Tema 2

Elementos de geometría lineal en $\mathbb{R}^n$

2.1. Estructura vectorial de $\mathbb{R}^n$. Subespacios vectoriales

En el tema de introducción (tema 0) se comentó cómo se puede identificar el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con una recta. De igual forma, se puede pensar que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ representa a un plano y $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ al espacio tridimensional. Repasemos algunos hechos sobre vectores en el plano.

Un VECTOR EN EL PLANO se representa por un segmento orientado de recta. La recta que contiene al vector se llama dirección del vector. El sentido de un vector es el indicado por el vector de entre los dos que tiene la dirección del vector. La longitud de un vector es la medida del segmento representado por el vector. Se establece el convenio de que dos vectores son iguales si tienen direcciones paralelas, el mismo sentido y la misma longitud. Dos vectores son proporcionales o paralelos si sus direcciones son rectas paralelas.

Los vectores son elementos geométricos con los que se pueden realizar varias operaciones. Las más relevantes para nosotros en este apartado del tema son la *suma de vectores* y el *producto de números reales por vectores*.

Geométricamente, la suma de dos vectores u y v es un nuevo vector $u+v$, cuya construcción viene dada por la regla del paralelogramo descrita en la siguiente figura:

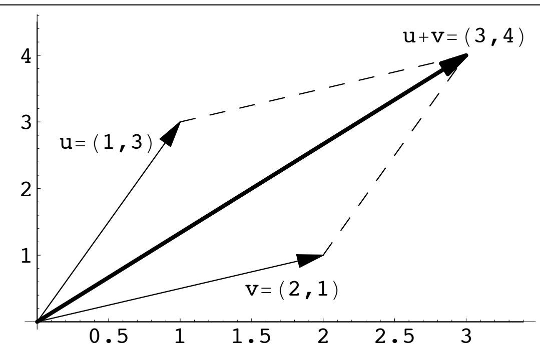

Figura 2.1: Suma de vectores

Por otro lado, el producto de un número real λ por un vector v es un nuevo vector λv, que tiene la misma dirección que v, el mismo sentido que v si $\lambda \geq 0$ o sentido opuesto si $\lambda < 0$, mientras que la longitud coincide con la longitud de v multiplicada por $|\lambda|$. En particular, si $|\lambda| < 1$ el vector original se contrae, y si $|\lambda| > 1$ se dilata. Todo ésto se ilustra en la siguiente figura:

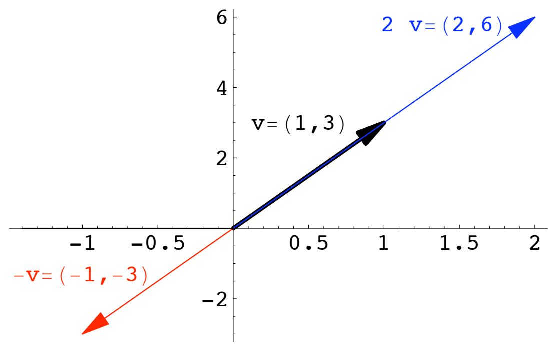

Figura 2.2: Producto de un número real y un vector

A la hora de trabajar con vectores resulta conveniente asociar a cada vector unas coordenadas, dando así lugar a la geometría analítica. Para ello necesitamos un *sistema de referencia cartesiano*. Un sistema de referencia cartesiano en el plano está formado por un punto O del plano llamado origen del sistema, y por un par de vectores $\{i, j\}$ que son perpendiculares y de longitud uno.

Dado un sistema de referencia y un vector v, siempre eligiremos para referirnos a v el único representante de v cuyo punto inicial es el origen del sistema de referencia. Ahora, si proyectamos v sobre cada uno de los ejes que contienen a los vectores i, j, obtenemos dos vectores v_i y v_j de forma que $v = v_i + v_j$. Además, es claro que $v_i = x\,i$, y que $v_j = y\,j$ para ciertos números reales x e y. Por tanto, tenemos $v = x\,i + y\,j$. Al par (x, y) de $\mathbb{R}^2$ lo llamaremos COORDENADAS de v en el sistema de referencia.

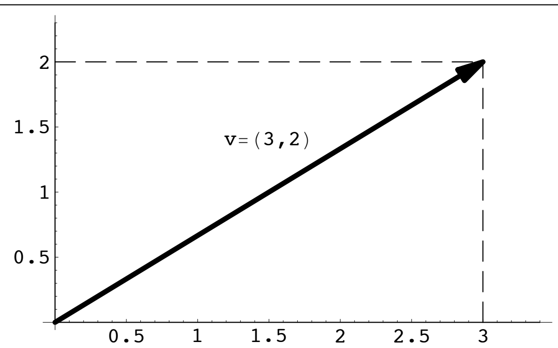

Figura 2.3: Coordenadas de un vector

De este modo, los vectores del plano quedan asociados de manera única con un par de números reales o, lo que es lo mismo, con un elemento (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Las operaciones suma de vectores y producto de un número por un vector se expresan en coordenadas de la siguiente forma. Dados $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, la suma $u + v$ es el vector con coordenadas $(x + x', y + y')$ (simplemente se suma coordenada a coordenada). Dados $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, el producto λv es el vector de coordenadas $(\lambda x, \lambda y)$ (se multiplica el número por cada una de las coordenadas del vector original).

Nota: Todo lo que hemos hecho hasta ahora en $\mathbb{R}^2$ se puede realizar también en $\mathbb{R}^3$ con las correspondientes adaptaciones. En Física muchas veces los vectores en $\mathbb{R}^3$ se escriben con una flecha encima, y se representan mediante las componentes $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$. Así pues, el vector $v = (2,-3,5)$ se escribiría $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$. También se suele escribir $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ en vez de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

En general, se pueden definir la suma y el producto por números (o escalares) reales en el espacio $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ldots,x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Más concretamente, se define:

- $(x_1,\ldots,x_n) + (y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$.
- $\lambda(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$.

