Tema 3

Repaso de funciones elementales, límites y continuidad

3.1. Funciones. Definiciones básicas. Operaciones con funciones

3.1.1. Definiciones

Una *función real de (una) variable real* es una aplicación $f : A \to B$ donde A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, es decir, es una regla que hace corresponder a cada $x \in A$ un único elemento $f(x) \in B$, que se llama *imagen* de x mediante f.

- Se llama *expresión analítica de una función* a la fórmula matemática que nos indica las operaciones que debemos realizar con el elemento $x \in A$ para calcular $f(x)$.
- El conjunto A sobre el que la función está definida recibe el nombre de *dominio* de f. Cuando no se especifique el dominio de una función se entenderá que éste es el subconjunto más grande de $\mathbb{R}$ en el que la expresión analítica que define a la función tiene sentido. Lo denotamos $Dom(f)$.
- Se llama *imagen* o *recorrido* de f al conjunto, que representaremos por $f(A)$ o por $Im(f)$, cuyos elementos son las imágenes de los puntos de A mediante f, es decir:

  $$f(A) = Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : \textit{ existe } x \in A \textit{ con } f(x) = y\}.$$

  Una manera práctica de decidir si un punto y está o no en $Im(f)$ consiste en intentar resolver la ecuación $f(x) = y$, siendo x la incógnita de la ecuación. Si somos capaces de despejar la x en función de y con $x \in A$, entonces $y \in Im(f)$; de lo contrario $y \notin Im(f)$.

- Se llama *gráfica* de f a la curva $y = f(x)$ del plano $\mathbb{R}^2$, es decir:

  $$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}.$$

  Normalmente representaremos los puntos de A sobre el eje x (o eje de abcisas) y sus imágenes $f(x)$ en el eje y (o eje de ordenadas). El punto $(x_0, f(x_0))$ se obtiene entonces como la intersección de la recta vertical $\{x = x_0\}$ y la recta horizontal $\{y = f(x_0)\}$. La gráfica de f es la curva en el plano que se forma cuando unimos todos estos puntos. Nótese que esta curva corta a cada línea vertical a lo sumo una vez por la definición de función. Además, un número y_0 pertenecerá a la imagen de f si la recta horizontal $\{y = y_0\}$ corta a la gráfica de f al menos una vez.

Ejemplo: Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ su dominio es $\mathbb{R}$. Su expresión analítica es la fórmula $y = x^2$, que nos indica como calcular la imagen de cualquier elemento x. El recorrido de esta función estará formada por aquellos $y \in \mathbb{R}$ tales que la ecuación $x^2 = y$ tiene solución en la incógnita x. Ahora, si queremos despejar la x en la ecuación $x^2 = y$, necesitamos hacer la raíz cuadrada de y, para lo que se precisa que $y \geq 0$. En tal caso, al despejar tendríamos $x = \pm\sqrt{y}$. Concluimos que $Im(f) = [0, +\infty)$. Por otro lado, es bien sabido que la gráfica de f es una parábola cuyo vértice es el punto $(0,0)$.

Ejemplo: Para la función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ su dominio está especificado y es el intervalo abierto y acotado $(0,1)$. Su expresión analítica es la fórmula $y = 1/x$, que nos indica como calcular la imagen de cualquier elemento x. Por otro lado, como no se puede dividir por cero, el conjunto más grande donde la función está bien definida es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$. La gráfica de f es el trozo de la hipérbola $xy = 1$ cuando $x \in (0,1)$.

• Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ está *acotada superiormente* si su gráfica se queda siempre por debajo de una recta horizontal, es decir, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq K$ para cada $x \in A$. Se dice que f está *acotada inferiormente* si su gráfica se queda siempre por encima de una recta horizontal, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$ para cada $x \in A$. Se dice que f está *acotada* si lo está superior e inferiormente. Geométricamente, ésto significa que la gráfica de f está contenida dentro de una banda horizontal del plano, equivalentemente, el recorrido de la función está contenido en un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

Ejemplos: La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ no está acotada ni superior ni inferiormente, ya que su recorrido es todo $\mathbb{R}$. La función $g(x) = x^2 + 1$ está acotada inferiormente por 1 pero no está acotada superiormente ya que toma valores arbitrariamente grandes. La función $g(x) = 1/(x^2 + 1)$ está acotada superiormente por 1 ya que el denominador está acotado inferiormente por 1. Además, está también acotada inferiormente ya que toma siempre valores positivos.

• Se dice que una función f es *creciente* si para cualesquiera $x < y$ se cumple que $f(x) \leq f(y)$. Geométricamente, ésto significa que la gráfica de f siempre sube o se mantiene constante. Se dice que f es *estrictamente creciente* si para cualesquiera $x < y$ se cumple $f(x) < f(y)$ (siempre sube).

• Se dice que una función f es *decreciente* si para cualesquiera $x < y$ se cumple que $f(x) \geq f(y)$. Geométricamente, ésto significa que la gráfica de f siempre baja o se mantiene constante. Se dice que f es *estrictamente decreciente* si para cualesquiera $x < y$ se cumple $f(x) > f(y)$ (siempre baja).

Ejemplos: La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ es una función creciente: su gráfica es la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,1)$. La función $f(x) = -x$ es decreciente: su gráfica es la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,-1)$. La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ no es creciente ni decreciente.

• Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es *par* si para cada x se cumple que $f(-x) = f(x)$. Geométricamente, ésto significa que la gráfica de f es simétrica respecto del eje de ordenadas.

• Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es *impar* si para cada x se cumple que $f(-x) = -f(x)$. Geométricamente, ésto significa que la gráfica de f es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Ejemplos: La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es una función par ya que $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. La función $g(x) = x^3$ es una función impar, ya que $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$. La función $h(x) = 2x + 7$ no es ni par ni impar.

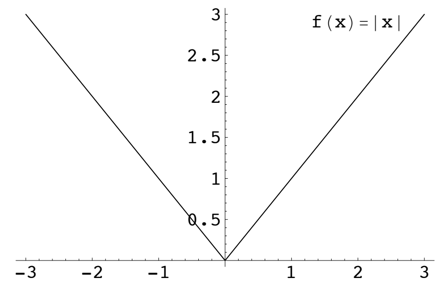

Figura 3.1: La función valor absoluto

• Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice que es *periódica* si existe un valor $T>0$ de forma que $f(x+T)=f(x)$ para cada $x\in\mathbb{R}$. Geométricamente, ésto significa que la gráfica de f consta de un trozo fundamental que se va repitiendo a lo largo de todo el eje x. Esto ocurre con las funciones trigonométricas: por ejemplo $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=\cos(x)$ son funciones periódicas.

A continuación proporcionamos formas de fabricar nuevas funciones a partir de dos dadas.

