(x)\cdot g(x)) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{o} \quad \lim(f(x)\cdot g(x)) = \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

De las dos posibilidades puede que sólo una nos conduzca a un límite más sencillo. La filosofía es siempre la de quedarnos con el límite que resulte más fácil de calcular.

Ejemplo: Como aplicación de lo anterior vamos a calcular $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$, que produce una indeterminación del tipo $0\cdot(-\infty)$. Podemos reescribir:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Este último límite es del tipo $(\frac{-\infty}{+\infty})$, por lo que podemos aplicar la Regla de L'Hôpital para deducir:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Obsérvese que también hubiéramos podido expresar el límite original como:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

Sin embargo, si aplicamos ahora la Regla de L'Hôpital no obtenemos un límite sencillo. De hecho, al aplicar L'Hôpital sucesivamente nuestro límite se va complicando cada vez más.

Ejercicio: Demostrar que:

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen}(x))^{\ln(x)} = 1.$$

4.4.2. Monotonía, puntos críticos y extremos locales de una función

Estudiar la monotonía de una función consiste en decidir en qué intervalos la función es creciente y en cuales es decreciente. Cuando la función es derivable ésto se realiza de forma sencilla discutiendo el signo de la derivada primera de la función.

Teorema 4.6. *Sea I un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Entonces:*

1. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es (estrictamente) creciente en I.*
2. *Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es (estrictamente) decreciente en I.*
3. *Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f es constante en I.*

En la siguiente gráfica se representan una función y su derivada. Observamos que a la izquierda del valor a, f' es positiva y f es creciente. Entre a y b, f' es negativa y, por tanto, f es decreciente. Por último, a la derecha del valor b, f' vuelve a ser positiva, por lo que f vuelve a ser creciente. Este ejemplo muestra también que una función no tiene por qué tener siempre el mismo tipo de monotonía.

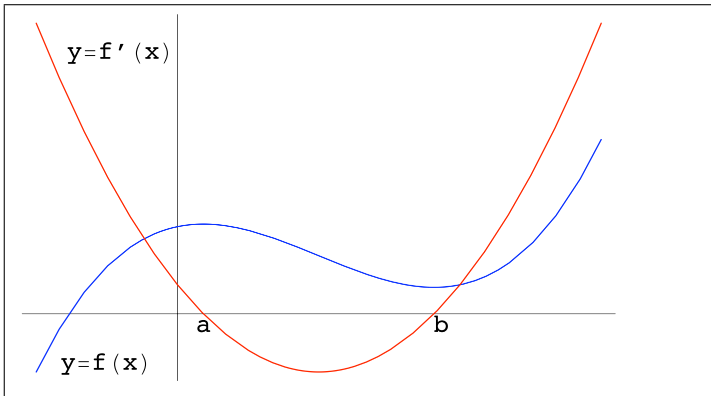


Figura 4.3: Una función y su derivada

Ahora nos preocuparemos de estudiar los puntos en los que *de algún modo* cambia la monotonía de una función.

Definición: Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo abierto I. Dado un punto $a \in I$, diremos que f tiene en a un:

- MÍNIMO LOCAL si hay un entorno $B(a,r)$ contenido en I en el que se cumple que $f(x) \geq f(a)$ (geométricamente, ésto significa que el valor más bajo de la gráfica de f en un entorno pequeño alrededor de a se alcanza justamente en a).
- MÁXIMO LOCAL si hay un entorno $B(a,r)$ contenido en I en el que se cumple que $f(x) \leq f(a)$ (geométricamente, ésto significa que el valor más alto de la gráfica de f en un entorno pequeño alrededor de a se alcanza justamente en a).
- EXTREMO LOCAL si f tiene en a un mínimo local o un máximo local.
- PUNTO CRÍTICO si f es derivable en a y $f'(a) = 0$ (geométricamente, ésto significa que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es horizontal).

La derivación se muestra como una herramienta útil a la hora de estudiar los extremos locales de una función.

