Tema 2

Continuidad y derivación de funciones reales de variable real

2.1. Funciones. Definiciones básicas. Operaciones con funciones

2.1.1. Definiciones

Una *función real de (una) variable real* es una aplicación $f : A \to B$ donde A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, es decir, es una regla que hace corresponder a cada $x \in A$ un único elemento $f(x) \in B$, que se llama *imagen* de x mediante f.

- Se llama *expresión analítica de una función* a la fórmula matemática que nos indica las operaciones que debemos realizar con el elemento $x \in A$ para calcular $f(x)$.
- El conjunto A sobre el que la función está definida recibe el nombre de *dominio* de f. Cuando no se especifique el dominio de una función se entenderá que éste es el subconjunto más grande de $\mathbb{R}$ en el que la expresión analítica que define a la función tiene sentido. Lo denotamos $Dom(f)$.
- Se llama *imagen* o *recorrido* de f al conjunto, que representaremos por $f(A)$ o por $Im(f)$, cuyos elementos son las imágenes de los puntos de A mediante f, es decir:

  $$f(A) = Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : \text{ existe } x \in A \text{ con } f(x) = y\}.$$

  Una manera práctica de decidir si un punto y está o no en $Im(f)$ consiste en intentar resolver la ecuación $f(x) = y$, siendo x la incógnita de la ecuación. Si somos capaces de despejar la x en función de y con $x \in A$, entonces $y \in Im(f)$; de lo contrario $y \notin Im(f)$.

- Se llama *gráfica* de f a la curva $y = f(x)$ del plano $\mathbb{R}^2$, es decir:

  $$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}.$$

  Normalmente representaremos los puntos de A sobre el eje x (o eje de abcisas) y sus imágenes $f(x)$ en el eje y (o eje de ordenadas). El punto $(x_0, f(x_0))$ se obtiene entonces como la intersección de la recta vertical $\{x = x_0\}$ y la recta horizontal $\{y = f(x_0)\}$. La gráfica de f es la curva en el plano que se forma cuando unimos todos estos puntos. Nótese que esta curva corta a cada línea vertical a lo sumo una vez por la definición de función. Además, un número y_0 pertenecerá a la imagen de f si la recta horizontal $\{y = y_0\}$ corta a la gráfica de f al menos una vez.

Ejemplo: Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ su dominio es $\mathbb{R}$. Su expresión analítica es la fórmula $y = x^2$, que nos indica como calcular la imagen de cualquier elemento x. El recorrido de esta función estará formada por aquellos $y \in \mathbb{R}$ tales que la ecuación $x^2 = y$ tiene solución en la incógnita x. Ahora, si queremos despejar la x en la ecuación $x^2 = y$, necesitamos hacer la raíz cuadrada de y, para lo que se precisa que $y \geq 0$. En tal caso, al despejar tendríamos $x = \pm\sqrt{y}$. Concluimos que $Im(f) = [0, +\infty)$. Por otro lado, es bien sabido que la gráfica de f es una parábola cuyo vértice es el punto $(0,0)$.

Ejemplo: Para la función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ su dominio está especificado y es el intervalo abierto y acotado $(0,1)$. Su expresión analítica es la fórmula $y = 1/x$, que nos indica como calcular la imagen de cualquier elemento x. Por otro lado, como no se puede dividir por cero, el conjunto más grande donde la función está bien definida es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$. La gráfica de f es el trozo de la hipérbola $xy = 1$ cuando $x \in (0,1)$.

• Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ está *acotada superiormente* si su gráfica se queda siempre por debajo de una recta horizontal, es decir, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq K$ para cada $x \in A$. Se dice que f está *acotada inferiormente* si su gráfica se queda siempre por encima de una recta horizontal, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$ para cada $x \in A$. Se dice que f está *acotada* si lo está superior e inferiormente. Geométricamente, ésto significa que la gráfica de f está contenida dentro de una banda horizontal del plano, equivalentemente, el recorrido de la función está contenido en un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

Ejemplos: La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ no está acotada ni superior ni inferiormente, ya que su recorrido es todo $\mathbb{R}$. La función $g(x) = x^2 + 1$ está acotada inferiormente por 1 pero no está acotada superiormente ya que toma valores arbitrariamente grandes. La función $g(x) = 1/(x^2 + 1)$ está acotada superiormente por 1 ya que el denominador está acotado inferiormente por 1. Además, está también acotada inferiormente ya que toma siempre valores positivos.

• Se dice que una función f es *creciente* si para cualesquiera $x < y$ se cumple que $f(x) \leq f(y)$. Geométricamente, ésto significa que la gráfica de f siempre sube o se mantiene constante. Se dice que f es *estrictamente creciente* si para cualesquiera $x < y$ se cumple $f(x) < f(y)$ (siempre sube).

• Se dice que una función f es *decreciente* si para cualesquiera $x < y$ se cumple que $f(x) \geq f(y)$. Geométricamente, ésto significa que la gráfica de f siempre baja o se mantiene constante. Se dice que f es *estrictamente decreciente* si para cualesquiera $x < y$ se cumple $f(x) > f(y)$ (siempre baja).

Ejemplos: La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ es una función creciente: su gráfica es la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,1)$. La función $f(x) = -x$ es decreciente: su gráfica es la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,-1)$. La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ no es creciente ni decreciente.

• Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es *par* si para cada x se cumple que $f(-x) = f(x)$. Geométricamente, ésto significa que la gráfica de f es simétrica respecto del eje de ordenadas.

• Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es *impar* si para cada x se cumple que $f(-x) = -f(x)$. Geométricamente, ésto significa que la gráfica de f es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Ejemplos: La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es una función par ya que $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. La función $g(x) = x^3$ es una función impar, ya que $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$. La función $h(x) = 2x + 7$ no es ni par ni impar.

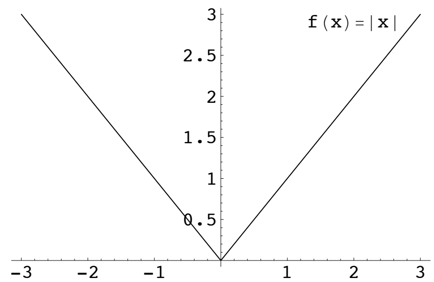


Figura 2.1: La función valor absoluto

• Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice que es *periódica* si existe un valor $T>0$ de forma que $f(x+T)=f(x)$ para cada $x\in\mathbb{R}$. Geométricamente, ésto significa que la gráfica de f consta de un trozo fundamental que se va repitiendo a lo largo de todo el eje x. Esto ocurre con las funciones trigonométricas: por ejemplo $f(x)=\text{sen}(x)$ y $g(x)=\cos(x)$ son funciones periódicas.

A continuación proporcionamos formas de fabricar nuevas funciones a partir de dos dadas.

• Si $f,g:A\to\mathbb{R}$ son dos funciones con el mismo dominio, se definen la *suma*, el *producto* y el *cociente* de f y g, como las funciones $f+g, f\cdot g:A\to\mathbb{R}$ y $(f/g):A-\{x\in A: g(x)=0\}\to\mathbb{R}$ dadas por:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (f\cdot g)(x)=f(x)\,g(x),\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},$$

donde la última expresión sólo tiene sentido cuando $g(x)\neq 0$. Se define el producto de un número $\lambda\in\mathbb{R}$ por una función $f:A\to\mathbb{R}$ como la función $\lambda\cdot f:A\to\mathbb{R}$ dada por $(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\, f(x)$. Se puede demostrar que el conjunto de todas las funciones definidas en A es un *espacio vectorial* sobre $\mathbb{R}$ con la suma y el producto por números definido anteriormente.

Ejemplo: Supongamos que tenemos las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=\text{sen}(x)$ y $g(x)=x$. La suma de f y g es la función $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $(f+g)(x)=\text{sen}(x)+x$. El producto de f y g es la función $f\cdot g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $(f\cdot g)(x)=x\,\text{sen}(x)$. El cociente de f y g es la función $f/g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por $(f/g)(x)=(\text{sen}(x))/x$ (obsérvese que hemos tenido que suprimir del dominio los puntos que anulan al denominador para que la expresión resultante tenga sentido). Por último $9\cdot f$ es la función $9\cdot f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $(9\cdot f)(x)=9\,\text{sen}(x)$.

• Si f y g son dos funciones, definimos la *composición* de g y f, que representaremos por $g\circ f$, como la función $(g\circ f)(x)=g(f(x))$. La forma en la que trabaja la nueva función $g\circ f$ es la siguiente: para cada x, primero hace trabajar f sobre x, de modo que calculamos $f(x)$; a continuación trabaja la función g pero no sobre x, sino sobre el valor $f(x)$ previamente calculado.

Ejemplo: La composición de funciones no es una operación conmutativa en general. Esto lo podemos ver en el siguiente ejemplo: sean $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=x-3$. Se tiene:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+1)=(x^2+1)-3=x^2-2,$$

mientras que:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-3)=(x-3)^2+1=x^2+9-6x+1=x^2-6x+10.$$

2.1.2. Inversa para la composición de una función

Normalmente, se suele entender que la *inversa* de una función f es la función $1/f$ que definimos más arriba y que trabaja como $(1/f)(x) = 1/f(x)$. No obstante, existe otro concepto de función inversa que puede llevar a confusión con el anterior al llamarse de la misma manera. Para introducir este segundo concepto de inversa necesitamos unas definiciones previas.

• Sea $f : A \to B$ una aplicación entre dos subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se dice que f es *inyectiva* si no toma dos veces el mismo valor, es decir, si $x, y \in A$ y $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$. Geométricamente, ésto significa que cada recta horizontal del plano corta a la gráfica de f en a lo sumo un punto.

• Se dice que una aplicación $f : A \to B$ es *sobreyectiva* si cada elemento de B es la imagen mediante f de algún elemento de A, es decir, $Im(f) = B$. Dicho de otra manera, la ecuación $f(x) = y$ siempre tiene solución en $x \in A$, sea cual sea el número real $y \in B$. Geométricamente, ésto significa que cada recta horizontal del plano con altura $y \in B$ corta a la gráfica de f por lo menos en un punto.

• Se dice que $f : A \to B$ es *biyectiva* si es a la vez inyectiva y sobreyectiva. Geométricamente, ésto significa que cada recta horizontal del plano con altura $y \in B$ corta a la gráfica de f en exactamente un punto; equivalentemente, cada número real $y \in B$ es la imagen de exactamente un elemento $x \in A$ mediante f. Dicho de otra manera, para cada real $y \in B$ existe una sola solución de la ecuación $f(x) = y$ con $x \in A$. A esta única solución que, evidentemente, depende de y, la representaremos por $x = f^{-1}(y)$. A la función $f^{-1} : B \to A$ definida por $f^{-1}(y) =$ único valor $x \in A$ tal que $f(x) = y$, la llamaremos la *función inversa para la composición* de f.

Importante: La función inversa para la composición f^{-1} que acabamos de definir NO COINCIDE con $1/f$, es decir, no es lo mismo $f^{-1}(y)$ que $1/f(y)$.

Ejemplo 1: Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 7$. La gráfica de f es la recta que pasa por los puntos $(0,7)$ y $(-3,1)$ (dibujarla). Por tanto, es una función biyectiva, ya que cada recta horizontal del plano corta a la gráfica de f en exactamente un punto. Para calcular la inversa ponemos $y = 2x + 7$, y despejamos x en función de y. Al hacerlo se obtiene $x = (y-7)/2$, con lo que $f^{-1}(y) = (y-7)/2$, cuya gráfica es otra recta (dibujarla). Obsérvese que la gráficas de f y de f^{-1} son simétricas con respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrante del plano).

Ejemplo 2: Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, cuya gráfica es una parábola con vértice en el origen de coordenadas. Es claro que f no es inyectiva ya que cada recta horizontal $\{y = K\}$ con $K > 0$ corta a la gráfica dos veces. Esto es un reflejo de que la ecuación $x^2 = y$ tiene siempre dos soluciones cuando $y > 0$, concretamente, $x = \pm\sqrt{y}$. Tampoco es sobreyectiva, porque cada recta $\{y = K\}$ con $K < 0$ no corta a la gráfica de f, o lo que es lo mismo, la ecuación $x^2 = y$ no tiene solución siempre que $y < 0$.