Es fácil comprobar que $\mathbb{R}^n$, con las operaciones anteriores, verifica una serie de propiedades que se enuncian a continuación.

Suma. Sean $u,v,w \in \mathbb{R}^n$. Entonces se verifica:

1. Asociativa: $(u+v)+w = u+(v+w)$.
2. Neutro: el vector $0 = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ verifica que $v+0 = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.
3. Elemento opuesto: para cada $v = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ el vector opuesto $-v = (-x_1,\ldots,-x_n)$ cumple que $v+(-v) = 0$.
4. Conmutativa: $u+v = v+u$.

Producto por números. Sean $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ y $u,v \in \mathbb{R}^n$. Se verifica:

1. Distributivas: $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$, $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$.
2. Pseudoasociativa: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.
3. Modular: $1v = v$.

Existen otros conjuntos diferentes de $\mathbb{R}^n$ donde también se pueden sumar los elementos y multiplicarlos por números reales, de forma que se siguen cumpliendo todas las propiedades anteriores. A este tipos de conjuntos se les llama *espacios vectoriales*.

Definición: Un ESPACIO VECTORIAL REAL es un conjunto no vacío V en el que hay definidas una suma $+$ de elementos de V y un producto $\cdot$ de números reales por elementos de V, verificando estas propiedades:

Suma. Sean $u,v,w \in V$. Entonces se verifica:

1. Asociativa: $(u+v)+w = u+(v+w)$.
2. Neutro: existe un vector $0 \in V$ tal que $v+0 = v$ para todo $v \in V$.
3. Elemento opuesto: para cada $v \in V$, el vector opuesto $-v$ cumple que $v+(-v) = 0$.
4. Conmutativa: $u+v = v+u$.

Producto por números. Sean $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ y $u,v \in V$. Se verifica:

1. Distributivas: $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$, $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$.
2. Pseudoasociativa: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.
3. Modular: $1v = v$.

Ejemplos:

- Como ya hemos mencionado, $\mathbb{R}^n$ con las operaciones de suma y producto por números reales definidas anteriormente es un espacio vectorial. De hecho, será el más importante para nosotros.
- El conjunto $\mathcal{M}_{n\times m}$ de las matrices $n\times m$ con la suma de matrices y el producto por números reales definido en el tema 1 es un espacio vectorial.
- El conjunto $\mathcal{P}_3=\{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0:\ a_i\in\mathbb{R}\}$, cuyos elementos son los polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes reales es un espacio vectorial, con la suma de polinomios usual y el producto por números reales. De igual forma lo es $\mathcal{P}_n$, el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a n, para cualquier $n\in\mathbb{N}$.

A continuación estudiaremos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son espacios vectoriales. Evidentemente, el propio $\mathbb{R}^n$ lo cumple aunque, como veremos enseguida, hay muchos más.

Definición: Un SUBESPACIO VECTORIAL (O SUBESPACIO) de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto $U\subseteq\mathbb{R}^n$ que es un espacio vectorial con la suma y el producto por números definidos en $\mathbb{R}^n$.

La forma más sencilla de comprobar que un subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial es a través del siguiente resultado:

Lema 2.1 (Primera caracterización de los subespacios)**.** *Un subconjunto no vacío U de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial si y sólo si se cumplen dos propiedades:*

1. *Si v_1 y v_2 están en U, entonces v_1+v_2 está en U.*
2. *Si $v\in U$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces $\lambda v\in U$.*

Es decir, si U es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ entonces la suma y el producto por números de vectores de U deben quedarse en U.

Nota importante: Del resultado anterior se deduce que si U es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ entonces $0\in U$. Esto proporciona una condición NECESARIA para que un subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ sea un subespacio. Sin embargo, esta condición NO ES SUFICIENTE, es decir, no es verdad que si $0\in U$ entonces U es un subespacio. Más adelante ilustraremos ésto con un ejemplo.

Dentro de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ las operaciones suma de vectores y producto de números por vectores son importantes. Vamos a realizar ahora estas operaciones de una forma más general.

Sean $\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ vectores distintos de $\mathbb{R}^n$. Una COMBINACIÓN LINEAL de $\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ obtenido al expandir o contraer cada uno de los vectores v_i y luego sumar los vectores resultantes. Dicho de otras palabras, es un vector obtenido del siguiente modo:

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_m v_m,$$

donde $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ son números reales.

El concepto de combinación lineal nos lleva a la siguiente caracterización de los subespacios:

Lema 2.2 (Segunda caracterización de los subespacios)**.** *Un subconjunto no vacío U de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial si y sólo si cada combinación lineal de vectores de U es un nuevo vector de U.*

Ejemplos:

- Los subconjuntos $U_1 = \{0\}$ y $U_2 = \mathbb{R}^n$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$. Evidentemente, son los subespacios mas pequeños y más grandes, respectivamente, que puede haber.
- En $\mathbb{R}^2$, el eje de abcisas $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\}$ es un subespacio vectorial. Igualmente lo es el eje de ordenadas $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0\}$.
- Sea U el conjunto formado por la unión de los dos ejes de coordenadas de $\mathbb{R}^2$, es decir, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Es claro que $0 = (0,0) \in U$. Sin embargo, U no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Obsérvese que si $v \in U$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda v \in U$. No obstante, no es cierto que la suma de dos vectores de U se quede dentro de U. Esto se puede comprobar con los vectores $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0,1)$.
- La circunferencia $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ no es un subespacio vectorial. Por ejemplo, si multiplicamos por $\lambda = 2$ el vector $v = (1,0)$, el resultado se sale fuera de la circunferencia. Otra razón: el vector $0 = (0,0)$ no pertenece a la circunferencia.
- El subconjunto $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = -1\}$ no es un subespacio vectorial ya que se trata del conjunto vacío.