• Si $f,g:A\to\mathbb{R}$ son dos funciones con el mismo dominio, se definen la *suma*, el *producto* y el *cociente* de f y g, como las funciones $f+g, f\cdot g:A\to\mathbb{R}$ y $(f/g):A-\{x\in A: g(x)=0\}\to\mathbb{R}$ dadas por:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (f\cdot g)(x)=f(x)\,g(x),\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},$$

donde la última expresión sólo tiene sentido cuando $g(x)\neq 0$. Se define el producto de un número $\lambda\in\mathbb{R}$ por una función $f:A\to\mathbb{R}$ como la función $\lambda\cdot f:A\to\mathbb{R}$ dada por $(\lambda\cdot f)(x)=\lambda f(x)$. Se puede demostrar que el conjunto de todas las funciones definidas en A es un *espacio vectorial* sobre $\mathbb{R}$ con la suma y el producto por números definido anteriormente.

Ejemplo: Supongamos que tenemos las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=x$. La suma de f y g es la función $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $(f+g)(x)=\operatorname{sen}(x)+x$. El producto de f y g es la función $f\cdot g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $(f\cdot g)(x)=x\operatorname{sen}(x)$. El cociente de f y g es la función $f/g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por $(f/g)(x)=(\operatorname{sen}(x))/x$ (obsérvese que hemos tenido que suprimir del dominio los puntos que anulan al denominador para que la expresión resultante tenga sentido). Por último $9\cdot f$ es la función $9\cdot f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $(9\cdot f)(x)=9\operatorname{sen}(x)$.

• Si f y g son dos funciones, definimos la *composición* de g y f, que representaremos por $g\circ f$, como la función $(g\circ f)(x)=g(f(x))$. La forma en la que trabaja la nueva función $g\circ f$ es la siguiente: para cada x, primero hace trabajar f sobre x, de modo que calculamos $f(x)$; a continuación trabaja la función g pero no sobre x, sino sobre el valor $f(x)$ previamente calculado.

Ejemplo: La composición de funciones no es una operación conmutativa en general. Esto lo podemos ver en el siguiente ejemplo: sean $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=x-3$. Se tiene:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+1)=(x^2+1)-3=x^2-2,$$

mientras que:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-3)=(x-3)^2+1=x^2+9-6x+1=x^2-6x+10.$$

3.1.2. Inversa para la composición de una función

Normalmente, se suele entender que la *inversa* de una función f es la función $1/f$ que definimos más arriba y que trabaja como $(1/f)(x) = 1/f(x)$. No obstante, existe otro concepto de función inversa que puede llevar a confusión con el anterior al llamarse de la misma manera. Para introducir este segundo concepto de inversa necesitamos unas definiciones previas.

• Sea $f : A \to B$ una aplicación entre dos subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se dice que f es *inyectiva* si no toma dos veces el mismo valor, es decir, si $x, y \in A$ y $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$. Geométricamente, ésto significa que cada recta horizontal del plano corta a la gráfica de f en a lo sumo un punto.

• Se dice que una aplicación $f : A \to B$ es *sobreyectiva* si cada elemento de B es la imagen mediante f de algún elemento de A, es decir, $Im(f) = B$. Dicho de otra manera, la ecuación $f(x) = y$ siempre tiene solución en $x \in A$, sea cual sea el número real $y \in B$. Geométricamente, ésto significa que cada recta horizontal del plano con altura $y \in B$ corta a la gráfica de f por lo menos en un punto.

• Se dice que $f : A \to B$ es *biyectiva* si es a la vez inyectiva y sobreyectiva. Geométricamente, ésto significa que cada recta horizontal del plano con altura $y \in B$ corta a la gráfica de f en exactamente un punto; equivalentemente, cada número real $y \in B$ es la imagen de exactamente un elemento $x \in A$ mediante f. Dicho de otra manera, para cada real $y \in B$ existe una sola solución de la ecuación $f(x) = y$ con $x \in A$. A esta única solución que, evidentemente, depende de y, la representaremos por $x = f^{-1}(y)$. A la función $f^{-1} : B \to A$ definida por $f^{-1}(y) =$ único valor $x \in A$ tal que $f(x) = y$, la llamaremos la *función inversa para la composición* de f.

Importante: La función inversa para la composición f^{-1} que acabamos de definir NO COINCIDE con $1/f$, es decir, no es lo mismo $f^{-1}(y)$ que $1/f(y)$.

Ejemplo 1: Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x+7$. La gráfica de f es la recta que pasa por los puntos $(0,7)$ y $(-3,1)$ (dibujarla). Por tanto, es una función biyectiva, ya que cada recta horizontal del plano corta a la gráfica de f en exactamente un punto. Para calcular la inversa ponemos $y = 2x+7$, y despejamos x en función de y. Al hacerlo se obtiene $x = (y-7)/2$, con lo que $f^{-1}(y) = (y-7)/2$, cuya gráfica es otra recta (dibujarla). Obsérvese que la gráficas de f y de f^{-1} son simétricas con respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrante del plano).

Ejemplo 2: Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, cuya gráfica es una parábola con vértice en el origen de coordenadas. Es claro que f no es inyectiva ya que cada recta horizontal $\{y = K\}$ con $K > 0$ corta a la gráfica dos veces. Esto es un reflejo de que la ecuación $x^2 = y$ tiene siempre dos soluciones cuando $y > 0$, concretamente, $x = \pm\sqrt{y}$. Tampoco es sobreyectiva, porque cada recta $\{y = K\}$ con $K < 0$ no corta a la gráfica de f, o lo que es lo mismo, la ecuación $x^2 = y$ no tiene solución siempre que $y < 0$.

¿Cómo obtener a partir de esta función otra que sea biyectiva? Para arreglar el problema de la falta de inyectividad tenemos que restringir el dominio de f a un subconjunto donde la función no repita valores; ésto ocurre por ejemplo en $[0,+\infty)$ y en $(-\infty,0]$. Así, la función $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ sí es inyectiva (nos estamos quedando con la rama derecha de la parábola) pero sigue sin ser sobreyectiva porque la gráfica no corta a las rectas horizontales $\{y = K\}$ con $K < 0$. Para arreglar la falta de sobreyectividad se sustituye el conjunto de llegada de la función por el recorrido de la función. En este caso, es claro que el recorrido de g es el conjunto $[0,+\infty)$ (todo número real no negativo es el cuadrado de su raíz cuadrada). Concluimos que la función $h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ dada por $h(x) = x^2$ es biyectiva. Para calcular su inversa para la composición escribimos $y = x^2$, y despejamos x en función de y. Deducimos que $x = \sqrt{y}$, con lo que la inversa para la composición de h es la función $h^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

En definitiva, si queremos construir una función biyectiva a partir de otra que no lo es, debemos restringir el dominio de la función para hacerla inyectiva, y el conjunto de llegada por el recorrido de la función para hacerla sobreyectiva. Con estas restricciones, podemos calcular la inversa para la composición de la función escribiendo $y = f(x)$, y despejando la variable x en función de y.

