Tema 3

Integración de funciones de una variable

Introducción

Este tema está dedicado al estudio y a la relación que existe entre dos problemas que, en principio, tienen una naturaleza muy distinta.

1. **Cálculo de primitivas:** si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función real de una variable definida sobre un intervalo abierto I, una *primitiva* de f es una función derivable $F : I \to \mathbb{R}$ de forma que se cumple $F'(x) = f(x)$, para cada $x \in I$. De este modo, el cálculo de primitivas es el proceso inverso a la derivación.

2. **Cálculo de áreas:** sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua sobre un intervalo abierto. Dados dos puntos $a, b \in I$ con $a < b$, llamamos *trapecio mixtilíneo* al recinto plano limitado por el eje de abcisas, la gráfica de la función f, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. El problema consiste en calcular el área de dicho recinto en términos de la función dada f.

3.1. Integral indefinida. Cálculo de primitivas

En el tema anterior hemos estudiado la derivada de una función dada. Ahora pretendemos llevar a cabo el proceso inverso, es decir, dada una función f, encontrar otra función F de manera que $F'(x) = f(x)$. Más adelante estudiaremos la interpretación geométrica de dicho proceso.

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que otra función $F : I \to \mathbb{R}$ es una FUNCIÓN PRIMITIVA de f si F es derivable y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Por ejemplo, una función primitiva de $f(x) = \cos(x)$ es $F(x) = \operatorname{sen}(x)$, ya que $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$.

Obsérvese que hemos dicho **una función primitiva**, y no **la función primitiva**. Ello es debido a que no hay una única función primitiva, sino infinitas. De hecho, es claro, al ser la derivada de una función constante igual a cero, que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y $C \in \mathbb{R}$, entonces $F(x) + C$ es también una primitiva de $f(x)$. En realidad, todas las primitivas de f se obtienen así, como ilustra el siguiente resultado, que es consecuencia del teorema del valor medio.

Proposición 3.1. *Sea I un intervalo abierto, $f : I \to \mathbb{R}$ una función y F una primitiva suya. Entonces, cualquier otra función primitiva de $f(x)$ es de la forma $F(x) + C$, donde C es una constante real.*

Llamaremos INTEGRAL INDEFINIDA de la función f al conjunto de todas sus primitivas, y lo denotaremos por $\int f(x)\,dx$. Así, por ejemplo, la integral indefinida de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2 + C$, donde C es una constante real arbitraria.

Proposición 3.2 (Linealidad de la integral indefinida)**.** *La integral indefinida verifica las propiedades:*

1. $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$
2. *Si λ es una constante real, entonces* $\displaystyle\int (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int f(x)\,dx.$

Nota importante: No es cierto casi nunca que

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int g(x)\,dx\right),$$

es decir LA INTEGRAL DE UN PRODUCTO NO ES EL PRODUCTO DE LAS INTEGRALES.

En general, la obtención de primitivas es una disciplina difícil. Dedicaremos el resto de esta sección a presentar algunas técnicas concretas de cálculo para las mismas.

3.1.1. Integrales inmediatas

A partir de la definición de primitiva y de la derivación de las funciones elementales, podemos construir una tabla de integrales indefinidas inmediatas (véase tabla de integrales inmediatas). Gracias a esta tabla y a las propiedades de linealidad de la integral indefinida, podemos calcular gran cantidad de primitivas de funciones elementales.

A veces, para calcular una integral conviene reescribirla de modo que sea una integral inmediata. Un ejemplo de esta situación es el siguiente:

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^2}\,dx = \int \left(x+2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+2x+3\int\frac{dx}{x} - \int x^{-2}\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1}+C = \frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$$

Nota: A partir de ahora, a la hora de calcular integrales indefinidas, prescindiremos de escribir la constante C, que se dará por sobreentendida.

3.1.2. Integración por partes

Sean $u, v : I \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables sobre un intervalo abierto I. Si tenemos en cuenta que:

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x),$$

e integramos, entonces deducimos que:

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx,$$

que es la llamada *fórmula de integración por partes*.

La fórmula se utiliza para calcular integrales donde intervienen productos de funciones. Para aplicarla, debemos realizar una elección de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ (hay dos posibles elecciones). Normalmente, una de las elecciones nos llevará a una integral más sencilla, mientras que la otra nos conducirá a una integral más complicada. Cuando veamos que pasa esto último debemos de cambiar la elección original. Veamos un ejemplo.