Ahora intentaremos visualizar e identificar de una forma más precisa cómo son los subespacios de $\mathbb{R}^n$ cuando $n = 2,3$. Para ello, estudiaremos las dos formas más usuales de construir subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

2.1.1. Subespacio generado por una familia finita de vectores

Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una familia finita de vectores de $\mathbb{R}^n$ distintos dos a dos. Se define el SUBESPACIO GENERADO POR S como el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S. Lo representaremos por $\langle S \rangle$ o por $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. En resumen, se tiene:

$$\langle S \rangle = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m : \ \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

Nota: Se comprueba efectivamente que $\langle S \rangle$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Es conveniente observar que, aunque en la familia S hay una cantidad FINITA de vectores, en $\langle S \rangle$ hay, en principio, una cantidad INFINITA de vectores de $\mathbb{R}^n$.

Notación: Dados $\{v_1, \ldots, v_m\}$ vectores de $\mathbb{R}^n$, representaremos por $M(v_1, \ldots, v_m)$ a la matriz de orden $n \times m$ cuya columna i-ésima contiene las coordenadas del vector v_i.

En la práctica, para saber si un determinado vector $v \in \mathbb{R}^n$ pertenece o no a $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, tenemos que comprobar si existen números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de forma que $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = v$. Al escribir esta igualdad en coordenadas aparece un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ y cuya matriz ampliada es $M(v_1, \ldots, v_m, v)$. Por tanto, $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ si y sólo si el SEL cuya matriz ampliada es $M(v_1, \ldots, v_m, v)$ es compatible.

Ejemplos:

- Dado un único vector $v \in \mathbb{R}^n$, el subespacio $\langle v \rangle$ está formado por todos los vectores de la forma λv con $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, por todos los vectores que son paralelos o proporcionales a v. Si $v = 0$ entonces es claro que $\lambda v = 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y deducimos que $\langle v \rangle = \{0\}$. Si $v \neq 0$ entonces hay infinitos vectores en $\langle v \rangle$ obtenidos al comprimir o dilatar el vector v en el mismo sentido que v o en el opuesto. Los vectores obtenidos de esta manera llenan una recta: la *recta vectorial generada por* v. Esta recta es la que pasa por 0 con vector director v.

- En $\mathbb{R}^2$, el eje de abscisas $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ es la recta vectorial generada por el vector $v = (1,0)$. El eje de ordenadas $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ es la recta generada por $v = (0,1)$.
- Supongamos ahora que $S = \{v_1, v_2\}$ donde v_1 y v_2 son dos vectores distintos de $\mathbb{R}^n$. Podemos suponer que ni v_1 ni v_2 coinciden con el vector 0 (de lo contrario, nos encontraríamos en el caso anterior). El subespacio $\langle S \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ estará entonces formado por todas las combinaciones lineales de v_1 y v_2, es decir, por vectores de la forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Cuando tomamos $\lambda_2 = 0$ o $\lambda_1 = 0$ vamos obteniendo todos los vectores paralelos a v_1 y a v_2 respectivamente. Esto significa que $\langle S \rangle$ contiene a las rectas vectoriales generadas por v_1 y por v_2. Si v_1 y v_2 son paralelos, entonces $\langle S \rangle$ coincide exactamente con dichas rectas vectoriales que, además, son coincidentes. Sin embargo, cuando v_1 y v_2 no son paralelos, entonces $\langle S \rangle$ coincide con un plano que pasa por 0 y que llamamos *plano vectorial generado por* v_1 y v_2.
- En $\mathbb{R}^3$, el plano coordenado $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0)$ es el plano vectorial generado por los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$. Se comprueba que el vector $v = (0,0,1)$ no pertenece a este plano.
- En $\mathbb{R}^3$, el subespacio generado por los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ coincide con $\mathbb{R}^3$.

Dado un subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^n$ y un vector $v \in U$ distinto de 0, la primera caracterización de los subespacios implica que $\langle v \rangle$ está contenido en U, es decir, U contiene a toda la recta vectorial generada por U. De esta forma, podemos afirmar que los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ están formados por uniones de rectas que pasan por 0.

La forma de construir subespacios que hemos aprendido aquí puede parecer muy particular. Sin embargo, se tiene lo siguiente:

Teorema 2.3 (Sistemas de generadores de un subespacio)**.** *Dado un subespacio U de $\mathbb{R}^n$, existe una familia S formada por una cantidad finita de vectores de U de forma que $U = \langle S \rangle$. En tal caso, diremos que S es un sistema de generadores de U.*

A partir del resultado anterior y de los ejemplos estudiados, se pueden probar estos dos teoremas:

Teorema 2.4 (Subespacios de $\mathbb{R}^2$)**.** *Los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$, además del subespacio nulo $\{0\}$ y del total $\mathbb{R}^2$, son las rectas del plano que pasan por el origen.*

Teorema 2.5 (Subespacios de $\mathbb{R}^3$)**.** *Los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, además del subespacio nulo $\{0\}$ y del total $\mathbb{R}^3$, son las rectas y los planos que pasan por el origen.*

2.1.2. Subespacio solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo

Otra forma usual de definir un subespacio vectorial en $\mathbb{R}^n$ es a partir de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, es decir:

$$U = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = 0 \\ & \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = 0 \end{array} \right\}.$$

Nota: Se demuestra de forma sencilla que U es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Esto nos permite de alguna forma saber la forma geométrica que tienen las soluciones de un SEL homogéneo. Cuando el SEL homogéneo que define a U sea compatible determinado entonces $U = \{0\}$. En general, las soluciones de un SEL forman un subespacio si y sólo si el SEL es homogéneo. Tampoco es cierto que, en general, las soluciones de cualquier sistema de ecuaciones con n incógnitas formen un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Todo ésto se puede ilustrar con ejemplos.