¿Cómo obtener a partir de esta función otra que sea biyectiva? Para arreglar el problema de la falta de inyectividad tenemos que restringir el dominio de f a un subconjunto donde la función no repita valores; ésto ocurre por ejemplo en $[0,+\infty)$ y en $(-\infty,0]$. Así, la función $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ sí es inyectiva (nos estamos quedando con la rama derecha de la parábola) pero sigue sin ser sobreyectiva porque la gráfica no corta a las rectas horizontales $\{y = K\}$ con $K < 0$. Para arreglar la falta de sobreyectividad se sustituye el conjunto de llegada de la función por el recorrido de la función. En este caso, es claro que el recorrido de g es el conjunto $[0,+\infty)$ (todo número real no negativo es el cuadrado de su raíz cuadrada). Concluimos que la función $h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ dada por $h(x) = x^2$ es biyectiva. Para calcular su inversa para la composición escribimos $y = x^2$, y despejamos x en función de y. Deducimos que $x = \sqrt{y}$, con lo que la inversa para la composición de h es la función $h^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

En definitiva, si queremos construir una función biyectiva a partir de otra que no lo es, debemos restringir el dominio de la función para hacerla inyectiva, y el conjunto de llegada por el recorrido de la función para hacerla sobreyectiva. Con estas restricciones, podemos calcular la inversa para la composición de la función escribiendo $y = f(x)$, y despejando la variable x en función de y.

• Si f es biyectiva y f^{-1} es su inversa para la composición, entonces es claro de la definición de f^{-1} que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ y $(f \circ f^{-1})(y) = y$. Además, las gráficas de f y de f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

2.1.3. Idea intuitiva de límites y continuidad

Hablaremos con más detalle y rigor de los conceptos de límite y continuidad en las secciones tercera y cuarta de este tema. Aquí nos conformaremos con dar ideas intuitivas que nos sirvan para comprender estas nociones y los ejemplos que expondremos en la sección siguiente.

• Sea f una función definida alrededor de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ (no hace falta que f esté definida en x_0, pero sí alrededor de x_0). Sea $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ésto significa que L puede representar a $+\infty$ o a $-\infty$, que no son números). Diremos que *f tiene límite L cuando x tiende a x_0* si cada vez que le damos a la variable independiente x valores muy cercanos a x_0 entonces los valores de la función $f(x)$ están muy cercanos del valor L. En tal caso escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Diremos que *f tiene límite L cuando x tiende a $+\infty$* (resp. $-\infty$) si cada vez que le damos a la variable independiente x valores muy grandes (resp. muy pequeños) entonces los valores de la función $f(x)$ están muy cercanos del valor L. En tal caso escribimos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \;\; (resp. \lim_{x \to -\infty} f(x) = L).$$

• Intuitivamente una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida sobre un intervalo I es continua si la gráfica es una curva que no presenta saltos ni interrupciones, es decir, para dibujarla no tenemos que levantar el bolígrafo del papel.

2.2. Repaso de las funciones elementales

Esta sección está dedicada a recordar algunas funciones básicas y sus propiedades.

1. **Función potencial de exponente** b ($b \neq 0$): Estas funciones están definidas en todo $\mathbb{R}$ cuando $b \in \mathbb{N}$. Para b arbitrario, a veces el dominio de definición es $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (por ejemplo para $b = -1$), otras es $\mathbb{R}_0^+$ (por ejemplo, para $b = 1/2$), y otras es $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ (por ejemplo, para $b = -1/2$). Aquí nos restringiremos a estudiar el comportamiento de la función en $\mathbb{R}^+$. Por tanto consideramos la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^b$. Propiedades:

   a) f es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ y continua.

   b) $(xy)^b = x^b y^b$, $(x/y)^b = x^b / y^b \quad (x^b)^c = x^{bc}$.

   c) Si $b > 0$, entonces f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$, $\lim_{x \to 0} x^b = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty$.

   d) Si $b < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$, $\lim_{x \to 0} x^b = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} x^b = 0$.

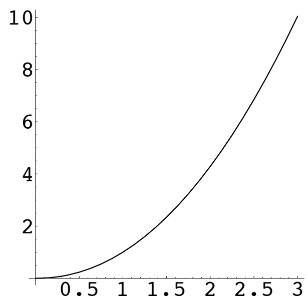


Figura 2.2: Función potencial con $b > 0$

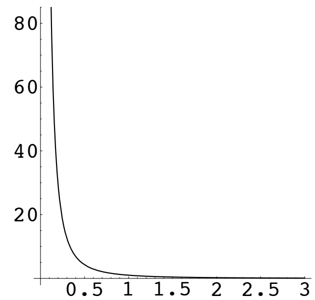


Figura 2.3: Función potencial con $b < 0$

2. **Funciones polinómicas:** Una *función polinómica* de grado n es una función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya expresión analítica es de la forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde todos los a_i son números reales, todos los exponentes son naturales, y $a_n \neq 0$. El coeficiente a_n se llama coeficiente líder. Los polinomios de grado 0 son de la forma $p(x) = a_0$, es decir son funciones constantes. Los polinomios de grado 1 son de la forma $p(x) = a_1 x + a_0$, cuyas gráficas son rectas con pendiente $a_1 \neq 0$ que pasan por el punto $(0, a_0)$. Los polinomios de grado 2 son de la forma $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, y es bien sabido que sus gráficas son parábolas. Las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$.

3. **Funciones racionales:** Llamaremos *función racional* a toda función $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas. Como no se puede dividir por cero, el dominio de una función racional es $Dom(r) = \mathbb{R} - \{x : q(x) = 0\}$. Son funciones continuas en cada intervalo de su dominio.

4. **Función exponencial:** Es la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$ (el número e es un número irracional cuyo valor aproximado es 2,71828). Propiedades de esta función:

   a) f es continua en todo $\mathbb{R}$, biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, y estrictamente creciente.

   b) f está acotada inferiormente por 0; de hecho, $e^x > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

   c) $e^0 = 1, e^{x+y} = e^x e^y, e^{x-y} = e^x / e^y, (e^x)^y = e^{xy}$.

   d) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

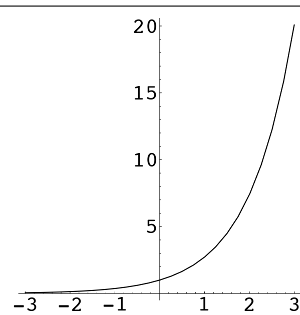


Figura 2.4: La función exponencial

5. **Función logaritmo neperiano:** Es la función $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ que coincide con la inversa para la composición de la función exponencial. Esto significa que $\ln(y) =$ único número real x tal que $e^x = y$. Algunas propiedades de esta función son las siguientes:

   a) Es continua en $\mathbb{R}^+$, biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, y estrictamente creciente.

   b) Es una función no acotada superior ni inferiormente; de hecho, su imagen es $\mathbb{R}$.

   c) $\ln 1 = 0, \ln e = 1, \ln e^k = k$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$, $\ln(x^y) = y \ln x$.

   d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

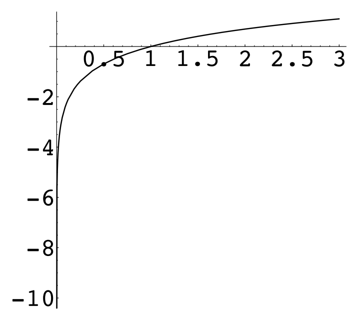


Figura 2.5: La función logaritmo neperiano

6. **Función exponencial de base $a > 0$ $(a \neq 1)$:** Es la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Algunas propiedades de esta función son las siguientes:

   a) f es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, continua, y acotada inferiormente por 0; de hecho, $a^x > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. No está acotada superiormente.

   b) $a^0 = 1$, $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{x-y} = a^x / a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$.

   c) Si $a > 1$, entonces f es estrictamente creciente, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

   d) Si $0 < a < 1$, entonces f es estrictamente decreciente, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

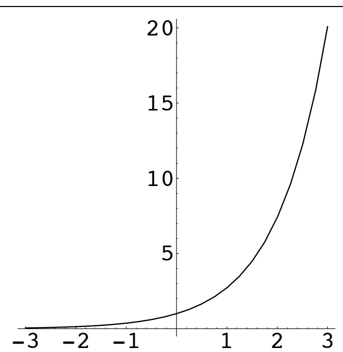


Figura 2.6: Función exponencial con $a > 1$

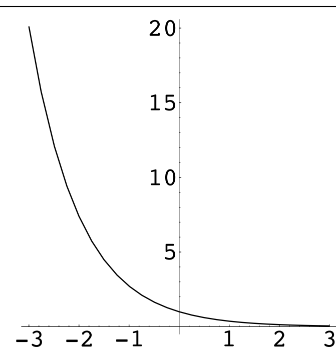


Figura 2.7: Función exponencial con $0 < a < 1$

7. **Función logarítmica de base** $a > 0$ ($a \neq 1$): Es la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Coincide con la inversa para la composición de la función exponencial de base a. Algunas de sus propiedades son:

   a) Es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y continua. No está acotada ni superior ni inferiormente.

   b) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a(x^y) = y \log_a x$.

   c) Si $a > 1$, $\log_a$ es estrictamente creciente, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.

   d) Si $0 < a < 1$, $\log_a$ es estrictamente decreciente, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.

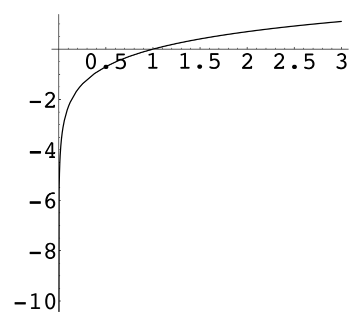


Figura 2.8: Función logaritmo con $a > 1$

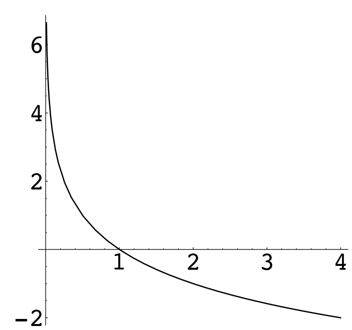


Figura 2.9: Función logaritmo con $0 < a < 1$

8. **Funciones seno y coseno:** Son las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}, \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

   a) Ambas son continuas en todo $\mathbb{R}$. Sus recorridos coinciden con el intervalo $[-1, 1]$, por lo que son funciones acotadas. No tienen límite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.

   b) Son periódicas, ya que: $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c) $\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ es biyectiva y estrictamente creciente.

   d) $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ es biyectiva y estrictamente decreciente.

   e) $\operatorname{sen}(x) = 0$ si y sólo si $x = k\pi$ con k un número entero, $\operatorname{sen}(x) = 1$ si y sólo si $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con k un número entero, $\operatorname{sen}(x) = -1$ si y sólo si $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con k un número entero.

   f) $\cos(x) = 0$ si y sólo si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con k un número entero, $\cos(x) = 1$ si y sólo si $x = 2k\pi$ con k un número entero, $\cos(x) = -1$ si y sólo si $x = (2k+1)\pi$ con k un número entero.

   g) Seno es impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Coseno es par: $\cos(-x) = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

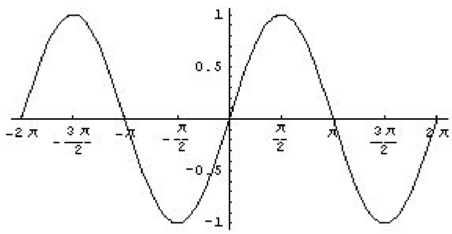


Figura 2.10: La función seno

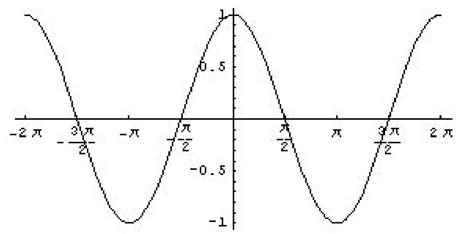


Figura 2.11: La función coseno

9. **Función tangente:** Es la función dada por el cociente entre la función seno y la función coseno. Por tanto, estará bien definida sólo en los puntos donde $\cos(x) \neq 0$. Las soluciones de la ecuación $\cos(x) = 0$ son $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} =$ conjunto de los números enteros). Definimos la función tangente $\operatorname{tg} : A \to \mathbb{R}$ como $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, para todo $x \in A$, siendo $A = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

   a) Es continua en cada intervalo de A y no está acotada ni superior ni inferiormente. Su recorrido es $\mathbb{R}$.