• Si f es biyectiva y f^{-1} es su inversa para la composición, entonces es claro de la definición de f^{-1} que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ y $(f \circ f^{-1})(y) = y$. Además, las gráficas de f y de f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

3.1.3. Idea intuitiva de límites y continuidad

Hablaremos con más detalle y rigor de los conceptos de límite y continuidad en las secciones tercera y cuarta de este tema. Aquí nos conformaremos con dar ideas intuitivas que nos sirvan para comprender estas nociones y los ejemplos que expondremos en la sección siguiente.

• Sea f una función definida alrededor de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ (no hace falta que f esté definida en x_0, pero sí alrededor de x_0). Sea $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ésto significa que L puede representar a $+\infty$ o a $-\infty$, que no son números). Diremos que *f tiene límite L cuando x tiende a x_0* si cada vez que le damos a la variable independiente x valores muy cercanos a x_0 entonces los valores de la función $f(x)$ están muy cercanos del valor L. En tal caso escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Diremos que *f tiene límite L cuando x tiende a $+\infty$* (resp. $-\infty$) si cada vez que le damos a la variable independiente x valores muy grandes (resp. muy pequeños) entonces los valores de la función $f(x)$ están muy cercanos del valor L. En tal caso escribimos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \ \ (resp. \lim_{x \to -\infty} f(x) = L).$$

• Intuitivamente una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida sobre un intervalo I es continua si la gráfica es una curva que no presenta saltos ni interrupciones, es decir, para dibujarla no tenemos que levantar el bolígrafo del papel.

3.2. Repaso de las funciones elementales

Esta sección está dedicada a recordar algunas funciones básicas y sus propiedades.

1. **Función potencial de exponente** b ($b \neq 0$): Estas funciones están definidas en todo $\mathbb{R}$ cuando $b \in \mathbb{N}$. Para b arbitrario, a veces el dominio de definición es $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (por ejemplo para $b = -1$), otras es $\mathbb{R}_0^+$ (por ejemplo, para $b = 1/2$), y otras es $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ (por ejemplo, para $b = -1/2$). Aquí nos restringiremos a estudiar el comportamiento de la función en $\mathbb{R}^+$. Por tanto consideramos la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^b$. Propiedades:

    a) f es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ y continua.

    b) $(xy)^b = x^b y^b$, $(x/y)^b = x^b / y^b \quad (x^b)^c = x^{bc}$.

    c) Si $b > 0$, entonces f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$, $\lim_{x \to 0} x^b = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty$.

    d) Si $b < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$, $\lim_{x \to 0} x^b = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} x^b = 0$.

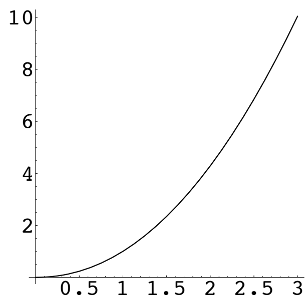

Figura 3.2: Función potencial con $b > 0$

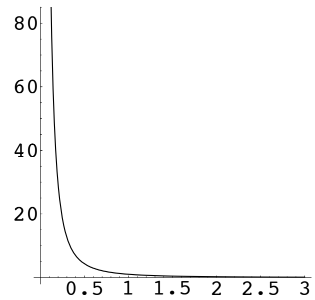

Figura 3.3: Función potencial con $b < 0$

2. **Funciones polinómicas:** Una *función polinómica* de grado n es una función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya expresión analítica es de la forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde todos los a_i son números reales, todos los exponentes son naturales, y $a_n \neq 0$. El coeficiente a_n se llama coeficiente líder. Los polinomios de grado 0 son de la forma $p(x) = a_0$, es decir son funciones constantes. Los polinomios de grado 1 son de la forma $p(x) = a_1 x + a_0$, cuyas gráficas son rectas con pendiente $a_1 \neq 0$ que pasan por el punto $(0, a_0)$. Los polinomios de grado 2 son de la forma $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, y es bien sabido que sus gráficas son parábolas. Las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$.

3. **Funciones racionales:** Llamaremos *función racional* a toda función $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas. Como no se puede dividir por cero, el dominio de una función racional es $Dom(r) = \mathbb{R} - \{x : q(x) = 0\}$. Son funciones continuas en cada intervalo de su dominio.

4. **Función exponencial:** Es la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$ (el número e es un número irracional cuyo valor aproximado es 2,71828). Propiedades de esta función:

   a) f es continua en todo $\mathbb{R}$, biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, y estrictamente creciente.

   b) f está acotada inferiormente por 0; de hecho, $e^x > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

   c) $e^0 = 1, e^{x+y} = e^x e^y, e^{x-y} = e^x / e^y, (e^x)^y = e^{xy}$.

   d) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \ \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

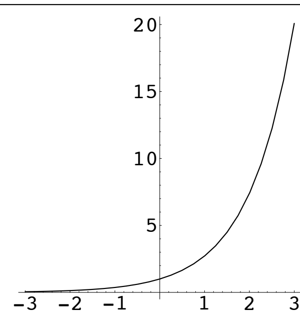

Figura 3.4: La función exponencial

5. **Función logaritmo neperiano:** Es la función $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ que coincide con la inversa para la composición de la función exponencial. Esto significa que $\ln(y) =$ único número real x tal que $e^x = y$. Algunas propiedades de esta función son las siguientes:

   a) Es continua en $\mathbb{R}^+$, biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, y estrictamente creciente.

   b) Es una función no acotada superior ni inferiormente; de hecho, su imagen es $\mathbb{R}$.

   c) $\ln 1 = 0, \ln e = 1, \ln e^k = k$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$, $\ln(x^y) = y \ln x$.

   d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

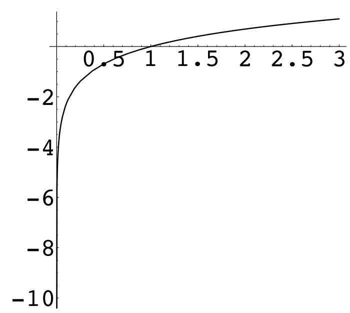

Figura 3.5: La función logaritmo neperiano

6. **Función exponencial de base $a > 0$ $(a \neq 1)$:** Es la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Algunas propiedades de esta función son las siguientes:

   a) f es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, continua, y acotada inferiormente por 0; de hecho, $a^x > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. No está acotada superiormente.

   b) $a^0 = 1$, $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{x-y} = a^x / a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$.

   c) Si $a > 1$, entonces f es estrictamente creciente, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

   d) Si $0 < a < 1$, entonces f es estrictamente decreciente, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

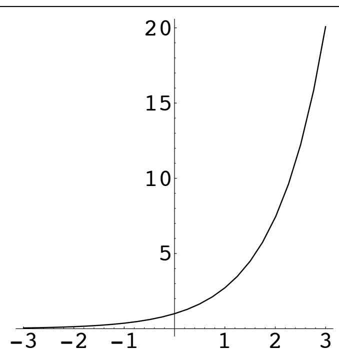

Figura 3.6: Función exponencial con $a > 1$

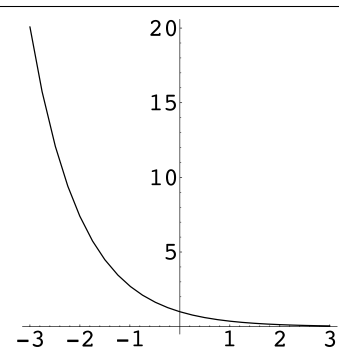

Figura 3.7: Función exponencial con $0 < a < 1$

7. **Función logarítmica de base** $a > 0$ ($a \neq 1$): Es la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Coincide con la inversa para la composición de la función exponencial de base a. Algunas de sus propiedades son:

   a) Es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y continua. No está acotada ni superior ni inferiormente.

   b) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a(x^y) = y \log_a x$.

   c) Si $a > 1$, $\log_a$ es estrictamente creciente, $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$.

   d) Si $0 < a < 1$, $\log_a$ es estrictamente decreciente, $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$.