Ejemplos:

- El conjunto $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 - y = 0\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.
- El conjunto $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. De hecho, $U = \{0\}$.
- El conjunto $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = 0\}$ es un subespacio al ser el conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea. De hecho, U coincide con el eje de abcisas en el plano.

La forma de construir subespacios que hemos aprendido aquí puede parecer muy particular. Sin embargo, se tiene lo siguiente:

Teorema 2.6 (Ecuaciones implícitas de un subespacio)**.** *Dado un subespacio U de $\mathbb{R}^n$, existe un SEL homogéneo cuyas soluciones son exactamente los vectores de U. Diremos que las ecuaciones del SEL son unas ecuaciones implícitas para U.*

En este momento aprenderemos como expresar un subespacio del tipo $\langle S \rangle$ como subespacio de soluciones de un SEL homogéneo y viceversa.

1. Para obtener a partir de un subespacio $U = \langle S \rangle = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ unas ecuaciones implícitas, consideramos las matrices $M = M(v_1, \ldots, v_m)$ y $M^* = M(v_1, \ldots, v_m, v)$, donde $v = (x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de un vector genérico $v \in U$. Como el SEL asociado a M^* ha de ser compatible tendremos, por el teorema de Rouché-Frobenius, que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(M^*)$, lo que nos permitirá calcular de forma sencilla unas ecuaciones implícitas para el subespacio U.

Ejemplo: Supongamos que tenemos el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por $U = \langle (1,1,1), (2,2,2), (1,0,0) \rangle$. Queremos calcular unas ecuaciones implícitas para U. Consideramos la matriz M de orden 3×3 cuyas columnas son los vectores que generan U. Se comprueba enseguida que $\operatorname{rg}(M) = 2$. Por otro lado, consideramos la matriz M^* de orden 3×4 obtenida al añadir a M una columna cuyos elementos son (x,y,z). Cuando $(x,y,z) \in U$ sabemos que el SEL cuya matriz ampliada es M^* tiene que ser compatible, lo que obliga a que $\operatorname{rg}(M^*) = 2$. Ahora no es difícil usar transformaciones elementales para comprobar que $\operatorname{rg}(M^*) = 2$ si y sólo si $-y + z = 0$. Concluimos que $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; -y + z = 0\}$, y que $-y + z = 0$ es una ecuación implícita para U.

2. Recíprocamente, si tenemos U expresado como subespacio solución de un SEL homogéneo y queremos encontrar una familia finita de vectores S de forma que $U = \langle S \rangle$, basta con resolver el SEL y expresar las soluciones como vectores que dependen de unos parámetros. Al separar los parámetros nos quedan unos vectores que generan todas las soluciones del SEL. Estos vectores forman el sistema de generadores de U que buscamos.

Ejemplo: Supongamos que tenemos el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{ccccc} 2x & +y & -z & +3t & = 0 \\ x & & +2z & +t & = 0 \end{array} \right\}.$$

Buscamos una familia de vectores S de $\mathbb{R}^4$ de forma que $U = \langle S \rangle$. Para ello, resolvemos por el método de Gauss el SEL anterior. Obtenemos que las soluciones son de la forma $x = -2\alpha - \beta$, $y = 5\alpha - \beta$,

$z = \alpha$, $t = \beta$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si ponemos las soluciones como un vector (x,y,z,t), entonces tenemos:

$$(x,y,z,t) = (-2\alpha - \beta, 5\alpha - \beta, \alpha, \beta) = \alpha\,(-2,5,1,0) + \beta\,(-1,-1,0,1),$$

lo que nos indica que las soluciones del SEL son siempre combinaciones lineales de los vectores $(-2,5,1,0)$ y $(-1,-1,0,1)$. Concluimos entonces que $U = \langle(-2,5,1,0),(-1,-1,0,1)\rangle$.

2.2. Bases y dimensión de un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Coordenadas

Recordemos que un sistema de referencia cartesiano en el plano nos permite recuperar todos los vectores del plano (que son infinitos) a partir de sólo dos vectores $\{i, j\}$ mediante una combinación lineal de los mismos, cuyos coeficientes son las coordenadas del vector en el sistema de referencia. En esta sección perseguiremos una idea parecida dentro de cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$. Esto nos llevará a la noción de *base* de un subespacio.

2.2.1. Sistemas de generadores de un subespacio

Ya sabemos que si U es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ entonces existe una cantidad finita $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ de vectores de U de forma que $U = \langle S\rangle$. Decimos entonces que S es un SISTEMA DE GENERADORES de U. Esto significa que cualquier vector de U se puede expresar como combinación lineal de los vectores de S. Así, para cada $v \in U$, existen números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que:

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m.$$

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es un sistema de generadores. De hecho, cualquier vector (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, se escribe como:

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

- Ya vimos que $S_1 = \{(1,0)\}$ es un sistema de generadores de $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\}$, y que $S_2 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ es un sistema de generadores de $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0\}$.

- Como ejercicio, estudiar si los conjuntos de vectores $S_1 = \{(1,1),(1,-1)\}$ y $S_2 = \{(2,0),(5,0)\}$ son sistemas de generadores de $\mathbb{R}^2$.