Teorema 4.7 (Principio de Fermat). *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo abierto. Si f es derivable en $a \in I$ y f alcanza en a un extremo local, entonces a es un punto crítico de f.*

Por tanto, los extremos locales de una función derivable sobre un intervalo abierto hay que buscarlos entre los puntos críticos de la función dentro de dicho intervalo. Como observación importante destacaremos que **no es cierto que en un punto crítico se alcance siempre un extremo local**. Esto ocurre por ejemplo con la función $f(x) = x^3$ en $a = 0$. Se motiva así el problema de clasificar los puntos críticos de una función, que consiste en decidir si en un punto crítico dado la función alcanza un extremo local (mínimo o máximo) o no. Para resolver esta cuestión existen dos criterios, que exponemos a continuación.

Teorema 4.8 (Criterio de la derivada primera). *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo abierto. Dado un punto crítico a de f en I, estudiamos el signo de $f'(x)$ en un entorno pequeño alrededor de a. Se tiene:*

1. *Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de a y $f'(x) > 0$ a la derecha, entonces a es un mínimo local de f.*
2. *Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de a y $f'(x) < 0$ a la derecha, entonces a es un máximo local de f.*
3. *Si $f'(x)$ no cambia de signo alrededor de a, entonces no hay extremo local en a.*

Así pues, en el ejemplo de la Figura 4.3, se tiene que f presenta un máximo local en a y un mínimo local en b. Esto puede ser deducido tanto a partir de la gráfica de $f(x)$ como de la gráfica de $f'(x)$.

Ejemplo: Estudiemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2\operatorname{arctg}(x-1) - x$. Al derivar una vez y simplificar nos queda:

$$f'(x) = \frac{2}{1+(x-1)^2} - 1 = \frac{2x-x^2}{1+(x-1)^2}.$$

La expresión anterior se anula si y sólo si $x = 0$ y $x = 2$. Así pues, éstos son los puntos críticos de la función, entre los que tendremos que buscar los extremos locales. Al discutir el signo de $f'(x)$ deducimos que $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y $f'(x) > 0$ para $x \in (0, 2)$. Así pues, f es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$. Por tanto, se deduce que f presenta un mínimo local en $a = 0$ y un máximo local en $a = 2$.

Teorema 4.9 (Criterio de la derivada segunda). *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable dos veces sobre un intervalo abierto I. Dado un punto crítico a de f en I, estudiamos el signo de $f''(a)$. Entonces, se tiene lo siguiente:*

1. *Si $f''(a) > 0$, entonces a es un mínimo local de f.*
2. *Si $f''(a) < 0$, entonces a es un máximo local de f.*
3. *Si $f''(a) = 0$, entonces no se puede asegurar nada.*

Ejercicio: Utilizar el criterio anterior para clasificar los puntos críticos de $f(x) = 2 \operatorname{arctg}(x-1) - x$.

Nota: los dos criterios empleados para clasificar un punto crítico a son diferentes. El primero exige el estudio del signo de $f'(x)$ alrededor de a, mientras que el segundo se basa en el estudio del signo de $f''(a)$. Nótese que el primer criterio nunca deja casos dudosos, mientras que el segundo sí.

4.4.3. Curvatura y puntos de inflexión de una función

En esta sección realizaremos un tratamiento muy parecido al de la anterior para estudiar un nuevo aspecto de la gráfica de una función que, en este caso, está controlado por la derivada segunda: la curvatura de la función. Necesitaremos unos conceptos previos.

Definición: Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo abierto I. Diremos que f es:

1. CONVEXA en I si cada recta secante a la curva $y = f(x)$ deja a la gráfica por debajo.
2. CÓNCAVA en I si cada recta secante a la curva $y = f(x)$ deja a la gráfica por encima.

Nota: los términos *convexo* y *cóncavo* no se emplean de forma consistente. Sin embargo, en la mayor parte de los textos matemáticos se utiliza la misma terminología que nosotros hemos adoptado.

Estudiar la curvatura de una función consiste en decidir los intervalos donde f es convexa y aquellos donde es cóncava. Cuando la función es derivable dos veces el estudio de su curvatura se realiza de forma sencilla discutiendo el signo de la derivada segunda de la función.

Teorema 4.10. *Sea I un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable dos veces en I. Entonces:*

1. *Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa en I.*
2. *Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava en I.*
3. *Si $f''(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces la gráfica de f en I es una recta.*

Ahora estudiaremos los puntos en los que cambia la curvatura de una función.