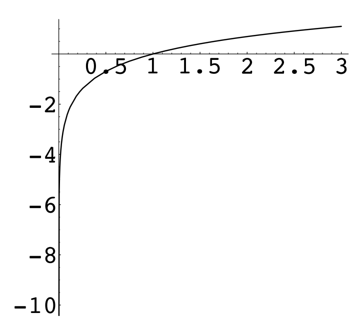

Figura 3.8: Función logaritmo con $a > 1$

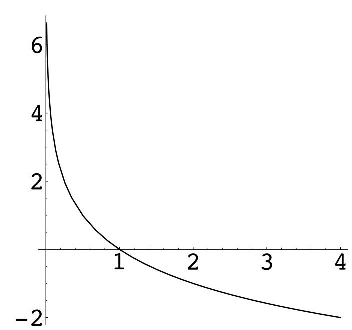

Figura 3.9: Función logaritmo con $0 < a < 1$

8. **Funciones seno y coseno:** Son las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}, \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

   a) Ambas son continuas en todo $\mathbb{R}$. Sus recorridos coinciden con el intervalo $[-1, 1]$, por lo que son funciones acotadas. No tienen límite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.

   b) Son periódicas, ya que: $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c) $\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ es biyectiva y estrictamente creciente.

   d) $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ es biyectiva y estrictamente decreciente.

   e) $\operatorname{sen}(x) = 0$ si y sólo si $x = k\pi$ con k un número entero, $\operatorname{sen}(x) = 1$ si y sólo si $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con k un número entero, $\operatorname{sen}(x) = -1$ si y sólo si $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con k un número entero.

   f) $\cos(x) = 0$ si y sólo si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con k un número entero, $\cos(x) = 1$ si y sólo si $x = 2k\pi$ con k un número entero, $\cos(x) = -1$ si y sólo si $x = (2k + 1)\pi$ con k un número entero.

   g) Seno es impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Coseno es par: $\cos(-x) = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

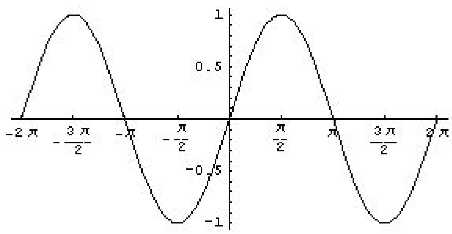

Figura 3.10: La función seno

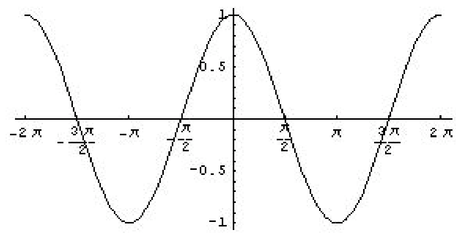

Figura 3.11: La función coseno

9. **Función tangente:** Es la función dada por el cociente entre la función seno y la función coseno. Por tanto, estará bien definida sólo en los puntos donde $\cos(x) \neq 0$. Las soluciones de la ecuación $\cos(x) = 0$ son $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} =$ conjunto de los números enteros). Definimos la función tangente $\operatorname{tg} : A \to \mathbb{R}$ como $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, para todo $x \in A$, siendo $A = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

   a) Es continua en cada intervalo de A y no está acotada ni superior ni inferiormente. Su recorrido es $\mathbb{R}$.

   b) Es una función periódica: $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}(x)$ para todo $x \in A$. Es una función impar: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$.

   c) $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva y estrictamente creciente. Además:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg}(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}(x) = +\infty.$$

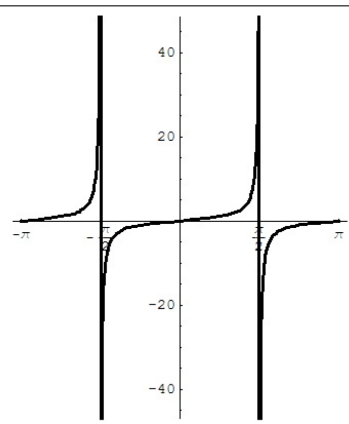

Figura 3.12: La función tangente

Algunos valores significativos de ls funciones seno, coseno y tangente son:

	0	$\pi/6(=30^o)$	$\pi/4(=45^o)$	$\pi/3(=60^o)$	$\pi/2(=90^o)$
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

10. **Funciones cosecante, secante y cotangente:** Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}(x) = 0$ son $x = k\pi$, con k número entero. Definimos el conjunto $B = \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y las funciones:

$$\operatorname{cosec} : B \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \text{ para todo } x \in B,$$
$$\sec : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \text{ para todo } x \in A,$$
$$\operatorname{cotg} : B \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \text{ para todo } x \in B.$$

11. **Función arcoseno:** Es la inversa para la composición de la función $\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$. Por tanto, es la función $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ definida de la siguiente manera: para cada $y \in [-1,1]$ se tiene que $\operatorname{arc}\operatorname{sen}(y)$ es el único ángulo en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cuyo seno coincide con y. Algunas propiedades son:

    a) Es biyectiva, continua y estrictamente creciente. Es impar.

    b) $\operatorname{arc}\operatorname{sen}(-1) = -\pi/2$, $\operatorname{arc}\operatorname{sen}(0) = 0$, $\operatorname{arc}\operatorname{sen}(1) = \pi/2$.

12. **Función arcocoseno:** Es la inversa para la composición de la función $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$. Por tanto, es la función $\operatorname{arc}\cos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ definida de la siguiente manera: para cada $y \in [-1,1]$ se tiene que $\operatorname{arc}\cos(y)$ es el único ángulo en el intervalo $[0,\pi]$ cuyo coseno coincide con y. Algunas propiedades de esta función son:

    a) Es biyectiva, continua y estrictamente decreciente.

    b) $\operatorname{arc}\cos(-1) = \pi$, $\operatorname{arc}\cos(0) = \pi/2$, $\operatorname{arc}\cos 1 = 0$.