- El conjunto $S = \{(0,1,3),(0,2,1),(0,1,-1)\}$ no es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$, ya que cualquier combinación lineal de los vectores de S vale cero en su primera coordenada. En particular, el vector $(2,0,0)$ no es combinación lineal de estos vectores.

Algunas propiedades de los sistemas de generadores que destacamos son las siguientes:

1. Si S es un sistema de generadores de U y S' es un conjunto de vectores de U con $S \subseteq S'$, entonces S' es también un sistema de generadores de U.

2. Si S es un sistema de generadores de U y un vector v de S se puede escribir como combinación lineal de los demás vectores de S, entonces $S - \{v\}$ es también un sistema de generadores de S.

De las dos propiedades anteriores, la segunda es más interesante, pues nos ayuda a refinar un sistema de generadores para quedarnos con la cantidad más pequeña posible de vectores que generan un subespacio.

Dedicaremos el resto de este apartado a exponer formas prácticas de calcular sistemas de generadores de un subespacio U.

1. Si $U = \{0\}$ entonces el único sistema de generadores posible es $S = \{0\}$.

2. Si $U = \langle S \rangle$ entonces S es, por definición de $\langle S \rangle$, un sistema de generadores de U.

3. Si U es el subespacio solución de un SEL homogéneo ya estudiamos como se puede obtener un sistema de generadores de U mediante la resolución del SEL.

4. Sólo queda por analizar el caso $U = \mathbb{R}^n$. Para esta situación usaremos el siguiente resultado:

Teorema 2.7. *Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunto finito de vectores de $\mathbb{R}^n$. Sea M la matriz $n \times m$ cuyas columnas son los vectores de S. Entonces, S es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$ si y sólo $rg(M) = n$. En particular, se deduce que cualquier sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$ debe de tener al menos n vectores.*

Idea de la demostración: Necesitamos que todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ sea combinación lineal de los vectores de S. Sabemos que ésto equivale a que para cada vector genérico $v = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, el SEL cuya matriz ampliada es la matriz M^*, que se obtiene al añadir a M la columna con las coordenadas de v, sea compatible. Esto equivale, por el teorema de Rouché-Frobenius, a que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M^*)$. Ahora, si $\mathrm{rg}(M) < n$ entonces se puede elegir siempre un vector $v \in \mathbb{R}^n$ de forma que $\mathrm{rg}(M) < \mathrm{rg}(M^*)$ (ésto es sencillo de ver en un ejemplo concreto), con lo que v no sería combinación lineal de los vectores de S. Por tanto, es obligado que $\mathrm{rg}(M) = n$.

Ejemplo: Usando el teorema anterior se puede comprobar enseguida que la familia de vectores $S = \{(1,1,0), (1,0,-1), (2,1,1), (2,-1,0)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.

2.2.2. Independencia lineal de vectores

En este apartado aprenderemos un concepto que nos ayudará a refinar los sistemas de generadores de un subespacio de forma que podamos producir sistemas de generadores irreducibles, es decir, que contengan la cantidad de vectores mínima necesaria para generar el subespacio.

Definición: Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una familia finita de vectores de $\mathbb{R}^n$. Diremos que los vectores de S son LINEALMENTE INDEPENDIENTES si ningún vector v_i de S se puede expresar como combinación lineal de los restantes vectores de S. De lo contrario, diremos que los vectores de S son LINEALMENTE DEPENDIENTES.

En la práctica puede resultar complicado probar que los vectores de S son linealmente independientes a partir de la definición. Un método útil lo da el siguiente resultado:

Teorema 2.8. *Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una familia de vectores de $\mathbb{R}^n$. Sea M la matriz cuyas columnas son los vectores de S. Entonces, los vectores de S son linealmente independientes si y sólo si $rg(M) = m$. En particular, se deduce que en $\mathbb{R}^n$ no puede haber más de n vectores linealmente independientes.*

Demostración: No es difícil comprobar que los vectores de S son linealmente independientes si y sólo si la ecuación vectorial

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0,$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ son las incógnitas, tiene como única solución la trivial $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. Por lo que sabemos sobre sistemas de ecuaciones lineales, ésta última propiedad equivale a que el SEL homogéneo cuya matriz de coeficientes es M es compatible determinado. Ahora, por el teorema de Rouché-Frobenius, ésto equivale, al ser el sistema homogéneo, a que $\operatorname{rg}(M) = m$.

Ejemplo: Usando el resultado anterior es fácil ver que los vectores de $S_1 = \{(1,2,0),(0,0,1)\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, mientras que los vectores de $S_2 = \{(1,1),(2,3),(3,5)\}$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$.

A continuación vamos a interpretar de forma geométrica la noción de independencia lineal. Para ello, estudiamos qué significa esta noción cuando tenemos pocos vectores.

- Si $S = \{v\}$ entonces es claro que el vector v es linealmente independiente si y sólo si tiene alguna coordenada no nula, es decir $v \neq 0$.
- Si $S = \{u, v\}$ entonces $\{u, v\}$ son linealmente independientes si uno de los vectores no es múltiplo del otro, es decir, los vectores no son paralelos.
- Si $S = \{u, v, w\}$ entonces $\{u, v, w\}$ son linealmente independientes si ninguno de ellos pertenece al plano vectorial generado por los otros dos, es decir los tres vectores no están a la vez contenidos dentro de un mismo plano.

Algunas propiedades de la independencia lineal que destacamos son las siguientes:

1. Si S está formado por vectores linealmente independientes y $S' \subseteq S$, entonces los vectores de S' son también linealmente independientes. En particular, el vector 0 no puede formar parte de S.
2. Si S está formado por vectores linealmente independientes y v es un vector de $\mathbb{R}^n$ que no es combinación lineal de los vectores de S, entonces el conjunto S' obtenido al añadir a S el vector v también está formado por vectores linealmente independientes.