Definición: Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo abierto I. Dado un punto $a \in I$, diremos que f tiene en a un:

- PUNTO DE INFLEXIÓN CONVEXO-CÓNCAVO si hay un entorno $B(a,r)=(a-r,a+r)$ contenido en I de forma que f es convexa en $(a-r,a)$ y cóncava en $(a,a+r)$.
- PUNTO DE INFLEXIÓN CÓNCAVO-CONVEXO si hay un entorno $B(a,r)=(a-r,a+r)$ contenido en I de forma que f es cóncava en $(a-r,a)$ y convexa en $(a,a+r)$.

La derivación se muestra como una herramienta útil a la hora de estudiar los puntos de inflexión de una función.

Teorema 4.11. *Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable sobre un intervalo abierto I. Si f es derivable dos veces en $a \in I$ y f presenta un punto de inflexión en a, entonces $f''(a)=0$, lo que geométricamente significa que la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $(a,f(a))$ atraviesa a la gráfica.*

Por tanto, los puntos de inflexión de una función derivable dos veces sobre un intervalo abierto hay que buscarlos entre los puntos que anulan a la derivada segunda. Como observación importante destacaremos que **no es cierto que en un punto con derivada segunda nula se alcance siempre un punto de inflexión**. Esto le ocurre por ejemplo a la función $f(x)=x^4$ en $a=0$. Se motiva así el problema de clasificar los puntos donde $f''(x)=0$, que consiste en decidir si en tales puntos la función alcanza un punto de inflexión o no. Para resolver esta cuestión existen dos criterios, que exponemos a continuación.

Teorema 4.12 (Criterio de la derivada segunda). *Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable dos veces en un intervalo abierto. Dado un punto $a \in I$ donde $f''(a)=0$, estudiamos el signo de $f''(x)$ en un entorno pequeño alrededor de a. Se tiene:*

1. *Si $f''(x)<0$ a la izquierda de a y $f''(x)>0$ a la derecha, entonces a es un punto de inflexión cóncavo-convexo de f.*
2. *Si $f''(x)>0$ a la izquierda de a y $f''(x)<0$ a la derecha, entonces a es un punto de inflexión convexo-cóncavo de f.*
3. *Si $f''(x)$ no cambia de signo alrededor de a, entonces no hay punto de inflexión en a.*

Ejemplo: Vamos a estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=2\operatorname{arc\,tg}(x-1)-x$. Como vimos antes, su derivada primera es $f'(x)=\frac{2x-x^2}{1+(x-1)^2}$, que se anula en $x=0$ y en $x=2$. Calculamos ahora su derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{(2-2x)(x^2-2x+2)-(2x-x^2)(2x-2)}{(1+(x-1)^2)^2}=\frac{4(1-x)}{(1+(x-1)^2)^2}.$$

La expresión anterior se anula si y sólo si $x=1$. Además, $f''(x)>0$ para $x\in(-\infty,1)$ y $f''(x)<0$ cuando $x\in(1,+\infty)$. Así pues, f es convexa en $(-\infty,1)$ y cóncava en $(1,+\infty)$. Además, deducimos que f tiene un punto de inflexión convexo-cóncavo en $x=1$.

Teorema 4.13 (Criterio de la derivada tercera). *Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable tres veces sobre un intervalo abierto I. Dado un punto $a \in I$ donde $f''(a)=0$, estudiamos el signo de $f'''(a)$. Entonces, se tiene lo siguiente:*

1. *Si $f'''(a)>0$, entonces a es un punto de inflexión cóncavo-convexo de f.*
2. *Si $f'''(a)<0$, entonces a es un punto de inflexión convexo-cóncavo de f.*

3. *Si* $f'''(a) = 0$, *entonces no se puede asegurar nada.*

Ejercicio: Utilizar el criterio anterior para estudiar los puntos de inflexión de $f(x) = 2\,\mathrm{arc\,tg}(x-1) - x$.

Nota: los dos criterios empleados para clasificar un punto donde $f''(a) = 0$ son diferentes. El primero exige el estudio del signo de $f''(x)$ alrededor de a, mientras que el segundo se basa en el estudio del signo de $f'''(a)$. Nótese que el primer criterio nunca deja casos dudosos, mientras que el segundo sí.

4.4.4. Optimización de funciones

En mucho problemas cotidianos es importante analizar si una determinada función alcanza sus valores mínimo y/o máximo absolutos. En esta sección aprenderemos a resolver este tipo de cuestiones. Antes daremos un par de definiciones.