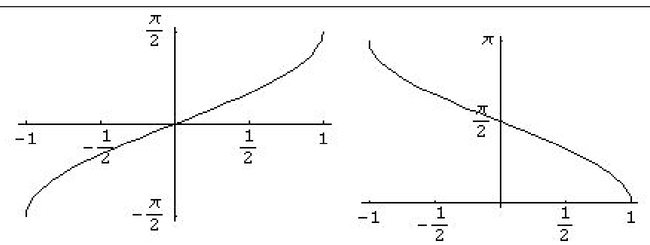

Figura 3.13: Las funciones arcoseno y arcocoseno

13. **Función arcotangente:** Es la inversa para la composición de la función $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$. Por tanto, es la función $\operatorname{arc}\operatorname{tg} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definida de la siguiente manera: para cada $y \in \mathbb{R}$ se tiene que $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(y)$ es el único ángulo en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ cuya tangente coincide con y.

    a) Es biyectiva, continua, estrictamente creciente, impar y acotada.

    b) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc}\operatorname{tg}(x) = -\pi/2$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(0) = 0$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\pm 1) = \pm\pi/4$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc}\operatorname{tg}(x) = \pi/2$.

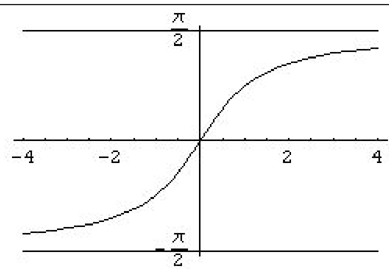

Figura 3.14: La función arcotangente

3.2.1. Identidades trigonométricas

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1, \quad \operatorname{tg}^2(x)+1=\sec^2(x), \quad \operatorname{cotg}^2(x)+1=\operatorname{cosec}^2(x).$$

Suma y diferencia de ángulos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x\pm y)&=\operatorname{sen}(x)\cos(y)\pm\cos(x)\operatorname{sen}(y),\\ \cos(x\pm y)&=\cos(x)\cos(y)\mp\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y),\\ \operatorname{tg}(x\pm y)&=\frac{\operatorname{tg}(x)\pm\operatorname{tg}(y)}{1\mp\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}.\end{aligned}$$

Ángulo doble

$$\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}(x)\cos(x), \quad \cos(2x)=2\cos^2(x)-1=\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x).$$

Ángulo mitad

$$\operatorname{sen}^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}=\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}.$$

3.3. Repaso de límites

3.3.1. Definición de límite y propiedades

Representamos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales. Una *sucesión de números reales* es una manera de hacer corresponder a cada número natural $n\in\mathbb{N}$ un único número real, que representamos por x_n, y que llamamos *término n-ésimo de la sucesión*. Por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ viene dada por la familia de números $\{1,1/2,1/3,1/4,\dots\}$. El término 5-ésimo de esta sucesión es $1/5$.

• Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ *tiende a un número real* L si podemos hacer que todos los términos n-ésimos de la sucesión se aproximen tanto como queramos al número L sin más que tomar n suficientemente grande. Esto lo representamos por $\{x_n\}\to L$ o por $\lim_{n\to+\infty}x_n=L$.

• Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ *tiende a* $+\infty$ si podemos hacer que todos los términos n-ésimos de la sucesión sean tan grandes como queramos sin más que tomar n suficientemente grande. Esto lo representamos por $\{x_n\}\to+\infty$ o por $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

• Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ *tiende a* $-\infty$ si podemos hacer que todos los términos n-ésimos de la sucesión sean tan pequeños como queramos sin más que tomar n suficientemente grande. Esto lo representamos por $\{x_n\} \to -\infty$ o por $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

Ejemplos: Consideremos las siguientes sucesiones:

(a) $x_n = 1/n$, es decir, la sucesión es $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$,

(b) $y_n = n^2$, es decir, la sucesión es $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$,

(c) $z_n = -n^3 + n^2 + 1$, es decir, la sucesión es $\{1, -3, -17, \dots\}$,

(d) $t_n = (-1)^n$, es decir, la sucesión es $\{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$.

Entonces se cumple que:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} z_n = -\infty,$$

mientras que $\{t_n\}$ no tiende a ningún valor real ni tampoco a $\pm\infty$.

A continuación procedemos a definir el concepto de límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un valor concreto x_0.

• Sea f una función definida alrededor de un punto x_0 (no es necesario que x_0 pertenezca al dominio de la función, es decir, podría no existir $f(x_0)$). Sea $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ésto significa que L puede representar a $+\infty$ o a $-\infty$, que no son números). Decimos que f *tiene límite* L cuando x tiende a x_0, y lo simbolizamos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

si *para cada* sucesión de números reales $\{x_n\}$ distintos todos ellos de x_0 y tal que $\{x_n\}$ tiende a x_0, se cumple que la correspondiente sucesión de imágenes $\{f(x_n)\}$ tiende a L. En lenguaje simbólico:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\{x_n\} \to x_0,\ x_n \neq x_0,\ \text{se cumple } \{f(x_n)\} \to L.$$

• Nota: resaltemos nuevamente que para hablar de límite de una función en un punto no es necesario que la función esté definida en el punto.

• Nota: el límite de una función en un punto no tiene por qué existir. Esto es lo que ocurre en $x_0 = 0$ con la función definida por $f(x) = -1$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x > 0$.

Hay ocasiones en las que una función tiene distintas expresiones a la izquierda y a la derecha de un punto x_0 (funciones definidas a trozos). Para estudiar estas situaciones se definen los límites laterales, que permiten estudiar el comportamiento de la función a ambos lados de x_0.

• Sea f una función definida a la izquierda de x_0. Decimos que el *límite lateral por la izquierda* de f en x_0 es L, y lo representamos

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L,$$

si para cada sucesión de números reales $\{x_n\}$ con $x_n < x_0$ y tal que $\{x_n\} \to x_0$, se cumple que $\{f(x_n)\} \to L$.

• Sea f una función definida a la derecha de x_0. Decimos que el *límite lateral por la derecha* de f en x_0 es L, y lo representamos

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L,$$

si para cada sucesión de números reales $\{x_n\}$ con $x_n > x_0$ y tal que $\{x_n\} \to x_0$, se cumple que $\{f(x_n)\} \to L$.

La idea de los límites laterales consiste en estudiar hacia dónde tiende una función cuando nos acercamos a un punto por ambos lados del mismo. El siguiente resultado relaciona la existencia y el valor del límite de una función en un punto con la existencia y el valor de los límites laterales de la función en dicho punto.

Teorema 3.1. *Sea f una función definida alrededor de un punto x_0 y $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Entonces se tiene:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_{0^-}} f(x) = L \text{ y } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L.$$

(el límite existe si y sólo si existen los dos límites laterales y son iguales).

Nota: los límites laterales en un punto x_0 hay que calcularlos cuando la función tiene distinta expresión analítica a la izquierda y a la derecha de x_0 (funciones a trozos). Cuando la función sólo está definida a un lado de x_0 hay que estudiar el límite lateral por ese lado y nada más.