De las dos propiedades anteriores, la segunda es más interesante, pues nos ayuda a obtener conjuntos cada vez más grandes de vectores linealmente independientes. Por ejemplo, sean $u = (1,0,0)$ y $v = (0,2,0)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Claramente, $\{u, v\}$ son linealmente independientes. Observemos además que cualquier combinación lineal de u y v tendría la tercera coordenada igual a cero. Por tanto, el vector $w = (1,-1,1)$ no es combinación lineal de u y v. Como consecuencia, el conjunto $\{u, v, w\}$ es de vectores linealmente independientes.

En ocasiones, aunque un conjunto S no esté formado por vectores linealmente independientes, nos interesará conocer la cantidad máxima de vectores linealmente independientes que S contiene. Esto se averigua por el siguiente resultado:

Teorema 2.9. *Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una familia de vectores de $\mathbb{R}^n$. Sea M la matriz de orden $n \times m$ cuyas columnas son los vectores de S. Entonces, el rango de M coincide con el número máximo de vectores de S que son linealmente independientes.*

Ejemplo: Sea $S = \{(1,2),(2,3),(1,0),(2,0)\}$. Sabemos que los vectores de S no son linealmente independientes (en $\mathbb{R}^2$ hay como mucho dos vectores linealmente independientes). Sea M la matriz 2×4 cuyas columnas son los vectores de S. Se comprueba enseguida que $\operatorname{rg}(M) = 2$. Esto significa que dentro de S podemos encontrar a lo sumo dos vectores linealmente independientes. Por ejemplo, $S_1 = \{(2,3),(1,0)\}$ son dos vectores de S linealmente independientes. Sin embargo, los vectores de $S_2 = \{(1,0),(2,0)\}$ no lo son.

2.2.3. Bases y dimensión de un subespacio

Intuitivamente una base de un subespacio vectorial es un conjunto finito B de vectores del subespacio que actúa como sistema de generadores y que no se puede refinar, es decir, ninguno de los vectores de B es combinación lineal de los demás vectores de B. De este modo, una base de un subespacio contiene el número más pequeño de vectores que pueden generar al subespacio.

Definición: Una BASE de un subespacio vectorial U es un conjunto finito B de vectores de U que son un sistema de generadores de U y además son linealmente independientes.

En principio, es posible encontrar varias bases de un mismo subespacio de $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, el siguiente resultado nos dice que todas las bases de un mismo subespacio tienen que tener forzosamente el mismo número de vectores.

Teorema 2.10. *Todas las bases de un mismo subespacio U de $\mathbb{R}^n$ contienen al mismo número de vectores. Este número se denomina* DIMENSIÓN *de U y lo representamos* $\dim(U)$.

Nota: De alguna forma, la dimensión mide el tamaño de un subespacio vectorial. Como la dimensión de U coincide con el número de vectores de cualquier base de U, y en $\mathbb{R}^n$ se pueden encontrar a lo sumo n vectores linealmente independientes, se deduce que:

$$\dim(U) \leq n.$$

De hecho, se puede probar que $\dim(U) = n$ si y sólo si $U = \mathbb{R}^n$.

Ejemplos:

- Es fácil comprobar que en $\mathbb{R}^n$, el conjunto $B_u = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$ es una base (la llamada base usual o canónica de $\mathbb{R}^n$). Por tanto, la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n.
- A modo de ejercicio se puede comprobar que $B = \{(1,1,0),(1,0,-1),(2,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ distinta de la base usual. No obstante, $B = \{(1,0)\}$ no es una base de $\mathbb{R}^2$ ya que toda base de $\mathbb{R}^2$ debe tener forzosamente dos vectores.
- El subespacio vectorial $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\}$ tiene como base el conjunto $B = \{(1,0)\}$. Por tanto $\dim(U) = 1$.

Cuando conocemos la dimensión de un subespacio de $\mathbb{R}^n$ la comprobación de que un conjunto dado de vectores de U es un sistema de generadores o una base es bastante sencilla. Además, tenemos una estimación de la cantidad máxima de vectores linealmente independientes que puede contener U. Todo ésto lo vemos en los siguientes resultados.

Teorema 2.11. *Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con $\dim(U) = m$. Sea $S = \{v_1,\ldots,v_k\}$ un conjunto de vectores de U. Sea M la matriz de orden $n \times k$ cuyas columnas son los vectores de S. Entonces, S es un sistema de generadores de U si y sólo si $rg(M) = m$. En particular, deducimos que todo sistema de generadores de U debe contener al menos m vectores.*

Lema 2.12. *Si U es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con $\dim(U) = m$, entonces el mayor número de vectores linealmente independientes que se pueden encontrar dentro de U es exactamente m.*

Nota: Los resultados anteriores generalizan los que ya conocíamos cuando $U = \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.13. *Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con $\dim(U) = m$. Sea B un conjunto formado por exactamente m vectores de U. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *B es una base de U.*

ii) *B es un sistema de generadores de U.*

iii) *Los vectores de B son linealmente independientes.*

iv) *La matriz M de orden $n \times m$ cuyas columnas son los vectores de B cumple que $rg(M) = m$.*

Ahora nos dedicaremos a estudiar cómo construir bases y cómo calcular la dimensión de un subespacio U de $\mathbb{R}^n$. Distinguiremos varios casos.

1. Si $U = \{0\}$ entonces U no contiene ningún vector linealmente independiente y, por tanto, no tiene ninguna base. Se sigue que $\dim(U) = 0$.