Definición: Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo cualquiera. Dado $a \in I$, diremos que f alcanza en a su

1. MÍNIMO ABSOLUTO si $f(x) \geq f(a)$ para cada $x \in I$.
2. MÁXIMO ABSOLUTO si $f(x) \leq f(a)$ para cada $x \in I$.

Diremos que f alcanza en a un extremo absoluto si alcanza su mínimo absoluto o su máximo absoluto.

Notas: 1. No hay que confundir el mínimo absoluto (resp. máximo absoluto) de una función con los puntos donde ese mínimo (resp. máximo) se alcanza. Por ejemplo, para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, su mínimo absoluto (el valor más pequeño que toma la función) es -1, que se alcanza en todos los puntos de la forma $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, con k un número entero. Por otro lado, su máximo absoluto (el valor más grande que toma la función) es 1, que se alcanza en todos los puntos de la forma $x = \pi/2 + 2k\pi$, con k un número entero.

2. La relación entre extremo absoluto y extremo local no es tan evidente como parece. Lo que es claro es que si f alzanza en a un extremo local, entonces no tiene por qué alcanzar en a un extremo absoluto (podría haber valores de x alejados de a donde la función tomara un valor más grande o más pequeño que en a). Por otro lado, si f alcanza en a un extremo absoluto y el punto a **pertenece al interior del intervalo** I, entonces f alcanza en a un extremo local. Sin embargo, **ésto no es cierto si** a **es un punto de la frontera del intervalo** I.

3. Los extremos absolutos de una función en un intervalo abierto no tienen por qué alcanzarse (aunque la función sea derivable). Por ejemplo, la función $f(x) = x$ no alcanza su mínimo absoluto ni su máximo absoluto en el intervalo $(-1,1)$. Lo mismo le pasa a la función $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ si $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $f(-\pi/2) = 0$ y $f(\pi/2) = 0$.

Evidentemente, es deseable disponer de criterios cómodos para garantizar que una función alcanza sus extremos absolutos. Un buen resultado en relación con este problema es el Teorema de Weierstrass.

Teorema 4.14 (de Weierstrass). *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado. Entonces,* f *alcanza en* $[a,b]$ *sus extremos absolutos.*

Supongamos que tenemos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Gracias al Teorema de Weierstrass sabemos que f debe alcanzar su mínimo y su máximo absolutos en $[a,b]$. Si el extremo absoluto se alcanza en un punto de (a,b), entonces deberá ser también un extremo local y, por tanto, un punto crítico. Pero también podría ocurrir que f alcanzase sus extremos absolutos en los puntos frontera del intervalo.

Así pues, para calcular los extremos absolutos de una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, que es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), se procede como sigue:

1. Se calculan los puntos críticos de f en (a,b).
2. Se calcula la imagen de dichos puntos críticos, y también las imágenes de los puntos a y b. La imagen menor/mayor corresponderá al mínimo/máximo absoluto de la función, que se alcanzará en el punto correspondiente.

Ejemplo: Vamos a calcular los extremos absolutos de la función $f:[0,3\pi]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=2\,\mathrm{sen}(x)-x$. La existencia de extremos absolutos está garantizada por el Teorema de Weierstrass, al ser f continua en $[0,3\pi]$. Para determinar los puntos críticos de f en $(0,3\pi)$ calculamos su derivada primera y la igualamos a cero:

$$f'(x)=2\cos(x)-1,\quad f'(x)=0\Leftrightarrow\cos(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\begin{cases}\pi/3+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ 5\pi/3+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

Ahora bien, puesto que sólo nos interesan los puntos críticos de f en $(0,3\pi)$, nos quedamos con las soluciones $\pi/3$, $5\pi/3$ y $7\pi/3$. Ahora basta con evaluar f en los puntos anteriores y también en los puntos de la frontera del intervalo $[0,3\pi]$. Obtenemos:

$$f(0)=2\,\mathrm{sen}(0)-0=0,\qquad f(\tfrac{\pi}{3})=2\,\mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{3})-\tfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\tfrac{\pi}{3},$$

$$f(5\tfrac{\pi}{3})=2\,\mathrm{sen}(5\tfrac{\pi}{3})-5\tfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}-5\tfrac{\pi}{3},\quad f(7\tfrac{\pi}{3})=2\,\mathrm{sen}(7\tfrac{\pi}{3})-7\tfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}-7\tfrac{\pi}{3},$$

$$f(3\pi)=2\,\mathrm{sen}(3\pi)-3\pi=-3\pi.$$

Es fácil deducir entonces que el máximo absoluto vale $\sqrt{3}-\pi/3$ y se alcanza en el punto $x=\pi/3$, mientras que el mínimo absoluto vale -3π y se alcanza en el punto $x=3\pi$ (véase Figura 4.4).