Algunas propiedades de los límites (que son también válidas para límites laterales) son:

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$.
2. $\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x)$.
3. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\, g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))\ (\lim_{x\to x_0} g(x))$.
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, siempre que $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.
5. $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.

Ejemplo: Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ una función polinómica. Por la definición de límite y las propiedades, se obtiene fácilmente que:

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0),$$

es decir para calcular el límite de una función polinómica cuando $x \to x_0$, basta con evaluar la función polinómica en el punto x_0. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to -1}(-2x^2+5x-7) = -2(-1)^2+5(-1)-7 = -2-5-7 = -14.$$

Ejemplo: Sea $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ una función racional. Teniendo en cuenta el ejemplo anterior y las propiedades de los límites deducimos que si $q(x_0) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} r(x) = r(x_0) = \frac{p(x_0)}{q(x_0)},$$

es decir, para calcular el límite de una función racional en un punto que no sea una raíz del denominador, basta con evaluar la función en el punto. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-1}{2x+7} = \frac{-1}{7}.$$

3.3.2. Límites en el infinito

Hasta ahora hemos estudiado el comportamiento de una función en las cercanías de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Ahora estudiaremos el comportamiento que puede presentar una función cuando la variable x toma valores arbitrariamente grandes ($x \to +\infty$) o pequeños ($x \to -\infty$).

• Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Decimos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

si *para cada* sucesión de números reales $\{x_n\}$ tal que $\{x_n\} \to +\infty$ se cumple que $\{f(x_n)\} \to L$. Del mismo modo, diremos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L,$$

si para cada sucesión de números reales $\{x_n\}$ tal que $\{x_n\} \to -\infty$ se cumple que $\{f(x_n)\} \to L$. Los límites cuando $x \to \pm\infty$ cumplen las mismas propiedades que los límites cuando $x \to x_0$.

Nota: para calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ se suele proceder de este modo: se calcula $f(-x)$ y se calcula el $\lim_{x\to+\infty} f(-x)$. En otras palabras:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x).$$

3.3.3. Indeterminaciones. Técnicas básicas para calcular límites

Al calcular límites muchas veces nos encontramos con operaciones que involucran a 0 y $\pm\infty$. En algunas situaciones estas operaciones tienen resultados concretos pero en otras no. En este último caso estamos ante una *indeterminación*. El cálculo de límites está basado en técnicas que ayudan a resolver distintos tipos de indeterminaciones.

Algunas operaciones que involucran a $\pm\infty$ y tienen resultados concretos son las siguientes:

- $a(\pm\infty) = \pm\infty$ si $a > 0$, $a(\pm\infty) = \mp\infty$ si $a < 0$.
- $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$.
- $a + \infty = +\infty$, $a - \infty = -\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- $(+\infty)(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)(-\infty) = +\infty$, $(+\infty)(-\infty) = -\infty$, $(-\infty)(+\infty) = -\infty$.
- $\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$, $\frac{0}{\pm\infty} = 0$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, $\frac{a}{0} = \pm\infty$, para cualquier $a \neq 0$.
- $a^{+\infty} = +\infty$ si $a > 1$, $a^{+\infty} = 0$ si $0 < a < 1$.
- $a^{-\infty} = 0$ si $a > 1$, $a^{-\infty} = +\infty$ si $0 < a < 1$.
- $0^{+\infty} = 0$, $0^{-\infty} = \pm\infty$.

Las indeterminaciones (operaciones que involucran a 0 o $\pm\infty$ que no siempre dan el mismo resultado y que hay que estudiar en cada caso particular) son las siguientes:

- De tipo suma: $+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$.
- De tipo producto: $0\,(\pm\infty)$.
- De tipo cociente: $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- De tipo exponencial: $(\pm\infty)^0$, 0^0, $1^{\pm\infty}$.

Ejemplos: Calcularemos algunos límites sencillos siguiendo las reglas anteriores. Para resolver algunas indeterminaciones como $+\infty-\infty$ es muchas veces suficiente con realizar operaciones.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)=(+\infty-\infty)\text{ indeter.}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x^4}=\left(\frac{-1}{0^+}\right)=-\infty.$$

Ejemplos: Al calcular el límite de una función racional cuando x tiende a una raíz del denominador nos podemos encontrar con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. En este caso, factorizamos numerador y denominador por la regla de Ruffini para simplificar los factores causantes de la indeterminación.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x^2+1-2x}=\left(\frac{0}{0}\right)\text{ indeter.}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^4-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{0}{4}=0.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1.$$

Ejemplos: En los límites indeterminados en los que aparecen raíces la técnica más útil suele ser multiplicar numerador y denominador por las expresiones conjugadas de las raíces que intervengan.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)\text{ indeter.}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{2},$$

donde en la tercera igualdad hemos aplicado que $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Ahora estudiaremos como resolver la indeterminación $1^{\pm\infty}$. Recordemos que el número e es un número real irracional con las siguientes propiedades:

- $e\in(2,3)$. Concretamente, $e=2{,}71828\ldots$
- $e^0=1$, $e^{+\infty}=+\infty$, $e^{-\infty}=0$.

Las indeterminaciones del tipo $1^{\pm\infty}$ se suelen resolver con el siguiente resultado:

Criterio $1^{\pm\infty}$. Sean f y g dos funciones definidas alrededor de un punto x_0 (el criterio también es cierto si $x_0=\pm\infty$), de forma que $\lim_{x\to x_0}f(x)=1$. Entonces se verifica:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to x_0}g(x)\,(f(x)-1)}.$$

Ejemplo: Calcularemos un par de límites haciendo uso del criterio anterior.

$$\lim_{x\to 3^+}(2x-5)^{1/(x-3)}=(1^{+\infty})\text{ indeter.}=e^{\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}(2x-5-1)}=e^{\lim_{x\to 3^+}\frac{2x-6}{x-3}}.$$

Ahora, como

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x-6}{x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3^+}\frac{2(x-3)}{x-3}=2,$$

deducimos que

$$\lim_{x\to 3^+}(2x-5)^{1/(x-3)} = e^2,$$

con lo que concluye este caso. Otro ejemplo es el siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = (1^{+\infty}) = e^{\lim_{x\to+\infty} x(1+\frac{1}{x}-1)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}} = e.$$

Ahora resolveremos algunas indeterminaciones que se pueden presentar cuando tomamos límite al tender x a $\pm\infty$ en funciones polinómicas y racionales.

Ejemplo: Si $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ es una función polinómica de grado $n \geq 1$ ($a_n \neq 0$), entonces $\lim_{x\to+\infty} p(x)$ puede dar lugar a una indeterminación del tipo $+\infty-\infty$ o $-\infty+\infty$. Este límite se puede calcular siempre haciendo uso de la siguiente regla:

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty \quad \text{si } a_n > 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty \quad \text{si } a_n < 0.$$

Para calcular $\lim_{x\to-\infty} p(x)$ usamos la regla anterior junto con el hecho comentado hace algunas páginas de que $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} p(-x)$. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to-\infty}(-2x^3-3x+7) = \lim_{x\to+\infty}(-2(-x)^3-3(-x)+7) = \lim_{x\to+\infty}(2x^3+3x+7) = +\infty,$$

ya que el coeficiente líder del polinomio es $2 > 0$.