2. Si $U = \mathbb{R}^n$ entonces por el Teorema 2.13 sabemos que una familia $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ será una base si y sólo si $m = n$, y el rango de la matriz formada por los vectores es igual a n.

Conclusión: Para construir una base de $\mathbb{R}^n$ necesitamos un conjunto S formado por n vectores de forma que el rango de su matriz asociada M sea exactamente n.

3. Supongamos que $U = \langle S \rangle = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. Sabemos que los vectores de S forman un sistema de generadores de U. Si estos vectores fueran también linealmente independientes formarían una base de U. El problema es que los vectores de S pueden ser linealmente dependientes. En tal caso, debemos refinar el sistema de generadores S hasta quedarnos con la cantidad máxima de vectores linealmente independientes que contiene S. Sea M la matriz cuyas columnas son los vectores de S. Sabemos entonces que $\mathrm{rg}(M)$ coincide con el mayor número de vectores linealmente independientes que contiene S. Si este número es k entonces podemos eliminar de S un total de $m - k$ vectores y quedarnos con k vectores de S que sí sean linealmente independientes. Llamemos $B = \{u_1, \ldots, u_k\}$ a la familia de dichos vectores. Afirmamos que B es una base de U. Para empezar, los vectores de B son linealmente independientes, pues así los hemos elegido. En segundo lugar son también un sistema de generadores de U, pues se han obtenido al suprimir de S una cierta cantidad de vectores que dependían linealmente de aquellos con los que nos hemos quedado. Se deduce que B es una base de U y que $\dim(U) = \mathrm{rg}(M) = k$.

Conclusión: Si $U = \langle S \rangle$ y M es la matriz cuyas columnas son los vectores de S, entonces $\dim(U) = \mathrm{rg}(M) = k$, y para obtener una base de U debemos quedarnos con k vectores de S que sean linealmente independientes.

Ejemplo: Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por $U = \langle (1,0,-1,2), (0,1,1,1), (1,1,0,3) \rangle$. Se comprueba enseguida que el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es igual a dos. Deducimos que $\dim(U) = 2$. Para obtener una base de U debemos quedarnos con dos de los vectores que generan U que sean linealmente independientes. Por ejemplo, una base de U sería $B_1 = \{(1,0,-1,2), (0,1,1,1)\}$. Otra posible elección sería $B_2 = \{(0,1,1,1), (1,1,0,3)\}$.

4. Supongamos por último que U es un subespacio solución de un SEL homogéneo con n incógnitas y matriz de coeficientes A. Si el SEL es compatible determinado, es decir, $\mathrm{rg}(A) = n$, entonces

sabemos que $U = \{0\}$ y, por tanto, $\dim(U) = 0$. Si por el contrario el SEL es compatible indeterminado, es decir, $\mathrm{rg}(A) < n$, entonces el SEL tiene infinitas soluciones que dependen de $n - \mathrm{rg}(A)$ parámetros. Sabemos que estas soluciones se pueden entonces expresar como combinaciones lineales de $n - \mathrm{rg}(A)$ vectores que generan U. Ahora, no es difícil probar que estos vectores son linealmente independientes y, por tanto, proporcionan una base de U.

Conclusión: Sea U el subespacio solución de un SEL homogéneo con n incógnitas y matriz de coeficientes A. Entonces se cumple que $\dim(U) = n - \mathrm{rg}(A)$. Además, para calcular una base de U basta con resolver el SEL y expresar las soluciones como combinaciones linelaes de $n - \mathrm{rg}(A)$ vectores. Estos vectores constituyen una base de U.

Ejemplo: Sea U el subespacio:

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{ccccc} 2x & +y & -z & +3t & = 0 \\ x & & +2z & +t & = 0 \end{array} \right\}.$$

Se comprueba enseguida que el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es igual a 2. Por tanto $\dim(U) = 4 - 2 = 2$. Para hallar una base de U, basta con resolver el SEL homogéneo. Obtenemos que las soluciones son de la forma $x = -2\alpha - \beta$, $y = 5\alpha - \beta$, $z = \alpha$, $t = \beta$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si ponemos las soluciones como un vector (x,y,z,t), entonces tenemos:

$$(x,y,z,t) = (-2\alpha - \beta, 5\alpha - \beta, \alpha, \beta) = \alpha\,(-2,5,1,0) + \beta\,(-1,-1,0,1),$$

lo que nos indica que las soluciones del SEL son siempre combinaciones lineales de los vectores $(-2,5,1,0)$ y $(-1,-1,0,1)$. Concluimos que $B = \{(-2,5,1,0),(-1,-1,0,1)\}$ es una base de U.

2.2.4. Coordenadas de un vector respecto de una base

Ahora veremos cómo ante una base de un subespacio podemos hablar de coordenadas de un vector del subespacio respecto de la base dada. De este modo las bases de un subespacio juegan el mismo papel que los sistemas de referencia cartesianos que estudiamos al comienzo del tema.

Teorema 2.14 (Coordenadas en una base)**.** *Sea U un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y sea $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ una base de U. Entonces, cada vector $v \in U$ se puede expresar de forma única como combinación lineal de elementos de B. Es decir, existen números reales únicos $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que:*

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_m v_m.$$

Definición: A los números $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ del teorema anterior se les llama COORDENADAS DE v RESPECTO DE B. Lo escribimos así: $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)_B$. Para calcular estos números basta con resolver el SEL cuya matriz ampliada es $M^* = M(v_1, \dots, v_m, v)$.