□ **Ejemplo:** Cálculo de $\int x e^x \, dx$:

$$\int x e^x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u(x) = x, & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x, & v(x) = e^x \end{array} \right] = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x = e^x (x-1).$$

No obstante, si hacemos la otra posible elección, nos queda lo siguiente:

$$\int x e^x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u(x) = e^x, & u'(x) = e^x \\ v'(x) = x, & v(x) = x^2/2 \end{array} \right] = (x^2/2) \, e^x - \int (x^2/2) \, e^x \, dx,$$

con lo que se llega a una integral más complicada que la que teníamos al principio (ha aumentado el grado del monomio que acompaña a e^x).

En ocasiones tenemos que aplicar la regla de integración por partes varias veces para calcular una integral. Debemos asegurarnos que cada vez que aplicamos la regla se obtiene una integral más sencilla. Veamos un ejemplo.

□ **Ejemplo:** Cálculo de $\int x^2 \operatorname{sen}(x) \, dx$:

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) \, dx = \left[\begin{array}{ll} u(x) = x^2, & u'(x) = 2x \\ v'(x) = \operatorname{sen}(x), & v(x) = -\cos(x) \end{array} \right] = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) \, dx.$$

$$\int x \cos(x) \, dx = \left[\begin{array}{ll} u(x) = x, & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos(x), & v(x) = \operatorname{sen}(x) \end{array} \right] = x \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x) \, dx = x \operatorname{sen}(x) + \cos(x).$$

Finalmente, juntando la información de las dos integrales anteriores, tenemos:

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) \, dx = -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2\cos(x) = (2 - x^2) \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x).$$

En ocasiones la regla de integración por partes se utiliza para calcular integrales en las que sólo aparece una función. Veamos un ejemplo.

□ **Ejemplo:** Cálculo de $\int \ln(x) \, dx$:

$$\int \ln(x) \, dx = \int 1 \cdot \ln(x) \, dx = \left[\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x), & u'(x) = 1/x \\ v'(x) = 1, & v(x) = x \end{array} \right] = x \ln(x) - \int 1 \, dx = x \ln(x) - x.$$

3.1.3. Integración de funciones racionales

En esta sección pretendemos calcular la integral indefinida:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas. Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el de $Q(x)$, podemos dividir los dos polinomios, obteniendo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde $C(x)$ y $R(x)$ (cociente y resto de la división entre $P(x)$ y $Q(x)$) son polinomios, y el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Por tanto podemos suponer, tras realizar la división, que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

En primer lugar, estudiaremos cómo hallar las primitivas de ciertas funciones racionales concretas llamadas *fracciones simples*. Después veremos cómo a partir de éstas podemos calcular las primitivas de funciones racionales más generales.

Llamaremos fracción simple a toda función racional de alguno de estos tipos:

$$\frac{A}{x-a}, \qquad \frac{B}{(x-b)^n}, \qquad \frac{Mx+N}{x^2+bx+c},$$

donde A,B,M,N son constantes reales, n es un número natural con $n \geq 2$, y x^2+bx+c es un polinomio de segundo grado irreducible, es decir, sin raíces reales. Veamos cómo se pueden integrar este tipo de funciones racionales.

- **Integrales del tipo** $\int \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{x-a}}\,\mathbf{dx}$**:** Son inmediatas. Su valor es $A\ \ln|x-a|$.
- **Integrales del tipo** $\int \frac{\mathbf{B}}{(\mathbf{x-b})^{\mathbf{n}}}\,\mathbf{dx}$**:** Son inmediatas. Su valor es $\dfrac{B\,(x-b)^{1-n}}{1-n}$.
- **Integrales del tipo** $\int \frac{\mathbf{Mx+N}}{\mathbf{x^2+bx+c}}\,\mathbf{dx}$**:** Estas integrales se descomponen en suma de dos: una es de tipo logaritmo y la otra de tipo arcotangente. Veamos cómo se hace ésto en general:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{Mx}{x^2+bx+c}\,dx + N\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = I_1 + N I_2.$$