   b) Es una función periódica: $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}(x)$ para todo $x \in A$. Es una función impar: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$.

   c) $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva y estrictamente creciente. Además:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg}(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}(x) = +\infty.$$

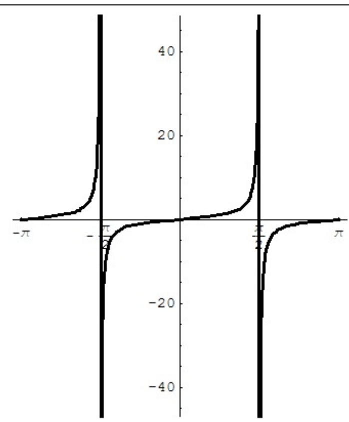


Figura 2.12: La función tangente

Algunos valores significativos de ls funciones seno, coseno y tangente son:

	0	$\pi/6(=30^o)$	$\pi/4(=45^o)$	$\pi/3(=60^o)$	$\pi/2(=90^o)$
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

10. **Funciones cosecante, secante y cotangente:** Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}(x) = 0$ son $x = k\pi$, con k número entero. Definimos el conjunto $B = \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y las funciones:

$$\operatorname{cosec} : B \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \text{ para todo } x \in B,$$
$$\sec : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \text{ para todo } x \in A,$$
$$\operatorname{cotg} : B \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \text{ para todo } x \in B.$$

11. **Función arcoseno:** Es la inversa para la composición de la función $\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$. Por tanto, es la función $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ definida de la siguiente manera: para cada $y \in [-1,1]$ se tiene que $\operatorname{arc}\operatorname{sen}(y)$ es el único ángulo en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cuyo seno coincide con y. Algunas propiedades son:

    a) Es biyectiva, continua y estrictamente creciente. Es impar.

    b) $\operatorname{arc}\operatorname{sen}(-1) = -\pi/2$, $\operatorname{arc}\operatorname{sen}(0) = 0$, $\operatorname{arc}\operatorname{sen}(1) = \pi/2$.

12. **Función arcocoseno:** Es la inversa para la composición de la función $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$. Por tanto, es la función $\operatorname{arc}\cos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ definida de la siguiente manera: para cada $y \in [-1,1]$ se tiene que $\operatorname{arc}\cos(y)$ es el único ángulo en el intervalo $[0,\pi]$ cuyo coseno coincide con y. Algunas propiedades de esta función son:

    a) Es biyectiva, continua y estrictamente decreciente.

    b) $\operatorname{arc}\cos(-1) = \pi$, $\operatorname{arc}\cos(0) = \pi/2$, $\operatorname{arc}\cos 1 = 0$.

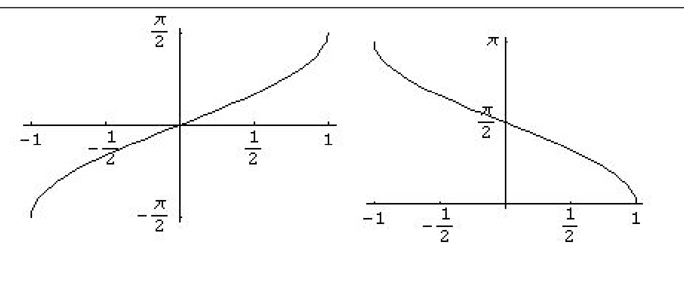


Figura 2.13: Las funciones arcoseno y arcocoseno

13. **Función arcotangente:** Es la inversa para la composición de la función $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$. Por tanto, es la función $\operatorname{arc}\operatorname{tg} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definida de la siguiente manera: para cada $y \in \mathbb{R}$ se tiene que $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(y)$ es el único ángulo en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ cuya tangente coincide con y.

    a) Es biyectiva, continua, estrictamente creciente, impar y acotada.

    b) $\operatorname{lím}_{x\to-\infty} \operatorname{arc}\operatorname{tg}(x) = -\pi/2$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(0) = 0$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\pm 1) = \pm\pi/4$, $\operatorname{lím}_{x\to+\infty} \operatorname{arc}\operatorname{tg}(x) = \pi/2$.

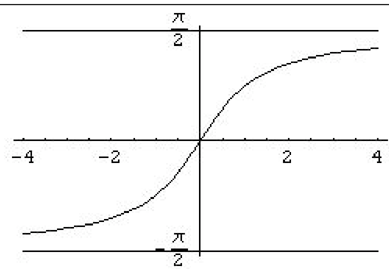


Figura 2.14: La función arcotangente

2.2.1. Identidades trigonométricas

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1, \quad \operatorname{tg}^2(x)+1=\sec^2(x), \quad \operatorname{cotg}^2(x)+1=\operatorname{cosec}^2(x).$$

Suma y diferencia de ángulos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x\pm y)&=\operatorname{sen}(x)\cos(y)\pm\cos(x)\operatorname{sen}(y),\\ \cos(x\pm y)&=\cos(x)\cos(y)\mp\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y),\\ \operatorname{tg}(x\pm y)&=\frac{\operatorname{tg}(x)\pm\operatorname{tg}(y)}{1\mp\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}.\end{aligned}$$

Ángulo doble

$$\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}(x)\cos(x), \quad \cos(2x)=2\cos^2(x)-1=\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x).$$

Ángulo mitad

$$\operatorname{sen}^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}=\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}.$$

2.3. Repaso de límites

2.3.1. Definición de límite y propiedades

Representamos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales. Una *sucesión de números reales* es una manera de hacer corresponder a cada número natural $n\in\mathbb{N}$ un único número real, que representamos por x_n, y que llamamos *término n-ésimo de la sucesión*. Por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ viene dada por la familia de números $\{1,1/2,1/3,1/4,\dots\}$. El término 5-ésimo de esta sucesión es $1/5$.

• Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ *tiende a un número real L* si podemos hacer que todos los términos n-ésimos de la sucesión se aproximen tanto como queramos al número L sin más que tomar n suficientemente grande. Esto lo representamos por $\{x_n\}\to L$ o por $\lim_{n\to+\infty}x_n=L$.

• Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ *tiende a* $+\infty$ si podemos hacer que todos los términos n-ésimos de la sucesión sean tan grandes como queramos sin más que tomar n suficientemente grande. Esto lo representamos por $\{x_n\}\to+\infty$ o por $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

• Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ *tiende a* $-\infty$ si podemos hacer que todos los términos n-ésimos de la sucesión sean tan pequeños como queramos sin más que tomar n suficientemente grande. Esto lo representamos por $\{x_n\} \to -\infty$ o por $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

Ejemplos: Consideremos las siguientes sucesiones:

(a) $x_n = 1/n$, es decir, la sucesión es $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$,

(b) $y_n = n^2$, es decir, la sucesión es $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$,

(c) $z_n = -n^3 + n^2 + 1$, es decir, la sucesión es $\{1, -3, -17, \dots\}$,

(d) $t_n = (-1)^n$, es decir, la sucesión es $\{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$.

Entonces se cumple que:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} z_n = -\infty,$$

mientras que $\{t_n\}$ no tiende a ningún valor real ni tampoco a $\pm\infty$.

A continuación procedemos a definir el concepto de límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un valor concreto x_0.

• Sea f una función definida alrededor de un punto x_0 (no es necesario que x_0 pertenezca al dominio de la función, es decir, podría no existir $f(x_0)$). Sea $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ésto significa que L puede representar a $+\infty$ o a $-\infty$, que no son números). Decimos que f *tiene límite* L cuando x tiende a x_0, y lo simbolizamos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

si *para cada* sucesión de números reales $\{x_n\}$ distintos todos ellos de x_0 y tal que $\{x_n\}$ tiende a x_0, se cumple que la correspondiente sucesión de imágenes $\{f(x_n)\}$ tiende a L. En lenguaje simbólico:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall \{x_n\} \to x_0,\ x_n \neq x_0,\ \text{se cumple } \{f(x_n)\} \to L.$$

• Nota: resaltemos nuevamente que para hablar de límite de una función en un punto no es necesario que la función esté definida en el punto.

• Nota: el límite de una función en un punto no tiene por qué existir. Esto es lo que ocurre en $x_0 = 0$ con la función definida por $f(x) = -1$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x > 0$.

Hay ocasiones en las que una función tiene distintas expresiones a la izquierda y a la derecha de un punto x_0 (funciones definidas a trozos). Para estudiar estas situaciones se definen los límites laterales, que permiten estudiar el comportamiento de la función a ambos lados de x_0.

• Sea f una función definida a la izquierda de x_0. Decimos que el *límite lateral por la izquierda* de f en x_0 es L, y lo representamos

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L,$$

si para cada sucesión de números reales $\{x_n\}$ con $x_n < x_0$ y tal que $\{x_n\} \to x_0$, se cumple que $\{f(x_n)\} \to L$.

• Sea f una función definida a la derecha de x_0. Decimos que el *límite lateral por la derecha* de f en x_0 es L, y lo representamos

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L,$$

si para cada sucesión de números reales $\{x_n\}$ con $x_n > x_0$ y tal que $\{x_n\} \to x_0$, se cumple que $\{f(x_n)\} \to L$.

La idea de los límites laterales consiste en estudiar hacia dónde tiende una función cuando nos acercamos a un punto por ambos lados del mismo. El siguiente resultado relaciona la existencia y el valor del límite de una función en un punto con la existencia y el valor de los límites laterales de la función en dicho punto.

Teorema 2.1. *Sea f una función definida alrededor de un punto x_0 y $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Entonces se tiene:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0-} f(x) = L \;\; y \;\; \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L.$$

(el límite existe si y sólo si existen los dos límites laterales y son iguales).

Nota: los límites laterales en un punto x_0 hay que calcularlos cuando la función tiene distinta expresión analítica a la izquierda y a la derecha de x_0 (funciones a trozos). Cuando la función sólo está definida a un lado de x_0 hay que estudiar el límite lateral por ese lado y nada más.

Algunas propiedades de los límites (que son también válidas para límites laterales) son:

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$.
2. $\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x)$.
3. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\,g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))\,(\lim_{x\to x_0} g(x))$.
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, siempre que $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.
5. $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.

Ejemplo: Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ una función polinómica. Por la definición de límite y las propiedades, se obtiene fácilmente que:

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0),$$

es decir para calcular el límite de una función polinómica cuando $x \to x_0$, basta con evaluar la función polinómica en el punto x_0. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to -1}(-2x^2+5x-7) = -2(-1)^2 + 5(-1) - 7 = -2-5-7 = -14.$$

Ejemplo: Sea $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ una función racional. Teniendo en cuenta el ejemplo anterior y las propiedades de los límites deducimos que si $q(x_0) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} r(x) = r(x_0) = \frac{p(x_0)}{q(x_0)},$$

es decir, para calcular el límite de una función racional en un punto que no sea una raíz del denominador, basta con evaluar la función en el punto. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-1}{2x+7} = \frac{-1}{7}.$$

2.3.2. Límites en el infinito

Hasta ahora hemos estudiado el comportamiento de una función en las cercanías de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Ahora estudiaremos el comportamiento que puede presentar una función cuando la variable x toma valores arbitrariamente grandes ($x \to +\infty$) o pequeños ($x \to -\infty$).

• Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Decimos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

si *para cada* sucesión de números reales $\{x_n\}$ tal que $\{x_n\} \to +\infty$ se cumple que $\{f(x_n)\} \to L$. Del mismo modo, diremos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

si para cada sucesión de números reales $\{x_n\}$ tal que $\{x_n\} \to -\infty$ se cumple que $\{f(x_n)\} \to L$. Los límites cuando $x \to \pm\infty$ cumplen las mismas propiedades que los límites cuando $x \to x_0$.