Ejemplo: Sea $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ una función racional. Esto significa que $p(x)$ es un polinomio de grado n, por ejemplo $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$ y $q(x)$ es un polinomio de grado m, por ejemplo $q(x) = b_mx^m + \cdots + b_0$. Por el ejemplo anterior, al intentar calcular

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$$

siempre se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Esta indeterminación se resuelve dividiendo numerador y denominador por la potencia más grande de x que aparezca en $p(x)$ y en $q(x)$. Este método da lugar a la siguiente regla (regla de los grados):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = L,$$

donde L se determina según los siguientes casos:

- $L = 0$ si $m > n$, es decir, el grado del denominador es más grande que el grado del numerador,
- $L = \pm\infty$ si $n > m$, es decir el grado del numerador es más grande que el del denominador. Además, el signo del ∞ coincide con el signo de a_n/b_m,
- $L = \frac{a_n}{b_n}$ si $n = m$, es decir, cuando numerador y denominador tienen el mismo grado, el límite coincide con el cociente entre los coeficientes líderes de ambos polinomios.

Veamos algunos ejemplos concretos de aplicación de la regla anterior.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+1}{x-7} = -\infty,$$

ya que el grado del numerador es mayor que el del denominador y $(-2)/1$ es negativo.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+7}{2x^3+3} = \frac{-1}{2},$$

ya que numerador y denominador tienen el mismo grado y los coeficientes líderes son -1 y 2, respectivamente.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0,$$

ya que el grado del denominador es mayor que el del numerador. Para calcular el límite de una función racional $r(x)$ cuando $x\to-\infty$ se usa $\lim_{x\to-\infty} r(x) = \lim_{x\to+\infty} r(-x)$, y se aplica la regla de los grados para calcular $\lim_{x\to+\infty} r(-x)$. Veamos algunos ejemplos concretos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2+1}{x-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2(-x)^2+1}{-x-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+1}{-x-7} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3+7}{2x^3+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-(-x)^3+7}{2(-x)^3+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+7}{-2x^3+3} = \frac{-1}{2}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{(-x)^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0.$$

Ejemplos: Ahora resolveremos algunas indeterminaciones cuando $x\to\pm\infty$ para funciones con radicales. Bastará con aplicar conjuntamente algunas de las técnicas ya aprendidas.

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = (+\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(-x)^4+1}}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}} = \sqrt{+\infty} = +\infty,$$

donde al final hemos usado la regla de los grados para calcular el límite de una función racional (la que está dentro de la raíz).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+2}}{x+1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1}\sqrt{x^3\left(1+\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x^3}\right)} = +\infty.$$

3.3.4. Estudio de las asíntotas de una función

En general, dada la gráfica de una función, una *asíntota* es una recta a la cual dicha gráfica se aproxima cada vez más. Ahora discutiremos con detalle y de forma más rigurosa los diferentes casos que se pueden presentar.

• Diremos que la recta $\{x = x_0\}$ es una *asíntota vertical* de una función $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ (el límite puede ser lateral). Los puntos x_0 en los que una función presenta una asíntota de este tipo hay que buscarlos entre aquellos que no pertenecen al dominio $Dom(f)$ pero a los que nos podemos aproximar desde puntos de $Dom(f)$. Para discutir la posición de la gráfica con respecto de la asíntota estudiamos, cuando sea posible, los límites laterales de f en x_0.

Ejemplo: La función $f(x) = 1/x^2$ presenta una asíntota vertical en el punto $x_0 = 0$ puesto que $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Además, la gráfica de la función se pierde por $+\infty$ a ambos lados de la asíntota.

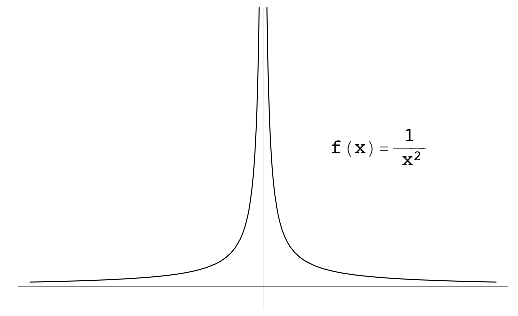

Figura 3.15: Un ejemplo de asíntota vertical

• También puede ocurrir que la gráfica de una función $f(x)$ se vaya acercando a una recta no vertical. Diremos que una recta $y = mx+n$ es una *asíntota oblicua* de una función $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx-n) = 0$. Para averiguar si una función tiene asíntotas oblicuas se sigue la siguiente regla práctica:

Regla práctica: Supongamos que la función $f(x)$ cumple:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$,

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = n \in \mathbb{R}$.

Entonces, $f(x)$ se aproxima cuando $x \to +\infty$ a la recta $y = mx+n$, que es una asíntota oblicua de f. Esta regla también es cierta si sustituimos $+\infty$ por $-\infty$. Para discutir la posición de la gráfica $y = f(x)$ con respecto a una asíntota oblicua $y = mx+n$, hay que estudiar el signo que tiene la expresión $f(x)-mx-n$ cuando $x \to \pm\infty$. Si este signo es positivo la función se queda por encima de la asíntota mientras que si es negativo se queda por debajo.

Nota: como caso particular, cuando la recta $y = mx+n$ tiene pendiente 0, es decir, $m = 0$, entonces decimos que $f(x)$ presenta en $y = n$ una asíntota horizontal.

Ejemplo: La función $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$ tiene dos asíntotas horizontales. En efecto, es bien sabido que $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}(x) = \pi/2$ mientras que $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg}(x) = -\pi/2$. La función se queda por debajo de la asíntota $\{y = \pi/2\}$ y por encima de la asíntota $\{y = -\pi/2\}$.

3.4. Repaso de continuidad

Intuitivamente las funciones continuas son aquellas cuyas gráficas no presentan saltos ni interrupciones. El concepto riguroso de función continua en un punto es el siguiente.

Definición: Se dice que una función f es *continua* en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si se cumplen tres condiciones:

(i) Existe $f(x_0)$, es decir, $x_0 \in Dom(f)$,

(ii) Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y es finito,

(iii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

• Nota: a diferencia del concepto de límite, la definición de continuidad exige que la función tiene que estar definida en el punto.

• Nota: la propiedad (iii) nos indica que los límites de funciones continuas se calculan evaluando directamente la función en el punto.

Definición: Se dice que una función f es *discontinua* en $x_0 \in \mathbb{R}$ si no es continua en x_0. Esto significa que f no cumple alguna de las 3 condiciones en la definición de continuidad. Según sea la propiedad que no se cumple clasificamos las discontinuidades en:

- *discontinuidad esencial* cuando no se cumple (ii).
- *discontinuidad evitable* cuando se cumple (ii) pero falla (i) o (iii).