Trataremos cada integral por separado. La primera será de tipo logaritmo, por lo que vamos buscando en el numerador la derivada del denominador:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{Mx}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{(M/2)(2x)+(M/2)b-(M/2)b}{x^2+bx+c}\,dx \\ &= \frac{M}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx - \frac{Mb}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c} \\ &= \frac{M}{2}\ln|x^2+bx+c| - \frac{Mb}{2} I_2. \end{aligned}$$

Por tanto, todo se reduce a calcular la integral $I_2 = \int (x^2+bx+c)^{-1}dx$. Esta integral es de tipo arcotangente. Para buscar el arcotangente expresamos primero $x^2+bx+c = (x-d)^2+k^2$. A continuación, hacemos las siguientes transformaciones:

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{dx}{k^2+(x-d)^2} = \int \frac{dx}{k^2\,(1+\left(\frac{x-d}{k}\right)^2)} = \frac{1}{k}\int \frac{1/k}{1+\left(\frac{x-d}{k}\right)^2} = \frac{\operatorname{arc\,tg}(\frac{x-d}{k})}{k}.$$

Juntando toda la información resulta lo siguiente:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+bx+c| + \left(N - \frac{Mb}{2}\right)\frac{\operatorname{arc\,tg}(\frac{x-d}{k})}{k}.$$

La fórmula anterior no es para memorizarla sino que, en cada caso concreto, repetiremos la misma idea para obtener la integral pedida.

□ **Ejemplo:** *Cálculo de* $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+4}\,dx$*:*

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+2x+4}\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+4} = I_1 + 3I_2.$$

De este modo tenemos:

$$I_1 = \int \frac{2x}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx - 2I_2 = \ln|x^2+2x+4| - 2I_2,$$

con lo que todo se reduce a calcular I_2. Para ello expresamos $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3$. Entonces, se tiene:

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+2x+4} = \int \frac{dx}{3+(x+1)^2} = \int \frac{dx}{3\,(1+(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1/\sqrt{3}}{1+(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2} = \frac{\operatorname{arc\,tg}(\frac{x+1}{\sqrt{3}})}{\sqrt{3}}.$$

Juntando toda la información nos queda finalmente:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+4}\,dx = \ln|x^2+2x+4| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Una vez que sabemos realizar la integral de fracciones simples, veamos cómo podemos calcular cualquier integral del tipo:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

donde el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, y el polinomio $Q(x)$ no admite factores cuadráticos irreducibles múltiples en su factorización. Esto significa que, aplicando la regla de Ruffini, podemos factorizar $Q(x)$ de esta forma:

$$Q(x) = q\,(x-a_1)^{r_1}\,(x-a_2)^{r_2}\cdots(x-a_n)^{r_n}\,(x^2+b_1x+c_1)\,(x^2+b_2x+c_2)\cdots(x^2+b_mx+c_m),$$

donde cada a_i es una raíz real de $Q(x)$ con multiplicidad r_i, y cada $x^2+b_jx+c_j$ es un polinomio de grado dos irreducible. A continuación, un resultado de álgebra nos permite expresar la función racional que queremos integrar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} + \frac{A_{21}}{x-a_2} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2r_2}}{(x-a_2)^{r_2}} + \\ & + \cdots + \frac{A_{n1}}{x-a_n} + \frac{A_{n2}}{(x-a_n)^2} + \cdots + \frac{A_{nr_n}}{(x-a_n)^{r_n}} + \\ & + \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+b_2x+c_2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{x^2+b_mx+c_m},\end{aligned}$$

donde todos los números que aparecen en los numeradores son constantes que hay que determinar. Nótese que cada raíz real da lugar a tantas fracciones simples como su multiplicidad, mientras que cada factor irreducible tiene asociada una única fracción simple. Para calcular las constantes, desarrollamos la igualdad anterior e igualamos los polinomios resultantes en el numerador. Una vez hecho ésto, integramos las descomposición anterior; nótese que cada sumando es una fracción simple de las que hemos aprendido a integrar anteriormente.

Nota: Si el polinomio $Q(x)$ se factoriza únicamente como $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, las constantes asociadas a la descomposición en fracciones simples $A_1, \ldots, A_n$ se pueden calcular simplemente dando a la variable x los valores $a_1, \ldots, a_n$.