Nota: para calcular $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ se suele proceder de este modo: se calcula $f(-x)$ y se calcula el $\lim_{x \to +\infty} f(-x)$. En otras palabras:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x).$$

2.3.3. Indeterminaciones. Técnicas básicas para calcular límites

Al calcular límites muchas veces nos encontramos con operaciones que involucran a 0 y $\pm\infty$. En algunas situaciones estas operaciones tienen resultados concretos pero en otras no. En este último caso estamos ante una *indeterminación*. El cálculo de límites está basado en técnicas que ayudan a resolver distintos tipos de indeterminaciones.

Algunas operaciones que involucran a $\pm\infty$ y tienen resultados concretos son las siguientes:

- $a(\pm\infty) = \pm\infty$ si $a > 0$, $a(\pm\infty) = \mp\infty$ si $a < 0$.
- $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$.
- $a + \infty = +\infty$, $a - \infty = -\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- $(+\infty)(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)(-\infty) = +\infty$, $(+\infty)(-\infty) = -\infty$, $(-\infty)(+\infty) = -\infty$.
- $\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$, $\frac{0}{\pm\infty} = 0$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, $\frac{a}{0} = \pm\infty$, para cualquier $a \neq 0$.
- $a^{+\infty} = +\infty$ si $a > 1$, $a^{+\infty} = 0$ si $0 < a < 1$.
- $a^{-\infty} = 0$ si $a > 1$, $a^{-\infty} = +\infty$ si $0 < a < 1$.
- $0^{+\infty} = 0$, $0^{-\infty} = \pm\infty$.

Las indeterminaciones (operaciones que involucran a 0 o $\pm\infty$ que no siempre dan el mismo resultado y que hay que estudiar en cada caso particular) son las siguientes:

- De tipo suma: $+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$.
- De tipo producto: $0\,(\pm\infty)$.
- De tipo cociente: $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
- De tipo exponencial: $(\pm\infty)^0$, 0^0, $1^{\pm\infty}$.

Ejemplos: Calcularemos algunos límites sencillos siguiendo las reglas anteriores. Para resolver algunas indeterminaciones como $+\infty-\infty$ es muchas veces suficiente con realizar operaciones.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)=(+\infty-\infty)\text{ indeter.}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x^4}=\left(\frac{-1}{0^+}\right)=-\infty.$$

Ejemplos: Al calcular el límite de una función racional cuando x tiende a una raíz del denominador nos podemos encontrar con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. En este caso, factorizamos numerador y denominador por la regla de Ruffini para simplificar los factores causantes de la indeterminación.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x^2+1-2x}=\left(\frac{0}{0}\right)\text{ indeter.}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^4-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{0}{4}=0.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1.$$

Ejemplos: En los límites indeterminados en los que aparecen raíces la técnica más útil suele ser multiplicar numerador y denominador por las expresiones conjugadas de las raíces que intervengan.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)\text{ indeter.}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{2},$$

donde en la tercera igualdad hemos aplicado que $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Ahora estudiaremos como resolver la indeterminación $1^{\pm\infty}$. Recordemos que el número e es un número real irracional con las siguientes propiedades:

- $e\in(2,3)$. Concretamente, $e=2{,}71828\ldots$
- $e^0=1$, $e^{+\infty}=+\infty$, $e^{-\infty}=0$.

Las indeterminaciones del tipo $1^{\pm\infty}$ se suelen resolver con el siguiente resultado:

Criterio $1^{\pm\infty}$. Sean f y g dos funciones definidas alrededor de un punto x_0 (el criterio también es cierto si $x_0=\pm\infty$), de forma que $\lim_{x\to x_0}f(x)=1$. Entonces se verifica:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to x_0}g(x)\,(f(x)-1)}.$$

Ejemplo: Calcularemos un par de límites haciendo uso del criterio anterior.

$$\lim_{x\to 3^+}(2x-5)^{1/(x-3)}=(1^{+\infty})\text{ indeter.}=e^{\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}(2x-5-1)}=e^{\lim_{x\to 3^+}\frac{2x-6}{x-3}}.$$

Ahora, como

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x-6}{x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3^+}\frac{2(x-3)}{x-3}=2,$$

deducimos que

$$\lim_{x\to 3^+} (2x-5)^{1/(x-3)} = e^2,$$

con lo que concluye este caso. Otro ejemplo es el siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = (1^{+\infty}) = e^{\lim_{x\to+\infty} x(1+\frac{1}{x}-1)} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}} = e.$$

Ahora resolveremos algunas indeterminaciones que se pueden presentar cuando tomamos límite al tender x a $\pm\infty$ en funciones polinómicas y racionales.

Ejemplo: Si $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es una función polinómica de grado $n \geq 1$ ($a_n \neq 0$), entonces $\lim_{x\to+\infty} p(x)$ puede dar lugar a una indeterminación del tipo $+\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$. Este límite se puede calcular siempre haciendo uso de la siguiente regla:

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty \quad \text{si } a_n > 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty \quad \text{si } a_n < 0.$$

Para calcular $\lim_{x\to-\infty} p(x)$ usamos la regla anterior junto con el hecho comentado hace algunas páginas de que $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} p(-x)$. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to-\infty} (-2x^3 - 3x + 7) = \lim_{x\to+\infty} (-2(-x)^3 - 3(-x) + 7) = \lim_{x\to+\infty} (2x^3 + 3x + 7) = +\infty,$$

ya que el coeficiente líder del polinomio es $2 > 0$.

Ejemplo: Sea $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ una función racional. Esto significa que $p(x)$ es un polinomio de grado n, por ejemplo $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ y $q(x)$ es un polinomio de grado m, por ejemplo $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$. Por el ejemplo anterior, al intentar calcular

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

siempre se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Esta indeterminación se resuelve dividiendo numerador y denominador por la potencia más grande de x que aparezca en $p(x)$ y en $q(x)$. Este método da lugar a la siguiente regla (regla de los grados):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = L,$$

donde L se determina según los siguientes casos:

- $L = 0$ si $m > n$, es decir, el grado del denominador es más grande que el grado del numerador,
- $L = \pm\infty$ si $n > m$, es decir el grado del numerador es más grande que el del denominador. Además, el signo del ∞ coincide con el signo de a_n/b_m,
- $L = \frac{a_n}{b_n}$ si $n = m$, es decir, cuando numerador y denominador tienen el mismo grado, el límite coincide con el cociente entre los coeficientes líderes de ambos polinomios.

Veamos algunos ejemplos concretos de aplicación de la regla anterior.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+1}{x-7} = -\infty,$$

ya que el grado del numerador es mayor que el del denominador y $(-2)/1$ es negativo.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+7}{2x^3+3} = \frac{-1}{2},$$

ya que numerador y denominador tienen el mismo grado y los coeficientes líderes son -1 y 2, respectivamente.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0,$$

ya que el grado del denominador es mayor que el del numerador. Para calcular el límite de una función racional $r(x)$ cuando $x\to-\infty$ se usa $\lim_{x\to-\infty} r(x) = \lim_{x\to+\infty} r(-x)$, y se aplica la regla de los grados para calcular $\lim_{x\to+\infty} r(-x)$. Veamos algunos ejemplos concretos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2+1}{x-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2(-x)^2+1}{-x-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+1}{-x-7} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3+7}{2x^3+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-(-x)^3+7}{2(-x)^3+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+7}{-2x^3+3} = \frac{-1}{2}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{(-x)^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0.$$

Ejemplos: Ahora resolveremos algunas indeterminaciones cuando $x\to\pm\infty$ para funciones con radicales. Bastará con aplicar conjuntamente algunas de las técnicas ya aprendidas.

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = (+\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(-x)^4+1}}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}} = \sqrt{+\infty} = +\infty,$$

donde al final hemos usado la regla de los grados para calcular el límite de una función racional (la que está dentro de la raíz).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+2}}{x+1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1}\sqrt{x^3\left(1+\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x^3}\right)} = +\infty.$$

2.3.4. Estudio de las asíntotas de una función

En general, dada la gráfica de una función, una *asíntota* es una recta a la cual dicha gráfica se aproxima cada vez más. Ahora discutiremos con detalle y de forma más rigurosa los diferentes casos que se pueden presentar.

• Diremos que la recta $\{x = x_0\}$ es una *asíntota vertical* de una función $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ (el límite puede ser lateral). Los puntos x_0 en los que una función presenta una asíntota de este tipo hay que buscarlos entre aquellos que no pertenecen al dominio $Dom(f)$ pero a los que nos podemos aproximar desde puntos de $Dom(f)$. Para discutir la posición de la gráfica con respecto de la asíntota estudiamos, cuando sea posible, los límites laterales de f en x_0.

Ejemplo: La función $f(x) = 1/x^2$ presenta una asíntota vertical en el punto $x_0 = 0$ puesto que $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Además, la gráfica de la función se pierde por $+\infty$ a ambos lados de la asíntota.

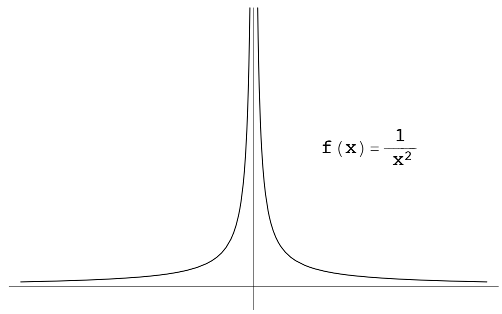


Figura 2.15: Un ejemplo de asíntota vertical

• También puede ocurrir que la gráfica de una función $f(x)$ se vaya acercando a una recta no vertical. Diremos que una recta $y = mx+n$ es una *asíntota oblicua* de una función $f(x)$ si se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx - n) = 0$. Para averiguar si una función tiene asíntotas oblicuas se sigue la siguiente regla práctica:

Regla práctica: Supongamos que la función $f(x)$ cumple:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$,

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = n \in \mathbb{R}$.

Entonces, $f(x)$ se aproxima cuando $x \to +\infty$ a la recta $y = mx+n$, que es una asíntota oblicua de f. Esta regla también es cierta si sustituimos $+\infty$ por $-\infty$. Para discutir la posición de la gráfica $y = f(x)$ con respecto a una asíntota oblicua $y = mx+n$, hay que estudiar el signo que tiene la expresión $f(x) - mx - n$ cuando $x \to \pm\infty$. Si este signo es positivo la función se queda por encima de la asíntota mientras que si es negativo se queda por debajo.

Nota: como caso particular, cuando la recta $y = mx+n$ tiene pendiente 0, es decir, $m = 0$, entonces decimos que $f(x)$ presenta en $y = n$ una asíntota horizontal.

Ejemplo: La función $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$ tiene dos asíntotas horizontales. En efecto, es bien sabido que $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}(x) = \pi/2$ mientras que $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg}(x) = -\pi/2$. La función se queda por debajo de la asíntota $\{y = \pi/2\}$ y por encima de la asíntota $\{y = -\pi/2\}$.

2.4. Repaso de continuidad

Intuitivamente las funciones continuas son aquellas cuyas gráficas no presentan saltos ni interrupciones. El concepto riguroso de función continua en un punto es el siguiente.

Definición: Se dice que una función f es *continua* en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si se cumplen tres condiciones:

(i) Existe $f(x_0)$, es decir, $x_0 \in Dom(f)$,

(ii) Existe $\text{lím}_{x\to x_0} f(x)$ y es finito,

(iii) $\text{lím}_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

• Nota: a diferencia del concepto de límite, la definición de continuidad exige que la función tiene que estar definida en el punto.

• Nota: la propiedad (iii) nos indica que los límites de funciones continuas se calculan evaluando directamente la función en el punto.

Definición: Se dice que una función f es *discontinua* en $x_0 \in \mathbb{R}$ si no es continua en x_0. Esto significa que f no cumple alguna de las 3 condiciones en la definición de continuidad. Según sea la propiedad que no se cumple clasificamos las discontinuidades en:

- *discontinuidad esencial* cuando no se cumple (ii).
- *discontinuidad evitable* cuando se cumple (ii) pero falla (i) o (iii).