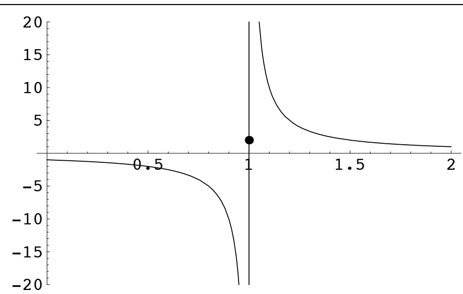

Figura 3.16: Una discontinuidad esencial

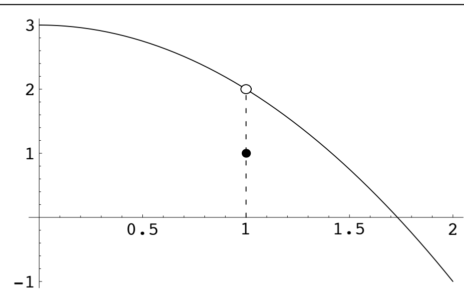

Figura 3.17: Una discontinuidad evitable

• Nota: un caso particular de discontinuidad esencial ocurre cuando los límites laterales de f en x_0 existen, son finitos, pero son distintos. En este caso hablamos de *discontinuidad de salto finito*.

• Nota: el nombre de discontinuidad evitable se debe a que podemos "reparar la discontinuidad". Concretamente, si f presenta una discontinuidad evitable en x_0, entonces la función f^*, definida por $f^*(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ y por

$$f^*(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x),$$

es una función continua en x_0. En una discontinuidad esencial no es posible la construcción de f^* al no existir $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Definición: Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Se dice que una función f es continua en I si f es continua en cada punto $x_0 \in I$.

Propiedades de las funciones continuas: Supongamos que f y g son funciones continuas en un intervalo I. Entonces:

1. $f+g$ es continua en I.
2. λf es continua en I, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $f\,g$ es continua en I.
4. $\frac{f}{g}$ es continua en I, salvo en los puntos $x \in I$ tales que $g(x) = 0$.
5. Si $f(x) > 0$ para cada $x \in I$, entonces f^g es continua en I.

6. La composición $g \circ f$ es continua en I.

Ejemplos: Toda función polinómica $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es continua en $\mathbb{R}$ al ser suma y producto de funciones continuas. Toda función racional $r(x) = p(x)/q(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{x : q(x) = 0\}$. Las funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son continuas en sus dominios de definición.

Ejemplo: Estudiar la continuidad en el punto $x_0 = 0$ de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{x}}$ si $x < 0$, $f(0) = 1$, y $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x}$ si $x > 0$.

Solución: Tendremos que comprobar si se cumplen las condiciones de la definición de continuidad. En primer lugar, $0 \in Dom(f)$ y, de hecho, $f(0) = 1$ por definición de f. Ahora debemos estudiar si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y es finito. Como a ambos lados de $x_0 = 0$ la función tiene distintas expresiones analíticas entonces debemos calcular los límites laterales. Tenemos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1)^{\frac{1}{x}} = (1^{-\infty}) \text{ indeter.} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(x^2+1-1)} = e^{\lim_{x\to 0} x} = 1,$$

donde hemos aplicado el criterio $1^{\pm\infty}$. Por otro lado:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 0.$$

Como los límites laterales son distintos se sigue que no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y, por tanto, f presenta en $x_0 = 0$ una discontinuidad esencial. Como los límites laterales son finitos estamos, más concretamente, ante una discontinuidad de salto finito.

Ejemplo: Estudiar la continuidad en el punto $x_0 = -1$ de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x^2+1)$ si $x \neq -1$, $f(-1) = 2008$.

Solución: Procedemos como en el caso anterior. En primer lugar existe $f(-1)$ y su valor es 2008. Veamos si existe $\lim_{x\to -1} f(x)$. En este caso la expresión de la función a ambos lados de $x_0 = -1$ es la misma, por lo que no tenemos que calcular límites laterales. Se tiene:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} (x^2+1) = (-1)^2 + 1 = 2.$$

Por tanto el límite existe y es finito. Por último, como $f(-1) = 2008$ y $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$, deducimos que f presenta una discontinuidad evitable en $x_0 = -1$.

Terminaremos este tema con tres resultados donde se ponen de manifiesto algunas propiedades relevantes de las funciones continuas.

Teorema 3.2 (Conservación del signo)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua sobre un intervalo abierto I, y x_0 es un punto de I en el que $f(x_0) \neq 0$, entonces existe un entorno abierto $B(x_0, r)$ en el que el signo de $f(x)$ es el mismo signo que el de $f(x_0)$.*

Teorema 3.3 (Teorema de los valores intermedios)**.** *Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$ de forma que $f(a) \neq f(b)$. Entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir, para cada y en el intervalo determinado por $f(a)$ y $f(b)$, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = y$.*

Una de las aplicaciones más conocidas del resultado anterior es la siguiente:

Teorema 3.4 (Teorema de los ceros de Bolzano)**.** *Sea f una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$. Si se cumple que $f(a)f(b) < 0$ (es decir, el signo de $f(a)$ es distinto al signo de $f(b)$), entonces existe un valor $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

La interpretación geométrica del Teorema de Bolzano es la siguiente: una gráfica continua en el plano que pasa del semiplano superior al inferior (o al revés) tiene que cortar en algún punto al eje x.

El Teorema de Bolzano se puede aplicar para asegurar la existencia de solución de ciertas ecuaciones difíciles de resolver por métodos directos.

Ejemplo: La ecuación $x + e^x = 7$ no se puede resolver directamente (inténtese despejar x) pero podemos demostrar la existencia de soluciones si procedemos de la siguiente forma. Definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + e^x - 7$. Esta función es continua en $\mathbb{R}$ al ser suma de funciones continuas. Además, es claro que las soluciones de la ecuación $x + e^x = 7$ coinciden con los valores de x para los que $f(x) = 0$. De esta forma, trasladamos el problema de encontrar una solución de la ecuación $x + e^x = 7$ al problema de encontrar un punto $x \in \mathbb{R}$ donde $f(x) = 0$. Este punto trataremos de encontrarlo dentro de un intervalo $[a,b]$ donde la función f cumpla las hipótesis del Teorema de Bolzano. Por ejemplo, se tiene $f(0) = 0 + e^0 - 7 = -6 < 0$, mientras que $f(3) = 3 + e^3 - 7 > 3 + 8 - 7 = 4 > 0$. Así, podemos aplicar el Teorema de Bolzano a f en el intervalo $[0,3]$ para asegurar la existencia de un número $c \in (0,3)$ donde $f(c) = 0$, es decir $c + e^c = 7$, lo que implica que c es una solución de la ecuación original. En principio, no podemos calcular c explícitamente.