□ **Ejemplo:** *Cálculo de* $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$*:* Como $x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, la descomposición en fracciones simples nos quedaría:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Si desarrollamos e igualamos coeficientes tenemos:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1},$$

$$1 = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D),$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=1/4 \\ B=-1/4 \\ C=0 \\ D=-1/2 \end{array}\right.$$

Por tanto, nos queda:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4-1} =& \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ =& \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x).\end{aligned}$$

3.1.4. El cambio de variable

Este método se utiliza para convertir una integral que no sabemos resolver en la variable x en una integral más simple que dependa de una nueva variable $y = f(x)$. Tras realizar la integral en función de y tendremos que expresar el resultado utilizando la variable original x.

Si g es una función continua y f es derivable, se tiene que:

$$\int g(f(x))f'(x)\,dx = \int g(y)\,dy,$$

que es la llamada *fórmula del cambio de variable*. Se suele escribir $y = f(x)$, $dy = f'(x)\,dx$.

□ **Ejemplo:** Calculamos $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{4+\cos^2(x)}\,dx$. Haciendo el cambio de variable $y = \cos(x)$, $dy = (-\operatorname{sen}(x))\,dx$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{4+\cos^2(x)}\,dx = \int \frac{-dy}{4+y^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dy.$$

De nuevo, cambiando variables $t = y/2$, $dt = dy/2$, queda:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dy = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(t).$$

Así pues, finalmente se tiene:

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{4+\cos^2(x)}\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(y/2) = -\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cos(x)}{2}\right).$$

3.1.5. Integración de funciones racionales trigonométricas

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios de dos variables z_1 y z_2, donde $z_1 = \operatorname{sen}(x)$ y $z_2 = \cos(x)$. En estos casos conviene en primer lugar estar atento a la posibilidad de un cambio de variable $y = \cos(x)$ o $y = \operatorname{sen}(x)$, y usar la relación $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$. En particular, para la integración de $\int (\operatorname{sen}^n(x))\,(\cos^m(x))\,dx$, con n y m números enteros (positivos o negativos), se puede seguir la regla:

1. Si n es impar, se hace el cambio $y = \cos(x)$.
2. Si m es impar, se hace el cambio $y = \operatorname{sen}(x)$.
3. Si n y m son pares, se puede simplificar la integral usando las identidades:

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

□ **Ejemplo:** Calculamos $\int \cos^2(x)\,dx$ y $\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$.

$$\diamond \int \cos^2(x)\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}.$$

$$\diamond \int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2(x))\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \left[\begin{array}{c} y = \operatorname{sen}(x) \\ dy = \cos(x)\,dx \end{array}\right] = \int \frac{1-y^2}{y^2}\,dy$$
$$= \frac{-1}{y} - y = \frac{-1}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x).$$

Si un cambio de los antes indicados no funciona, siempre se puede hacer el cambio:

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Con este cambio de variable convertimos la integral en una de tipo racional, que ya hemos estudiado.

□ **Ejemplo:** Calcular $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{tg}(x)}$.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{tg}(x)} = \int \frac{\cos(x)}{(\operatorname{sen}(x))\,(\cos(x)) - \operatorname{sen}(x)}\,dx = \Big[\operatorname{tg}(x/2) = t\Big] = \cdots = \int \frac{t^2-1}{2t^3}\,dt$$
$$= \frac{1}{4t^2} + \frac{\ln|t|}{2} = \frac{1}{4\operatorname{tg}^2(x/2)} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}(x/2)|.$$

3.1.6. Integración de funciones con radicales cuadráticos

Se trata de calcular primitivas de funciones en las que aparece la raíz cuadrada de un polinomio de segundo grado. En principio, como siempre, conviene estar atento a posibles cambios de variable que resuelvan el problema.

Por otro lado, para expresiones del tipo $\sqrt{\pm 1 \pm x^2}$, se pueden hacer los siguientes cambios, destinados a eliminar la raíz de la integral:

1. $\sqrt{1-x^2}$: se resuelve con el cambio $x = \cos(t)$ o $x = \operatorname{sen}(t)$, pues $1-\cos^2(x) = \operatorname{sen}^2(x)$.