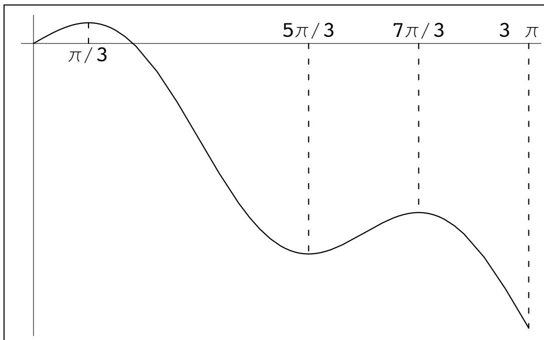


Figura 4.4: Gráfica de $f(x)=2\,\mathrm{sen}(x)-x$ en $[0,3\pi]$

En otras ocasiones nos interesará asegurar la existencia de extremos absolutos de una función dentro de un intervalo abierto. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.15. *Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función derivable sobre un intervalo abierto I. Sea $a\in I$ un punto crítico de f. Estudiamos el signo de $f'(x)$ en todo el intervalo I. Entonces:*

1. *Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de a y $f'(x) > 0$ a la derecha, entonces f alcanza en a su mínimo absoluto.*

2. *Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de a y $f'(x) < 0$ a la derecha, entonces f alcanza en a su máximo absoluto.*

Ejemplo: La función $f(x) = x^2 + 1$ alcanza en $a = 0$ su mínimo absoluto, que vale $f(0) = 1$. La función $g(x) = 1 - x^4$ alcanza en $a = 0$ su máximo absoluto, que vale $g(0) = 1$.

4.5. Representación gráfica de funciones

El conocimiento que nos puede proporcionar la gráfica de una función sobre el fenómeno representado por la función es bastante amplio. Así, un simple vistazo a la gráfica puede informarnos acerca de mínimos, máximos, comportamientos del fenómeno para tiempos grandes, asíntotas, saltos de la función, etc. Por todo ésto resulta importante poder dibujar de forma aproximada la gráfica de una función.

A la hora de llevar a cabo la representación gráfica de una función $f(x)$ se deben seguir los siguientes pasos:

1. **Dominio de f:** Si nos viene dado, no tendremos nada que hacer, pero si sólo tenemos la expresión analítica de la función, habrá que calcular su *dominio*, es decir el conjunto de números reales más grande en el que la expresión que define a f tiene sentido.

2. **Corte con los ejes:** El punto de corte con el eje de ordenadas sólo se puede calcular cuando $a = 0$ sea un punto del dominio de la función. En tal caso, el punto de corte es $(0, f(0))$. Los puntos de corte con el eje de abcisas se obtienen al resolver la ecuación $f(x) = 0$.

3. **Simetrías:** Debemos estudiar si la función es par o impar, o ninguna de las dos cosas. Esta información nos puede simplificar el dibujo de la la gráfica.

4. **Continuidad y asíntotas:** Estudiaremos los intervalos donde la función es continua y la naturaleza de las discontinuidades presentadas. También calcularemos las posibles asíntotas de la función.

5. **Monotonía y puntos críticos:** Incluye el estudio de la monotonía de la función, es decir, de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como el calculo y la clasificación de los puntos críticos.

6. **Curvatura y puntos de inflexión:** Incluye el estudio de la curvatura de la función, es decir, de los intervalos donde la funcion es convexa y cóncava, así como sus posibles puntos de inflexión.

A continuación, empezaremos representando los puntos que hemos ido obteniendo (puntos de corte con los ejes, extremos locales, puntos de inflexión, etc). Luego, dibujaremos la gráfica teniendo en cuenta toda la información obtenida en los apartados anteriores.