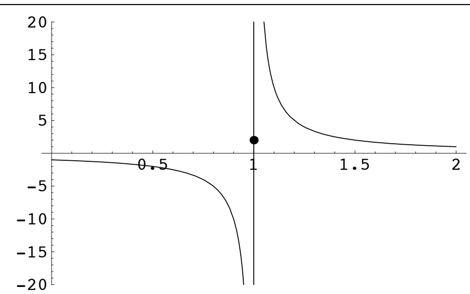


Figura 2.16: Una discontinuidad esencial

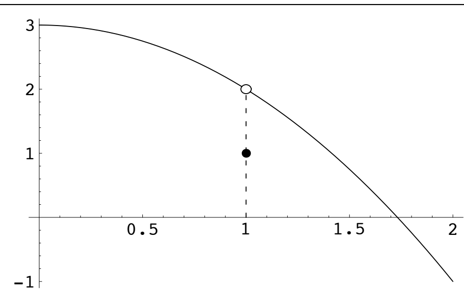


Figura 2.17: Una discontinuidad evitable

• Nota: un caso particular de discontinuidad esencial ocurre cuando los límites laterales de f en x_0 existen, son finitos, pero son distintos. En este caso hablamos de *discontinuidad de salto finito*.

• Nota: el nombre de discontinuidad evitable se debe a que podemos "reparar la discontinuidad". Concretamente, si f presenta una discontinuidad evitable en x_0, entonces la función f^*, definida por $f^*(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ y por

$$f^*(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x),$$

es una función continua en x_0. En una discontinuidad esencial no es posible la construcción de f^* al no existir $\text{lím}_{x\to x_0} f(x)$.

Definición: Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Se dice que una función f es continua en I si f es continua en cada punto $x_0 \in I$.

Propiedades de las funciones continuas: Supongamos que f y g son funciones continuas en un intervalo I. Entonces:

1. $f + g$ es continua en I.
2. λf es continua en I, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $f\,g$ es continua en I.
4. $\frac{f}{g}$ es continua en I, salvo en los puntos $x \in I$ tales que $g(x) = 0$.
5. Si $f(x) > 0$ para cada $x \in I$, entonces f^g es continua en I.

6. La composición $g \circ f$ es continua en I.

Ejemplos: Toda función polinómica $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es continua en $\mathbb{R}$ al ser suma y producto de funciones continuas. Toda función racional $r(x) = p(x)/q(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{x : q(x) = 0\}$. Las funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son continuas en sus dominios de definición.

Ejemplo: Estudiar la continuidad en el punto $x_0 = 0$ de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{x}}$ si $x < 0$, $f(0) = 1$, y $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x}$ si $x > 0$.

Solución: Tendremos que comprobar si se cumplen las condiciones de la definición de continuidad. En primer lugar, $0 \in Dom(f)$ y, de hecho, $f(0) = 1$ por definición de f. Ahora debemos estudiar si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y es finito. Como a ambos lados de $x_0 = 0$ la función tiene distintas expresiones analíticas entonces debemos calcular los límites laterales. Tenemos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1)^{\frac{1}{x}} = (1^{-\infty}) \text{ indeter.} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(x^2+1-1)} = e^{\lim_{x\to 0} x} = 1,$$

donde hemos aplicado el criterio $1^{\pm\infty}$. Por otro lado:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 0.$$

Como los límites laterales son distintos se sigue que no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y, por tanto, f presenta en $x_0 = 0$ una discontinuidad esencial. Como los límites laterales son finitos estamos, más concretamente, ante una discontinuidad de salto finito.

Ejemplo: Estudiar la continuidad en el punto $x_0 = -1$ de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x^2+1)$ si $x \neq -1$, $f(-1) = 2008$.

Solución: Procedemos como en el caso anterior. En primer lugar existe $f(-1)$ y su valor es 2008. Veamos si existe $\lim_{x\to -1} f(x)$. En este caso la expresión de la función a ambos lados de $x_0 = -1$ es la misma, por lo que no tenemos que calcular límites laterales. Se tiene:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} (x^2+1) = (-1)^2 + 1 = 2.$$

Por tanto el límite existe y es finito. Por último, como $f(-1) = 2008$ y $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$, deducimos que f presenta una discontinuidad evitable en $x_0 = -1$.

Terminaremos este tema con tres resultados donde se ponen de manifiesto algunas propiedades relevantes de las funciones continuas.

Teorema 2.2 (Conservación del signo)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua sobre un intervalo abierto I, y x_0 es un punto de I en el que $f(x_0) \neq 0$, entonces existe un entorno abierto $B(x_0, r)$ en el que el signo de $f(x)$ es el mismo signo que el de $f(x_0)$.*

Teorema 2.3 (Teorema de los valores intermedios)**.** *Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$ de forma que $f(a) \neq f(b)$. Entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir, para cada y en el intervalo determinado por $f(a)$ y $f(b)$, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = y$.*

Una de las aplicaciones más conocidas del resultado anterior es la siguiente:

Teorema 2.4 (Teorema de los ceros de Bolzano)**.** *Sea f una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$. Si se cumple que $f(a)f(b) < 0$ (es decir, el signo de $f(a)$ es distinto al signo de $f(b)$), entonces existe un valor $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

La interpretación geométrica del Teorema de Bolzano es la siguiente: una gráfica continua en el plano que pasa del semiplano superior al inferior (o al revés) tiene que cortar en algún punto al eje x.

El Teorema de Bolzano se puede aplicar para asegurar la existencia de solución de ciertas ecuaciones difíciles de resolver por métodos directos.

Ejemplo: La ecuación $x+e^x = 7$ no se puede resolver directamente (inténtese despejar x) pero podemos demostrar la existencia de soluciones si procedemos de la siguiente forma. Definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x+e^x-7$. Esta función es continua en $\mathbb{R}$ al ser suma de funciones continuas. Además, es claro que las soluciones de la ecuación $x+e^x = 7$ coinciden con los valores de x para los que $f(x) = 0$. De esta forma, trasladamos el problema de encontrar una solución de la ecuación $x+e^x = 7$ al problema de encontrar un punto $x \in \mathbb{R}$ donde $f(x) = 0$. Este punto trataremos de encontrarlo dentro de un intervalo $[a,b]$ donde la función f cumpla las hipótesis del Teorema de Bolzano. Por ejemplo, se tiene $f(0) = 0+e^0-7 = -6 < 0$, mientras que $f(3) = 3+e^3-7 > 3+8-7 = 4 > 0$. Así, podemos aplicar el Teorema de Bolzano a f en el intervalo $[0,3]$ para asegurar la existencia de un número $c \in (0,3)$ donde $f(c) = 0$, es decir $c+e^c = 7$, lo que implica que c es una solución de la ecuación original. En principio, no podemos calcular c explícitamente.

2.5. Definición de derivada. Interpretaciones

La derivación es una herramienta muy potente del cálculo. Si las funciones continuas son aquellas cuyas gráficas no presentan saltos, las funciones derivables tienen la propiedad de que su gráfica, además de ser continua, no presenta picos, cambios bruscos de dirección, o rectas tangentes verticales.

Existen varias formas de aproximarse al concepto de derivada de una función de una variable en un punto. Nosotros eligiremos dos: la primera, a través de la *tasa de variación instantánea* de una función; la segunda, a partir del problema de la *recta tangente* a una gráfica en un punto.

2.5.1. Tasa de variación instantánea de una función

En Física, la velocidad media de un móvil es el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en ello. Ahora bien, £qué significado tiene entonces la llamada velocidad instantánea? En un instante, un móvil no recorre nada, y la cantidad de tiempo necesitada es también cero. Por tanto, el concepto de velocidad instantánea sólo puede ser entendido como un paso al límite. Es decir, si medimos el espacio recorrido por el vehículo en un tiempo h pequeño, y lo dividimos entre h, el resultado será próximo a nuestra idea de velocidad instantánea. Y será más próximo cuanto más pequeño sea h. Así pues, la velocidad $v(t_0)$ en un instante t_0 no es otra cosa que:

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{e(t_0+h)-e(t_0)}{h},$$

donde $e(t)$ es el espacio recorrido en función del tiempo t. Cuando dicho límite existe y es finito se llama *derivada* de $e(t)$ en t_0.

En general, siguiendo la idea que se ha visto en el ejemplo anterior, la derivada representa la tasa instantánea de cambio de una magnitud. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo abierto I.

Se llama tasa de variación media de f en $[u,v] \subset I$ al número real:

$$TVM(f,[u,v]) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(v)-f(u)}{v-u},$$

que representa cómo cambia la magnitud $y = f(x)$ respecto de x en $[u,v]$. Si nos preguntamos por la tasa de variación instantánea de f en un punto concreto $a \in I$, entonces debemos calcular tasas de variación media en intervalos de la forma $[a,a+h]$ con h cada vez más pequeño. De este modo:

$$TVI(f,a) = \lim_{h\to 0} TVM(f,[a,a+h]) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Cuando este límite existe y es finito se llama derivada de $f(x)$ en a.

2.5.2. El problema de la recta tangente

Dada una curva C en el plano y un punto $p \in C$, se llama *recta tangente* a C en p, a una recta R que aproxima de forma óptima a C alrededor de p, es decir, los dibujos de C y R están muy próximos en un entorno pequeño de C que contiene a p. Para que una curva C tenga en p una recta tangente es intuitivamente claro que C debe de ser "suave" en p, es decir, C no puede presentar en p un pico ni un cambio brusco de dirección. Esto se puede ilustrar con ayuda de la curva $y = |x|$ en el punto $(0,0)$. El *problema de la recta tangente* consiste en descubrir condiciones para que C tenga recta tangente en p y, en caso de tenerla, calcular dicha recta en términos de C y p.

Queremos ahora estudiar el problema de la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ de una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ en un punto $(a, f(a))$ con $a \in I$. Según la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente, la recta que buscamos, si existe, tendrá la ecuación

$$y = f(a) + m(x-a),$$

donde m es la pendiente de la recta, que habrá que determinar a partir de $f(x)$ y a. Recordemos que la pendiente de una recta es la tangente del ángulo α que forma la recta con el eje de abcisas. Para calcular m procedemos de esta forma. Aproximamos la recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ por las rectas secantes que pasan por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ con h cada vez más pequeño. Resulta entonces claro que, si la recta tangente existe, entonces las pendientes m_h de las rectas secantes deben aproximarse a la pendiente m cuando h tiende a cero. Esto quiere decir que $\lim_{h\to 0} m_h = m$.

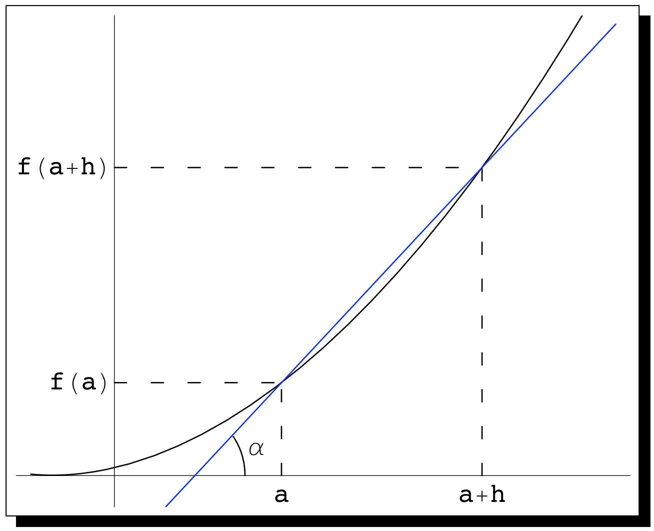
Por otro lado, es sencillo a partir de trigonometría elemental comprobar que las pendientes m_h se calculan de la siguiente manera, véase la figura de arriba:

$$m_h = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

De este modo, tenemos que:

$$m = \lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

que es la definición de derivada de f en a. Así pues, **la derivada de f en un punto a, cuando existe y es finita, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto** $(a, f(a))$. Por tanto, la derivada es igual a $\operatorname{tg}(\beta)$, donde β es el ángulo mostrado en la figura de abajo.