2. $\sqrt{1+x^2}$: se resuelve con $y = \operatorname{tg}(x)$, puesto que $1+\operatorname{tg}^2(x) = 1/\cos^2(x)$.

3. $\sqrt{x^2-1}$: usamos el cambio $y = \cosh(x)$, ya que $\cosh^2(x) - 1 = \operatorname{senh}^2(x)$.

Si tenemos otro polinomio de segundo grado dentro de la raíz, siempre se puede transformar mediante un cambio adecuado en un polinomio del tipo $\pm 1 \pm x^2$. Veamos un ejemplo:

□ **Ejemplo:** Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$. Transformamos el integrando:

$$8x - x^2 = -(x^2 - 8x + 16) + 16 = -(x-4)^2 + 16 = 16\left(1 - \left(\frac{x-4}{4}\right)^2\right),$$

y hacemos el cambio de variable $y = (x-4)/4$. Al hacerlo tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16\,(1-(\frac{x-4}{4})^2)}} = \left[\begin{array}{c} y = (x-4)/4 \\ dy = dx/4 \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{4\,dy}{4\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arc\,sen}(y) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-4}{4}\right).$$

3.2. Integral definida. Teorema fundamental del cálculo integral

En esta sección pretendemos introducir el concepto de integral definida y relacionarlo con el de integral indefinida. De esta forma veremos cómo el cálculo de primitivas resulta ser de utilidad a la hora de calcular áreas. Posteriormente, lo usaremos incluso para hallar longitudes y volúmenes.

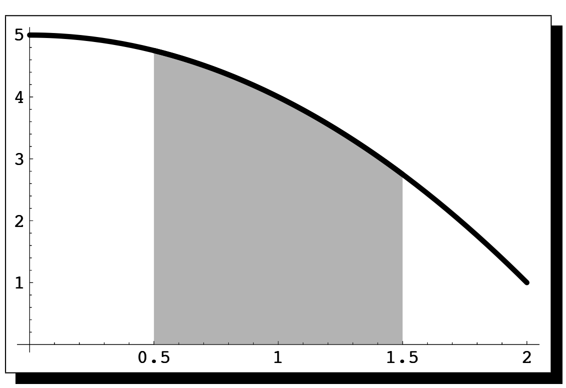


Figura 5.1: Área bajo una curva

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa sobre un intervalo abierto. Tomemos $a, b \in I$ con $a < b$. Se define la INTEGRAL DEFINIDA DE f entre a y b como el área del trapecio mixtilíneo comprendido entre la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ (véase la figura 5.1). Se escribe como:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dada $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua cualquiera y puntos $a, b \in I$ con $a < b$, su integral definida entre a y b se define como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2,$$

donde:

A_1 es el área situada por debajo de la gráfica de f, por encima del eje de abscisas y entre las rectas verticales $x = a$, $x = b$.

A_2 es el área situada por encima de la gráfica de f, por debajo del eje de abscisas y entre las rectas verticales $x = a$, $x = b$.

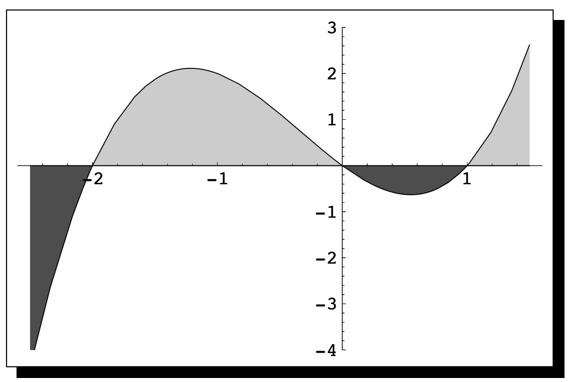


Figura 5.2: En esta figura, el área A_1 viene representada en color claro y A_2 en color oscuro.

Más adelante necesitaremos también la siguiente definición: dados $a, b \in I$ con $a < b$, se define la integral de f entre b y a como:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

En concordancia con lo anterior, se tiene que $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Proposición 3.3 (Propiedades de la integral definida)**.**

1. *La integral de la suma es la suma de las integrales:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *La integral "saca las constantes":*

$$\int_a^b (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. *Aditividad respecto del intervalo de integración:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad \textit{para todo } c \in (a,b).$$

4. *La integral respeta el orden, es decir, si $a < b$, entonces:*

$$f(x) \leq g(x) \textit{ en } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

En particular, la integral de una función positiva entre a y b $(a < b)$ es siempre positiva.