Una recta secante a la curva $y = f(x)$

2.5.3. Definición e interpretación geométrica de la derivada

Definición: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $a \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es DERIVABLE en a si existe y es finito el límite dado por:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En tal caso, a dicho límite lo llamamos DERIVADA de f en a, y lo representamos por $f'(a)$ o por $\frac{df}{dx}(a)$. Obsérvese que el límite que aparece en la definición de derivada conduce a una indeterminación de tipo $(\frac{0}{0})$. Diremos que f es derivable en I si f es derivable en cada punto $a \in I$. En tal caso, se llama FUNCIÓN DERIVADA de f a la función $f' : I \to \mathbb{R}$, que asocia a cada punto $a \in I$ la derivada $f'(a)$.

Interpretación geométrica: Ya hemos visto que si f es derivable en a entonces la curva $y = f(x)$ tiene recta tangente no vertical en el punto $(a, f(a))$, y su pendiente es $m = f'(a)$. Por tanto, la ecuación de dicha recta es:

$$y = f(a) + f'(a)\,(x-a).$$

En particular, esta recta es horizontal si sólo si $f'(a) = 0$. Cuando $f'(a) \neq 0$, entonces la recta normal a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ (recta perpendicular a la tangente) no es vertical y su ecuación viene dada por:

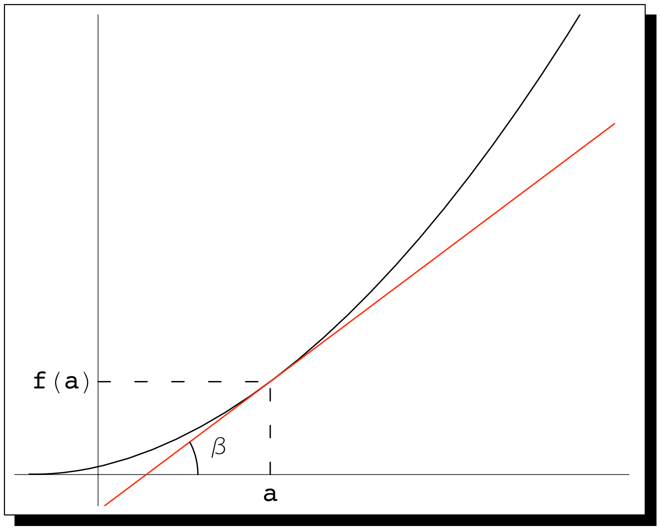
$$y = f(a) - (1/f'(a))\,(x-a).$$

Ejemplo: Calculemos las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ en el punto $(2,4)$. Para ello, consideramos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y estudiamos si es derivable en $a = 2$. Por definición de derivada, tenemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4 + h^2 + 4h - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h\to 0} (h+4) = 4,$$

lo que nos indica que f es derivable en $a = 2$ y $f'(2) = 4$. Por tanto, las ecuaciones de las rectas tangente y normal a $y = x^2$ en $(2,4)$ son (tras simplificar):

$$y = 4x - 4, \qquad y = \frac{-x}{4} + \frac{9}{2}.$$



La recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$

Sabemos que para que exista el límite de una función en un punto, tienen que existir los dos límites laterales y ser iguales. Esto nos lleva a definir las derivadas laterales de una función en un punto. Las DERIVADAS LATERALES de f en a son, cuando existen y son finitos, los números reales siguientes:

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Las derivadas laterales habrá que estudiarlas cuando la función tiene una expresión analítica distinta a ambos lados del punto a. Se tiene entonces lo siguiente:

Teorema 2.5. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Dado $a \in I$ se tiene que f es derivable en a si y sólo si existen las dos derivadas laterales, son iguales y son finitas. En tal caso, $f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a)$.*

Ejemplo: Vamos a probar que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $a = 0$. Como esta función tiene distintas expresiones a ambos lados de $a = 0$ utilizamos las derivadas laterales. Se tiene:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1.$$

Por el Teorema 2.5, esta función no es derivable en $a = 0$. En general, una función cuya gráfica presente algún “pico" no será derivable en el punto correspondiente.

Ejemplo: Veamos que la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no es derivable en $a = 0$. Al utilizar directamente la definición de derivada, tenemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

En este caso, la pendiente de la recta tangente en $a = 0$ se hace $+\infty$, lo que impide que la función sea derivable en $a = 0$. En general, una función cuya gráfica presente un punto en el que la recta tangente es vertical no será derivable en dicho punto.

Nota: los ejemplos anteriores muestran que una función continua en un punto no tiene por qué ser derivable en dicho punto, véase la Figura 4.1. No obstante, si es cierto que derivabilidad implica continuidad. Este es el contenido del próximo resultado.

Teorema 2.6. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo abierto I. Si f es derivable en un punto $a \in I$, entonces f es continua en a.*

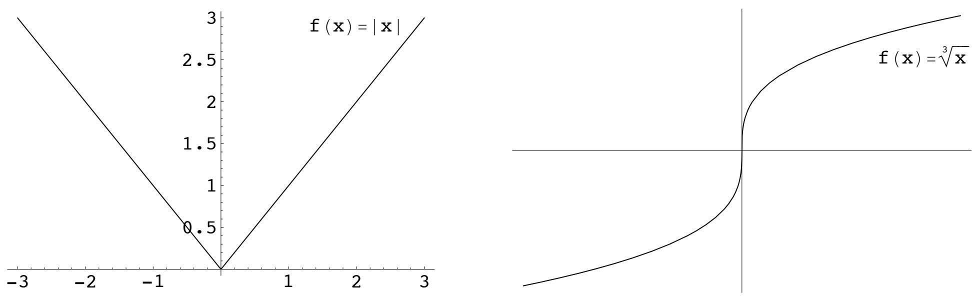


Figura 2.18: Ejemplos de funciones continuas no derivables en $a = 0$

2.6. Resultados relacionados con la derivación

Teorema 2.7 (de Rolle). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ de forma que $f'(c) = 0$.*

Geométricamente, el resultado anterior significa que si una gráfica es continua y suave, y sus extremos están a la misma altura, entonces hay un punto de la curva en el que la recta tangente es horizontal.

Nota: este teorema se suele usar de forma recíproca, es decir, si tenemos la garantía de que la derivada de f no se anula en un intervalo abierto I, entonces f tiene que ser inyectiva en I, o lo que es lo mismo, no existen $a,b \in I$ diferentes tales que $f(a) = f(b)$.

Ejemplo: Vamos a probar que la ecuación $\cos(x) = 2x$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$. Definimos $f(x) = \cos(x) - 2x$, que es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ y, por tanto, lo será en cualquier intervalo. Puesto que $f(0) = \cos(0) - 2 \cdot 0 = 1 - 0 = 1 > 0$ y $f(1) = \cos(1) - 2 < 0$, deducimos, por el Teorema de Bolzano, que existe al menos un valor $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $\cos(c) = 2c$.

Ahora vamos a probar mediante el Teorema de Rolle que esta solución es única. Supongamos que hubiera otra solución c' de la misma ecuación, es decir, $f(c') = 0$. Entonces, $f(c) = f(c') = 0$, y por el Teorema de Rolle aplicado a f en el intervalo de extremos c y c', debería existir un número d entre c y c' de manera que $f'(d) = 0$. Pero la derivada de f tiene la expresión $f'(x) = -\operatorname{sen}(x) - 2$ (ver tabla de derivadas), que es una función siempre negativa. Por tanto, llegamos a una contradicción, lo que significa que no existe otra solución c'.

Nuestro próximo resultado es una generalización del Teorema de Rolle:

Teorema 2.8 (del valor medio). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ de tal manera que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geométricamente, este resultado significa que la recta secante a la curva $y = f(x)$ que pasa por los extremos de la curva es paralela a la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto interior. Si pensamos en las derivadas como tasas de variación instantánea de magnitudes, entonces el Teorema del valor medio implica que la tasa de variación media de una función en un intervalo coincide con la tasa de variación instantánea de la función en un punto concreto del intervalo.

Ejemplo: Si la velocidad media de un móvil entre las 8 y las 9 de la mañana es de 120 km/h, entonces en al menos un instante de tiempo entre las 8 y las 9 de la mañana, la velocidad del móvil ha sido exactamente de 120 km/h.

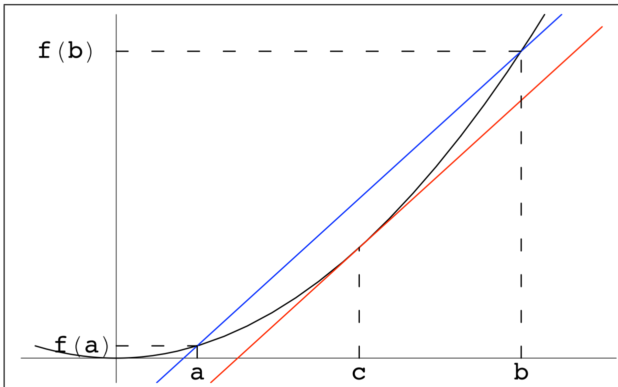


Figura 2.19: El Teorema del valor medio

2.7. Cálculo de derivadas. Reglas de derivación

Ahora aprenderemos a calcular de forma sistemática la derivada de cualquier función de una variable. Evidentemente, la definición original, pese a su clara interpretación, no es práctica a la hora de calcular derivadas de funciones complicadas. Realizaremos el cálculo de derivadas de forma mucho más fácil a partir de las *reglas de derivación*, basadas en dos herramientas fundamentales. La primera: el comportamiento de las derivadas frente a las operaciones de suma, producto y composición. La segunda: el cálculo concreto de la derivada de las funciones elementales.

Derivadas y operaciones con funciones: Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables sobre un intervalo abierto I. Entonces:

1. $f+g$ es derivable en I y $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $\lambda \cdot f$ es derivable en I para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$,
3. $f \cdot g$ es derivable en I y $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Regla de Leibnitz),
4. $\dfrac{f}{g}$ es derivable en $I - \{x : \ g(x) = 0\}$ y $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$,
5. f^g es derivable en I y $(f^g)'(x) = g(x)\, f(x)^{g(x)-1} f'(x) + f(x)^{g(x)} \ln(f(x))\, g'(x)$ siempre que $f(x) > 0$ para cada $x \in I$,

6. **Regla de la cadena:** La composición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es derivable en I con derivada:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x).$$

Función	Derivada	Función	Derivada
C	0	$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
x	1	$\lambda \cdot f(x)$	$\lambda \cdot f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-f'(x)}{f(x)^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
x^n	$n x^{n-1}$	$(f(x))^n$	$n\,(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$
e^x	e^x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \cdot \ln(a) \cdot f'(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\operatorname{sen}(f(x))$	$\cos(f(x)) \cdot f'(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$	$\cos(f(x))$	$-\operatorname{sen}(f(x)) \cdot f'(x)$
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\operatorname{tg}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$
$\operatorname{arc\,sen}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,sen}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\operatorname{arc\,cos}(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,cos}(f(x))$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\operatorname{arc\,tg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arc\,tg}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Ejemplo: Las funciones polinómicas son derivables en $\mathbb{R}$ y su derivada es otro polinomio. Las funciones racionales son derivables en su dominio y su derivada es otra vez una función racional.

Sin embargo, hay otras funciones que después de derivar se convierten en funciones más sencillas. Calcular las derivadas de $p(x)=3x^3+7x^2-\sqrt{3}x-\pi$ y de $r(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

Ejemplo: Calcular la derivada de $f(x)=\operatorname{sen}(\cos(x))$, $g(x)=\ln(\ln(\sqrt{x}))$ y $h(x)=\ln(\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)})$.

Ejemplo: Calculamos la derivada de la función $f(x)=\operatorname{sen}^3(x)+\dfrac{x\ln(x)}{e^{\frac{1}{x}}}$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)+\frac{\left(1\cdot\ln(x)+x\,\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-x\ln(x)\,e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{(e^{\frac{1}{x}})^2}\\
&= 3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)+\frac{(\ln(x)+1)\,e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\,e^{\frac{1}{x}}\ln(x)}{e^{\frac{2}{x}}}\\
&= 3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)+\frac{1+\ln(x)+\frac{1}{x}\ln(x)}{e^{\frac{1}{x}}}.
\end{aligned}$$

Terminamos esta sección hablando de derivadas segundas y de orden superior.