A continuación, pretendemos poner de manifiesto la relación entre la integral definida y la indefinida, es decir, la relación entre el cálculo de áreas y el cálculo de primitivas.

Teorema 3.4 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea I un intervalo abierto y $a \in I$. Dada una función continua $f : I \to \mathbb{R}$, definimos la función área $F : I \to \mathbb{R}$ como:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Entonces, la función F es derivable y $F'(x) = f(x)$, en otras palabras, F es una primitiva de f.

Como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo, podemos deducir la siguiente proposición, que nos dice cómo calcular integrales definidas a partir de indefinidas.

Proposición 3.5 (Regla de Barrow)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y F una primitiva suya, es decir, $F'(x) = f(x)$. Dados dos puntos $a, b \in I$ con $a < b$, se tiene que:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

□ **Ejemplo:** Calculamos $\int_0^1 (e^x + 3x - x^2)\,dx$:

$$\int_0^1 (e^x + 3x - x^2)\,dx = e^x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = e^1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - e^0 = e + \frac{1}{6}.$$

Nota: Si tenemos una integral definida y pretendemos realizar un cambio de variable, podemos simplemente calcular una primitiva, como en el ejemplo anterior, y luego aplicar la regla de Barrow. Sin embargo, también podemos trabajar siempre con integrales definidas: en este caso, hay que tener en cuenta que **también hay que aplicar el cambio de variable a los límites de integración**:

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy.$$

Igual que para integrales indefinidas, se suele escribir $y = f(x)$, $dy = f'(x)\,dx$.

□ **Ejemplo:** Cálculo de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x + 3e^{2x}}{2 + e^x}\,dx$:

$$\int_0^1 \frac{e^x + 3e^{2x}}{2 + e^x}\,dx = \int_0^1 \frac{1 + 3e^x}{2 + e^x}\,e^x\,dx = \begin{bmatrix} y = e^x & dy = e^x\,dx \\ e^0 = 1 & e^1 = e \end{bmatrix} = \int_1^e \frac{1 + 3y}{2 + y}\,dy =$$

$$\int_1^e \left(3 - \frac{5}{2 + y}\right) dy = 3y - 5\ln|y + 2|]_1^e = 3e - 5\ln(e + 2) - 3 + 5\ln(3).$$

3.3. Algunas aplicaciones del cálculo integral

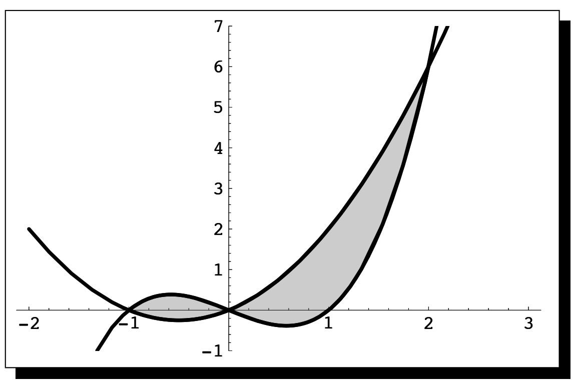
3.3.1. Área comprendida entre dos curvas

Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas definidas en un intervalo abierto I. Supongamos que tenemos dos puntos $a, b \in I$ con $a < b$ de forma que $f(x) \geq g(x)$, para cada $x \in [a, b]$. Llamamos *área encerrada entre f y g en $[a, b]$* al área del recinto plano acotado por arriba por $y = f(x)$, por abajo por $y = g(x)$, y lateralmente por las rectas verticales $x = a$, $x = b$. En este caso, se puede probar que este área coincide con:

$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.}$$

En el caso general en el que las funciones no estén ordenadas en todo el intervalo (hay trozos donde f es mayor y trozos donde lo es g), dividiremos el intervalo $[a, b]$ en trozos disjuntos buscando **los puntos de corte de las dos funciones**, de forma que en cada trozo una de ellas sea mayor que la otra, y calcularemos el área entre las curvas en cada trozo siguiendo la fórmula de arriba. Si no nos queremos preocupar por determinar exactamente la posición de las dos gráficas en cada intervalo concreto, basta con sumar los valores absolutos de las integrales en cada trozo. Veámoslo en un ejemplo:

☐ **Ejemplo:** *Calcular el área entre las curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ (área de la región sombreada en la figura de abajo).*



Nota: En general, cuando no se especifica el intervalo donde tenemos que calcular el área, se toma el comprendido entre el primer y el último punto de corte de las gráficas. Lo primero que necesitamos son los puntos de corte de las dos gráficas, que se obtienen resolviendo la ecuación:

$$x^3 - x = x^2 + x.$$

Dichos puntos son $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$, con lo que dividimos el área en dos partes: A_1, la parte en el intervalo $[-1, 0]$ y A_2, la parte en el intervalo $[0, 2]$. Entonces se tiene:

$$A_1 = \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x - (x^2 + x))\, dx \right| = \frac{5}{12}, \qquad A_2 = \left| \int_0^2 (x^3 - x - (x^2 + x))\, dx \right| = \frac{8}{3},$$

con lo que el área buscada será $A = A_1 + A_2 = 5/12 + 8/3 = 37/12$.

3.3.2. Longitudes de curvas

Sea f una función derivable con derivada continua en el intervalo $[a,b]$. La longitud de la curva $y = f(x)$ en $[a,b]$ es:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.}$$

□ **Ejemplo:** *Calcular la longitud de la curva $y = mx+n$ en el intervalo* $[a,b]$. Utilizando la fórmula tendremos lo siguiente:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+m^2}\,dx = (b-a)\sqrt{1+m^2}.$$

3.3.3. Áreas de sólidos de revolución

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces, el área de la superficie generada haciendo girar alrededor del eje de abcisas la curva $y = f(x)$ en $[a,b]$, es:

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,}$$

siempre que la función dentro de la integral sea continua en $[a,b]$.

□ **Ejemplo:** *Superficie de una esfera de radio 1.* Podemos generar una esfera de radio 1 girando respecto del eje de abcisas la circunferencia $x^2+y^2 = 1$. Despejando y en función de x nos quedaría la gráfica:

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1,1].$$

De esta forma, el área de la superficie generada será:

$$A = 2\pi \int_{-1}^1 f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \cdots = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-1}^1 dx = 2\pi \cdot 2 = 4\pi.$$

3.3.4. Volúmenes de sólidos de revolución

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. El volumen del sólido generado al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje de abcisas es:

$$\boxed{V_{OX} = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx,}$$

mientras que el volumen del sólido generado al girar la gráfica alrededor del eje de ordenadas es:

$$\boxed{V_{OY} = 2\pi \int_a^b x\,f(x)\,dx.}$$

□ **Ejemplo:** *Volumen de una esfera de radio 1.* Igual que antes, podemos generar una esfera rotando respecto del eje de abcisas la curva:

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1,1].$$

Con ello, el volumen será:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} f(x)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2) \, dx = \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-1}^{1} \right) = \pi \Big((1-1/3) - (-1+1/3) \Big) = \frac{4\pi}{3}.$$

3.4. Apéndice: áreas de regiones no acotadas. Integrales impropias

Hasta ahora hemos estudiado métodos para calcular integrales de funciones continuas definidas en intervalos $[a,b]$. En cambio, **si la función deja, por ejemplo, de estar definida en un punto del intervalo, su integral no se calcula como hemos visto anteriormente**. En esta sección se estudiará qué hacer en estos casos.

El método que hemos visto en las anteriores secciones para calcular integrales mediante primitivas puede extenderse a situaciones más generales: funciones continuas definidas en intervalos no acotados (es decir, intervalos de la forma $[a,+\infty)$ o $(-\infty,b]$), o a funciones continuas definidas en intervalos abiertos. A estas integrales se les suele dar el nombre de *integrales impropias* y, como se verá, las trataremos de forma muy parecida a las que ya conocemos. Estudiaremos tres casos posibles.

• Integración en intervalos no acotados.

Supongamos que tenemos una función continua $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$. Podemos buscar una primitiva de f, llamémosla F, y estudiar su comportamiento en $+\infty$: si la función F tiene límite en $+\infty$, diremos que existe la integral impropia de f en $[a,+\infty)$, y dicha integral vendrá dada por:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \left(\lim_{x\to+\infty} F(x) \right) - F(a),}$$

es decir, la integral vale "$F(+\infty) - F(a)$", considerando $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$. Si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$, respectivamente.