Definición: Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo abierto I. Recordemos que la función derivada es la función $f':I\to\mathbb{R}$, que a cada $x\in I$ le hace corresponder $f'(x)$. Diremos que f es DOS VECES DERIVABLE en $a\in I$ si la función derivada f' es derivable en a. En este caso, representamos $f''(a)=(f')'(a)$ y lo llamamos DERIVADA SEGUNDA de f en a. Así se pueden definir, sucesivamente, las derivadas tercera, cuarta, etc.

Ejemplo: Calcular las derivadas sucesivas de $f(x)=\operatorname{sen}(x)$.

2.8. Aplicaciones de las derivadas

Las aplicaciones del cálculo diferencial son muy numerosas. Aquí nos preocuparemos sobre todo de aspectos relacionados con la representación gráfica de funciones de una variable.

2.8.1. La regla de L'Hôpital

La Regla de L'Hôpital es una aplicación de la derivación que nos permite calcular límites indeterminados de tipo cociente que se vuelven más sencillos cuando derivamos.

Teorema 2.9 (Regla de L'Hôpital). *Consideremos $f,g:I\to\mathbb{R}$ dos funciones derivables en un intervalo abierto I. Dado $a\in I\cup\{\pm\infty\}$, supongamos que al calcular alguno de los límites*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},\quad \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)},\quad \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$$

llegamos a una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$. Entonces, se cumple que:

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre que este último límite exista (aunque sea $\pm\infty$).

Notas: 1. No confundir Regla de L'Hôpital con derivada de un cociente. NO ES VERDAD QUE:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'.$$

2. A veces hay que aplicar la regla varias veces hasta poder calcular el límite.

3. A la hora de aplicar la regla, **es importante comprobar que el límite** que estamos tratando **es del tipo** $(\frac{0}{0})$ o $(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})$. Por ejemplo, claramente $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x} = 2$, pero si derivamos numerador y denominador, nos queda $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1} = 1 \neq 2$.

4. Si el límite $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ no existiera, ésto no significa que el límite original, $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ no exista. Por ejemplo, si aplicamos la regla de L'Hôpital al límite $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x}$ que es del tipo $(\frac{+\infty}{+\infty})$, nos queda:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos(x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} (1+\cos(x)),$$

que no existe. En cambio, el límite original sí que existe. De hecho::

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) = 1.$$

Ejemplo: Para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$, aplicamos la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

Ejemplo: Para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^2}$, aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2} = 0.$$

Nota: En principio, la Regla de L'Hôpital sólo se puede utilizar para límites indeterminados de tipo cociente. Por ello, si nos encontramos con otro tipo de indeterminación, debemos de transformarla hasta obtener una de tipo cociente a la que sí podemos aplicar la regla.

Ejemplo: Vamos a resolver una indeterminación del tipo $(+\infty-\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right) = (+\infty-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x\operatorname{sen}(x)} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

En este momento podemos aplicar la Regla de L'Hôpital para calcular el último límite (ejercicio).

Ejemplo: Si al calcular $\lim(f(x)\cdot g(x))$ se obtiene una indeterminación del tipo $0\cdot(\pm\infty)$, entonces podemos transformar la indeterminación en otra de tipo cociente si ponemos:

$$\lim(f(x)\cdot g(x)) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{o} \quad \lim(f(x)\cdot g(x)) = \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

De las dos posibilidades puede que sólo una nos conduzca a un límite más sencillo. La filosofía es siempre la de quedarnos con el límite que resulte más fácil de calcular.

Ejemplo: Como aplicación de lo anterior vamos a calcular $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$, que produce una indeterminación del tipo $0\cdot(-\infty)$. Podemos reescribir:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Este último límite es del tipo $(\frac{-\infty}{+\infty})$, por lo que podemos aplicar la Regla de L'Hôpital para deducir:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Obsérvese que también hubiéramos podido expresar el límite original como:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

Sin embargo, si aplicamos ahora la Regla de L'Hôpital no obtenemos un límite sencillo. De hecho, al aplicar L'Hôpital sucesivamente nuestro límite se va complicando cada vez más.

Ejercicio: Demostrar que:

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen}(x))^{\ln(x)} = 1.$$

2.8.2. Monotonía, puntos críticos y extremos locales de una función

Estudiar la monotonía de una función consiste en decidir en qué intervalos la función es creciente y en cuales es decreciente. Cuando la función es derivable ésto se realiza de forma sencilla discutiendo el signo de la derivada primera de la función.

Teorema 2.10. *Sea I un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Entonces:*

1. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es (estrictamente) creciente en I.*
2. *Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es (estrictamente) decreciente en I.*
3. *Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f es constante en I.*

En la siguiente gráfica se representan una función y su derivada. Observamos que a la izquierda del valor a, f' es positiva y f es creciente. Entre a y b, f' es negativa y, por tanto, f es decreciente. Por último, a la derecha del valor b, f' vuelve a ser positiva, por lo que f vuelve a ser creciente. Este ejemplo muestra también que una función no tiene por qué tener siempre el mismo tipo de monotonía.

Ahora nos preocuparemos de estudiar los puntos en los que *de algún modo* cambia la monotonía de una función.

Definición: Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo abierto I. Dado un punto $a \in I$, diremos que f tiene en a un:

- MÍNIMO LOCAL si hay un entorno $B(a,r)$ contenido en I en el que se cumple que $f(x) \geq f(a)$ (geométricamente, ésto significa que el valor más bajo de la gráfica de f en un entorno pequeño alrededor de a se alcanza justamente en a).

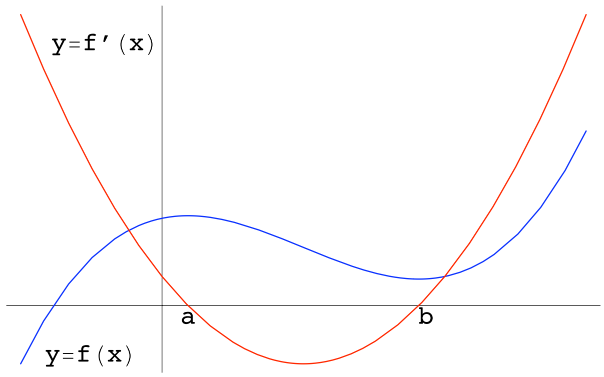


Figura 2.20: Una función y su derivada

- MÁXIMO LOCAL si hay un entorno $B(a,r)$ contenido en I en el que se cumple que $f(x) \leq f(a)$ (geométricamente, ésto significa que el valor más alto de la gráfica de f en un entorno pequeño alrededor de a se alcanza justamente en a).
- EXTREMO LOCAL si f tiene en a un mínimo local o un máximo local.
- PUNTO CRÍTICO si f es derivable en a y $f'(a) = 0$ (geométricamente, ésto significa que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es horizontal).

La derivación se muestra como una herramienta útil a la hora de estudiar los extremos locales de una función.

Teorema 2.11 (Principio de Fermat). *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo abierto. Si f es derivable en $a \in I$ y f alcanza en a un extremo local, entonces a es un punto crítico de f.*

Por tanto, los extremos locales de una función derivable sobre un intervalo abierto hay que buscarlos entre los puntos críticos de la función dentro de dicho intervalo. Como observación importante destacaremos que **no es cierto que en un punto crítico se alcance siempre un extremo local**. Esto ocurre por ejemplo con la función $f(x) = x^3$ en $a = 0$. Se motiva así el problema de clasificar los puntos críticos de una función, que consiste en decidir si en un punto crítico dado la función alcanza un extremo local (mínimo o máximo) o no. Para resolver esta cuestión existen dos criterios, que exponemos a continuación.

Teorema 2.12 (Criterio de la derivada primera). *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo abierto. Dado un punto crítico a de f en I, estudiamos el signo de $f'(x)$ en un entorno pequeño alrededor de a. Se tiene:*

1. *Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de a y $f'(x) > 0$ a la derecha, entonces a es un mínimo local de f.*
2. *Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de a y $f'(x) < 0$ a la derecha, entonces a es un máximo local de f.*
3. *Si $f'(x)$ no cambia de signo alrededor de a, entonces no hay extremo local en a.*

Así pues, en el ejemplo de la Figura 2.20, se tiene que f presenta un máximo local en a y un mínimo local en b. Esto puede ser deducido tanto a partir de la gráfica de $f(x)$ como de la gráfica de $f'(x)$.

Ejemplo: Estudiemos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=2\operatorname{arctg}(x-1)-x$. Al derivar una vez y simplificar nos queda:

$$f'(x)=\frac{2}{1+(x-1)^2}-1=\frac{2x-x^2}{1+(x-1)^2}.$$

La expresión anterior se anula si y sólo si $x=0$ y $x=2$. Así pues, éstos son los puntos críticos de la función, entre los que tendremos que buscar los extremos locales. Al discutir el signo de $f'(x)$ deducimos que $f'(x)<0$ para $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y $f'(x)>0$ para $x\in(0,2)$. Así pues, f es decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y creciente en $(0,2)$. Por tanto, se deduce que f presenta un mínimo local en $a=0$ y un máximo local en $a=2$.

Teorema 2.13 (**Criterio de la derivada segunda).** *Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función derivable dos veces sobre un intervalo abierto I. Dado un punto crítico a de f en I, estudiamos el signo de $f''(a)$. Entonces, se tiene lo siguiente:*

1. *Si $f''(a)>0$, entonces a es un mínimo local de f.*
2. *Si $f''(a)<0$, entonces a es un máximo local de f.*
3. *Si $f''(a)=0$, entonces no se puede asegurar nada.*

Ejercicio: Utilizar el criterio anterior para clasificar los puntos críticos de $f(x)=2\operatorname{arctg}(x-1)-x$.

Nota: los dos criterios empleados para clasificar un punto crítico a son diferentes. El primero exige el estudio del signo de $f'(x)$ alrededor de a, mientras que el segundo se basa en el estudio del signo de $f''(a)$. Nótese que el primer criterio nunca deja casos dudosos, mientras que el segundo sí.

2.8.3. Curvatura y puntos de inflexión de una función

En esta sección realizaremos un tratamiento muy parecido al de la anterior para estudiar un nuevo aspecto de la gráfica de una función que, en este caso, está controlado por la derivada segunda: la curvatura de la función. Necesitaremos unos conceptos previos.

Definición: Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función definida en un intervalo abierto I. Diremos que f es:

1. CONVEXA en I si cada recta secante a la curva $y=f(x)$ deja a la gráfica por debajo.
2. CÓNCAVA en I si cada recta secante a la curva $y=f(x)$ deja a la gráfica por encima.

Nota: los términos *convexo* y *cóncavo* no se emplean de forma consistente. Sin embargo, en la mayor parte de los textos matemáticos se utiliza la misma terminología que nosotros hemos adoptado.

Estudiar la curvatura de una función consiste en decidir los intervalos donde f es convexa y aquellos donde es cóncava. Cuando la función es derivable dos veces el estudio de su curvatura se realiza de forma sencilla discutiendo el signo de la derivada segunda de la función.

Teorema 2.14. *Sea I un intervalo abierto y $f:I\to\mathbb{R}$ una función derivable dos veces en I. Entonces:*

1. *Si $f''(x)>0$ para todo $x\in I$, entonces f es convexa en I.*
2. *Si $f''(x)<0$ para todo $x\in I$, entonces f es cóncava en I.*
3. *Si $f''(x)=0$ para todo $x\in I$, entonces la gráfica de f en I es una recta.*

Ahora estudiaremos los puntos en los que cambia la curvatura de una función.

Definición: Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo abierto I. Dado un punto $a \in I$, diremos que f tiene en a un:

- PUNTO DE INFLEXIÓN CONVEXO-CÓNCAVO si hay un entorno $B(a,r) = (a-r, a+r)$ contenido en I de forma que f es convexa en $(a-r,a)$ y cóncava en $(a,a+r)$.
- PUNTO DE INFLEXIÓN CÓNCAVO-CONVEXO si hay un entorno $B(a,r) = (a-r, a+r)$ contenido en I de forma que f es cóncava en $(a-r,a)$ y convexa en $(a,a+r)$.