Una vez que hemos definido una noción de integral para este tipo de funciones, podemos generalizar el área bajo una curva, la longitud de un arco de curva, el área y el volumen de un sólido de revolución,...,etc siendo las fórmulas dadas en las secciones anteriores perfectamente válidas.

☐ **Ejemplo:** *Calcular el área comprendida bajo la curva* $y = 1/x^2$ *en el intervalo* $[1,+\infty)$. Viendo el área bajo la curva como una integral se tiene que:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} \Big]_1^{+\infty} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} \right) - (-1) = 1.$$

Con una idea parecida podríamos definir la integral $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$. Por último, si tenemos una función definida en todo $\mathbb{R}$, podemos dividir la integral como:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x) \, dx + \int_c^{+\infty} f(x) \, dx,}$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Si la suma vale "$\infty - \infty$", NO PODEMOS CALCULAR LA INTEGRAL.

• Integración de funciones continuas en intervalos abiertos.

Se trata de calcular integrales de funciones continuas que están definidas en un intervalo abierto por uno de sus extremos. En tal extremo supondremos que la función presenta una asíntota vertical. Supongamos que el intervalo es de la forma $(a,b]$ (el caso del intervalo $[a,b)$ es análogo).

Sea pues $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua a la que queremos calcular su integral, y sea F una primitiva suya. Estudiamos entonces el límite por la derecha de la primitiva en a, y si existe, podemos calcular la integral de f así:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - \left(\lim_{x\to a^+} F(x)\right).}$$

Nota: Si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$, respectivamente. Si tenemos una función continua en un intervalo abierto $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, su integral valdrá

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\lim_{x\to b^-} F(x)\right) - \left(\lim_{x\to a^+} F(x)\right).$$

Otra vez, si la suma vale "$\infty - \infty$", NO PODEMOS CALCULAR LA INTEGRAL. Al igual que antes, podemos generalizar el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes para este tipo de funciones.

□ **Ejemplo:** *Calcular la longitud de una circunferencia de radio 1.* La ecuación de una circunferencia de radio 1 centrada en el origen es $x^2 + y^2 = 1$. Podemos despejar y en la parte positiva:

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1,1].$$

Así, la **longitud de media circunferencia** será:

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \cdots = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}(x)]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

□ **Ejemplo:** *Calcular el área bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en $(0,1]$.* Aplicamos la fórmula dada, y tenemos:

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\,\Big]_0^1 = 2 - \left(\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\right) = 2.$$

• Integración de funciones continuas en un intervalo salvo en un punto interior.

Supongamos que tenemos una función $f : [a,b] - \{c\} \to \mathbb{R}$ que es continua en $[a,b] - \{c\}$ y que tiene una asíntota vertical en $x = c$. Entonces, si queremos calcular la integral de f entre a y b, tenemos que dividir dicha integral en dos trozos: la integral en $[a,c)$ y la integral en $(c,b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.}$$

Cada una de estas integrales se calcularía haciendo uso de la sección anterior. El único problema que se puede presentar es, de nuevo, que la suma valga "$\infty - \infty$", en cuyo caso NO PODEMOS CALCULAR LA INTEGRAL.

□ **Ejemplo:** *Calcular la integral de la función $f(x) = \ln(x^2)$ en $[-1,1]$.* La función que nos dan es $f : [-1,1] - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2)$. Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, por lo que para calcular su integral dividimos el intervalo en dos partes, $[-1,0)$ y $(0,1]$. Una primitiva de f puede ser calculada por partes, obteniéndose $\int f(x)\,dx = x\ln(x^2) - 2x$. Usando la definición de integral de la sección anterior, nos queda:

$$\int_{-1}^{1} \ln(x^2)\,dx = \int_{-1}^{0} \ln(x^2)\,dx + \int_0^1 \ln(x^2)\,dx = x\ln(x^2) - 2x\Big]_{-1}^{0} + x\ln(x^2) - 2x\Big]_0^1 = -2-2 = -4.$$

□ **Ejercicio:** *Calcular* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx.$