La derivación se muestra como una herramienta útil a la hora de estudiar los puntos de inflexión de una función.

Teorema 2.15. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable sobre un intervalo abierto I. Si f es derivable dos veces en $a \in I$ y f presenta un punto de inflexión en a, entonces $f''(a) = 0$, lo que geométricamente significa que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ atraviesa a la gráfica.*

Por tanto, los puntos de inflexión de una función derivable dos veces sobre un intervalo abierto hay que buscarlos entre los puntos que anulan a la derivada segunda. Como observación importante destacaremos que **no es cierto que en un punto con derivada segunda nula se alcance siempre un punto de inflexión**. Esto le ocurre por ejemplo a la función $f(x) = x^4$ en $a = 0$. Se motiva así el problema de clasificar los puntos donde $f''(x) = 0$, que consiste en decidir si en tales puntos la función alcanza un punto de inflexión o no. Para resolver esta cuestión existen dos criterios, que exponemos a continuación.

Teorema 2.16 (Criterio de la derivada segunda). *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable dos veces en un intervalo abierto. Dado un punto $a \in I$ donde $f''(a) = 0$, estudiamos el signo de $f''(x)$ en un entorno pequeño alrededor de a. Se tiene:*

1. *Si $f''(x) < 0$ a la izquierda de a y $f''(x) > 0$ a la derecha, entonces a es un punto de inflexión cóncavo-convexo de f.*
2. *Si $f''(x) > 0$ a la izquierda de a y $f''(x) < 0$ a la derecha, entonces a es un punto de inflexión convexo-cóncavo de f.*
3. *Si $f''(x)$ no cambia de signo alrededor de a, entonces no hay punto de inflexión en a.*

Ejemplo: Vamos a estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2\operatorname{arc\,tg}(x-1) - x$. Como vimos antes, su derivada primera es $f'(x) = \frac{2x-x^2}{1+(x-1)^2}$, que se anula en $x = 0$ y en $x = 2$. Calculamos ahora su derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(2-2x)(x^2-2x+2)-(2x-x^2)(2x-2)}{(1+(x-1)^2)^2} = \frac{4(1-x)}{(1+(x-1)^2)^2}.$$

La expresión anterior se anula si y sólo si $x = 1$. Además, $f''(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 1)$ y $f''(x) < 0$ cuando $x \in (1, +\infty)$. Así pues, f es convexa en $(-\infty, 1)$ y cóncava en $(1, +\infty)$. Además, deducimos que f tiene un punto de inflexión convexo-cóncavo en $x = 1$.

Teorema 2.17 (Criterio de la derivada tercera). *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable tres veces sobre un intervalo abierto I. Dado un punto $a \in I$ donde $f''(a) = 0$, estudiamos el signo de $f'''(a)$. Entonces, se tiene lo siguiente:*

1. *Si $f'''(a) > 0$, entonces a es un punto de inflexión cóncavo-convexo de f.*

2. *Si $f'''(a) < 0$, entonces a es un punto de inflexión convexo-cóncavo de f.*

3. *Si $f'''(a) = 0$, entonces no se puede asegurar nada.*

Ejercicio: Utilizar el criterio anterior para estudiar los puntos de inflexión de $f(x) = 2\operatorname{arc\,tg}(x-1) - x$.

Nota: los dos criterios empleados para clasificar un punto donde $f''(a) = 0$ son diferentes. El primero exige el estudio del signo de $f''(x)$ alrededor de a, mientras que el segundo se basa en el estudio del signo de $f'''(a)$. Nótese que el primer criterio nunca deja casos dudosos, mientras que el segundo sí.

2.8.4. Optimización de funciones

En mucho problemas cotidianos es importante analizar si una determinada función alcanza sus valores mínimo y/o máximo absolutos. En esta sección aprenderemos a resolver este tipo de cuestiones. Antes daremos un par de definiciones.

Definición: Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre un intervalo cualquiera. Dado $a \in I$, diremos que f alcanza en a su

1. MÍNIMO ABSOLUTO si $f(x) \geq f(a)$ para cada $x \in I$.

2. MÁXIMO ABSOLUTO si $f(x) \leq f(a)$ para cada $x \in I$.

Diremos que f alcanza en a un extremo absoluto si alcanza su mínimo absoluto o su máximo absoluto.

Notas: 1. No hay que confundir el mínimo absoluto (resp. máximo absoluto) de una función con los puntos donde ese mínimo (resp. máximo) se alcanza. Por ejemplo, para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, su mínimo absoluto (el valor más pequeño que toma la función) es -1, que se alcanza en todos los puntos de la forma $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, con k un número entero. Por otro lado, su máximo absoluto (el valor más grande que toma la función) es 1, que se alcanza en todos los puntos de la forma $x = \pi/2 + 2k\pi$, con k un número entero.

2. La relación entre extremo absoluto y extremo local no es tan evidente como parece. Lo que es claro es que si f alzanza en a un extremo local, entonces no tiene por qué alcanzar en a un extremo absoluto (podría haber valores de x alejados de a donde la función tomara un valor más grande o más pequeño que en a). Por otro lado, si f alcanza en a un extremo absoluto y el punto a **pertenece al interior del intervalo** I, entonces f alcanza en a un extremo local. Sin embargo, **ésto no es cierto si** a **es un punto de la frontera del intervalo** I.

3. Los extremos absolutos de una función en un intervalo abierto no tienen por qué alcanzarse (aunque la función sea derivable). Por ejemplo, la función $f(x) = x$ no alcanza su mínimo absoluto ni su máximo absoluto en el intervalo $(-1,1)$. Lo mismo le pasa a la función $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ si $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $f(-\pi/2) = 0$ y $f(\pi/2) = 0$.

Evidentemente, es deseable disponer de criterios cómodos para garantizar que una función alcanza sus extremos absolutos. Un buen resultado en relación con este problema es el Teorema de Weierstrass.

Teorema 2.18 (de Weierstrass). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado. Entonces, f alcanza en $[a,b]$ sus extremos absolutos.*

Supongamos que tenemos $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Gracias al Teorema de Weierstrass sabemos que f debe alcanzar su mínimo y su máximo absolutos en $[a,b]$. Si el extremo absoluto se alcanza en un punto de (a,b), entonces deberá ser también un extremo local y, por tanto, un punto crítico. Pero también podría ocurrir que f alcanzase sus extremos absolutos en los puntos frontera del intervalo.

Así pues, para calcular los extremos absolutos de una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, que es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), se procede como sigue:

1. Se calculan los puntos críticos de f en (a,b).
2. Se calcula la imagen de dichos puntos críticos, y también las imágenes de los puntos a y b. La imagen menor/mayor corresponderá al mínimo/máximo absoluto de la función, que se alcanzará en el punto correspondiente.

Ejemplo: Vamos a calcular los extremos absolutos de la función $f:[0,3\pi]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=2\,\mathrm{sen}(x)-x$. La existencia de extremos absolutos está garantizada por el Teorema de Weierstrass, al ser f continua en $[0,3\pi]$. Para determinar los puntos críticos de f en $(0,3\pi)$ calculamos su derivada primera y la igualamos a cero:

$$f'(x)=2\cos(x)-1,\quad f'(x)=0\Leftrightarrow\cos(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\begin{cases}\pi/3+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ 5\pi/3+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

Ahora bien, puesto que sólo nos interesan los puntos críticos de f en $(0,3\pi)$, nos quedamos con las soluciones $\pi/3$, $5\pi/3$ y $7\pi/3$. Ahora basta con evaluar f en los puntos anteriores y también en los puntos de la frontera del intervalo $[0,3\pi]$. Obtenemos:

$$f(0)=2\,\mathrm{sen}(0)-0=0,\qquad f(\tfrac{\pi}{3})=2\,\mathrm{sen}(\tfrac{\pi}{3})-\tfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\tfrac{\pi}{3},$$

$$f(5\tfrac{\pi}{3})=2\,\mathrm{sen}(5\tfrac{\pi}{3})-5\tfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}-5\tfrac{\pi}{3},\quad f(7\tfrac{\pi}{3})=2\,\mathrm{sen}(7\tfrac{\pi}{3})-7\tfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}-7\tfrac{\pi}{3},$$

$$f(3\pi)=2\,\mathrm{sen}(3\pi)-3\pi=-3\pi.$$

Es fácil deducir entonces que el máximo absoluto vale $\sqrt{3}-\pi/3$ y se alcanza en el punto $x=\pi/3$, mientras que el mínimo absoluto vale -3π y se alcanza en el punto $x=3\pi$ (véase Figura 2.21).

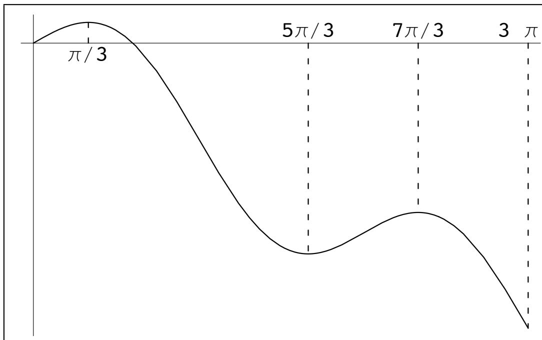


Figura 2.21: Gráfica de $f(x)=2\,\mathrm{sen}(x)-x$ en $[0,3\pi]$

En otras ocasiones nos interesará asegurar la existencia de extremos absolutos de una función dentro de un intervalo abierto. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.19. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable sobre un intervalo abierto I. Sea $a \in I$ un punto crítico de f. Estudiamos el signo de $f'(x)$ en todo el intervalo I. Entonces:*

1. *Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de a y $f'(x) > 0$ a la derecha, entonces f alcanza en a su mínimo absoluto.*

2. *Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de a y $f'(x) < 0$ a la derecha, entonces f alcanza en a su máximo absoluto.*

Ejemplo: La función $f(x) = x^2 + 1$ alcanza en $a = 0$ su mínimo absoluto, que vale $f(0) = 1$. La función $g(x) = 1 - x^4$ alcanza en $a = 0$ su máximo absoluto, que vale $g(0) = 1$.

2.9. Representación gráfica de funciones

El conocimiento que nos puede proporcionar la gráfica de una función sobre el fenómeno representado por la función es bastante amplio. Así, un simple vistazo a la gráfica puede informarnos acerca de mínimos, máximos, comportamientos del fenómeno para tiempos grandes, asíntotas, saltos de la función, etc. Por todo ésto resulta importante poder dibujar de forma aproximada la gráfica de una función.

A la hora de llevar a cabo la representación gráfica de una función $f(x)$ se deben seguir los siguientes pasos:

1. **Dominio de f:** Si nos viene dado, no tendremos nada que hacer, pero si sólo tenemos la expresión analítica de la función, habrá que calcular su *dominio*, es decir el conjunto de números reales más grande en el que la expresión que define a f tiene sentido.

2. **Corte con los ejes:** El punto de corte con el eje de ordenadas sólo se puede calcular cuando $a = 0$ sea un punto del dominio de la función. En tal caso, el punto de corte es $(0, f(0))$. Los puntos de corte con el eje de abcisas se obtienen al resolver la ecuación $f(x) = 0$.

3. **Simetrías:** Debemos estudiar si la función es par o impar, o ninguna de las dos cosas. Esta información nos puede simplificar el dibujo de la la gráfica.

4. **Continuidad y asíntotas:** Estudiaremos los intervalos donde la función es continua y la naturaleza de las discontinuidades presentadas. También calcularemos las posibles asíntotas de la función.

5. **Monotonía y puntos críticos:** Incluye el estudio de la monotonía de la función, es decir, de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como el calculo y la clasificación de los puntos críticos.

6. **Curvatura y puntos de inflexión:** Incluye el estudio de la curvatura de la función, es decir, de los intervalos donde la funcion es convexa y cóncava, así como sus posibles puntos de inflexión.

A continuación, empezaremos representando los puntos que hemos ido obteniendo (puntos de corte con los ejes, extremos locales, puntos de inflexión, etc). Luego, dibujaremos la gráfica teniendo en cuenta toda la información obtenida en los apartados anteriores.