Ejemplo: Hemos visto que $B = \{(1,1,0),\ (1,0,-1),\ (2,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Lo que entendemos por $v = (1,3,-2)_B$ no es otra cosa que:

$$v = 1(1,1,0) + 3(1,0,-1) - 2(2,1,1) = (0,-1,-5).$$

Por otro lado, si queremos calcular las coordenadas del vector $u = (1,0,3)$ con respecto a B, basta con resolver el SEL cuya matriz ampliada es la asociada a $\{(1,1,0),(1,0,-1),(2,1,1),(1,0,3)\}$. Al hacerlo, obtenemos $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$, es decir, $u = (-2,-1,2)_B$.

2.3. Producto escalar en $\mathbb{R}^n$

En esta sección introduciremos la herramienta esencial para medir cantidades geométricas tales como longitudes y ángulos en $\mathbb{R}^n$.

Definición: Dados dos vectores $u = (x_1, \ldots, x_n)$ y $v = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, se define su PRODUCTO ESCALAR como el número real obtenido de la siguiente forma:

$$u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Ejemplo: $(1,3,2) \cdot (-2,1,4) = -2+3+8 = 9$.

Algunas propiedades que nos interesan del producto escalar son las siguientes:

1. $v \cdot 0 = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.
2. $v \cdot v \geq 0$, y es igual a cero si y sólo si $v = 0$.
3. Conmutativa: $u \cdot v = v \cdot u$.
4. Linealidad (en cada variable):
    a) $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$.
    b) $(\lambda u) \cdot v = \lambda (u \cdot v)$.

La segunda propiedad del producto escalar nos permite definir la noción de longitud de un vector.

Definición: La LONGITUD (o norma) (o módulo) de un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}.$$

Si $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ entonces se tiene que:

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Ejemplo: Supongamos que tenemos un vector $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces, tal como se muestra en la Figura 2.4, su longitud viene dada por el teorema de Pitágoras como $\sqrt{x^2+y^2}$, que coincide con lo que hemos llamado $\|v\|$.

Algunas propiedades que nos interesan de la longitud de un vector son las siguientes:

1. $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$.
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $|\lambda|$ es su valor absoluto.
3. **Desigualdad triangular:** $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.
4. **Desigualdad de Cauchy-Schwartz:** $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$ con igualdad si y sólo si u y v son paralelos.

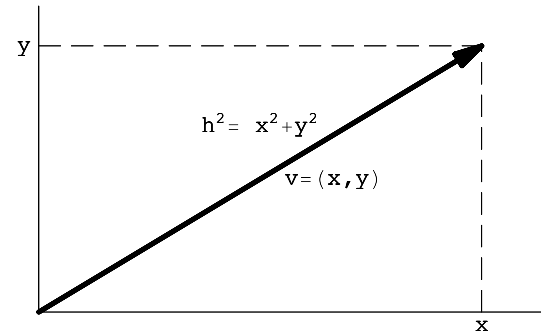

Figura 2.4: Longitud de un vector de $\mathbb{R}^2$

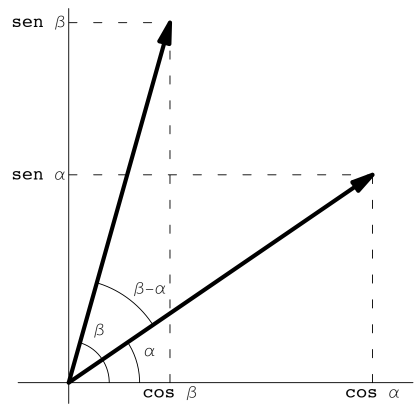

Figura 2.5: Interpretación del producto escalar

Definición: Diremos que un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es UNITARIO si $\|v\| = 1$. Por ejemplo, los vectores $(1,0,0)$ y $(2/3,-2/3,1/3)$ son vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$.

Damos ahora una interpretación geométrica del producto escalar. Para ello, consideramos primero dos vectores unitarios u y v en $\mathbb{R}^2$. Entonces, se pueden elegir ángulos α y $\beta \in [0,2\pi)$ de manera que $u = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y $v = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$, véase la Figura 2.5.

El producto escalar de u y v sería: $u \cdot v = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(\beta-\alpha)$. Es decir, en este caso, el producto escalar coincide con el coseno del ángulo determinado por u y v, que representaremos por (u,v).

En general, si los vectores no son unitarios, se puede concluir gracias a la propiedad 4b) del producto escalar que:

$$u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos(u,v).$$

Definición: Dados dos vectores u y v de $\mathbb{R}^n$, distintos del vector 0, definimos el ÁNGULO DETERMINADO por u y v, como el único ángulo (u,v) entre 0 y 180 grados que cumple la igualdad:

$$\cos(u,v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}, \quad \text{es decir,} \quad (u,v) = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}\right).$$

Geométricamente (u,v) siempre es el ángulo más pequeño de los dos comprendidos entre u y v.

Definición: Se dice que dos vectores u y v de $\mathbb{R}^n$ son PERPENDICULARES U ORTOGONALES si su producto escalar se anula. Cuando ambos vectores no coinciden con 0 ésto es equivalente a que formen un ángulo de 90 grados ($\pi/2$ radianes). Por ejemplo, los vectores $(1,2,-1)$ y $(2,-3,-4)$ son ortogonales.

Definición: Si v es un vector de $\mathbb{R}^n$ y U es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, diremos que v es perpendicular u ortogonal a U si v es perpendicular a todos los vectores de U.

El siguiente resultado refleja que para que un vector $v \in \mathbb{R}^n$ sea perpendicular a un subespacio U, basta con que v sea perpendicular a los vectores de un sistema de generadores de U.

Lema 2.15. *Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es perpendicular a una subespacio U de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si v es perpendicular a todos los vectores de un sistema de generadores de U.*

Llegados a este punto, podemos reinterpretar el significado de las ecuaciones implícitas que definen a un subespacio vectorial. Por ejemplo, observemos que:

$$U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{ccccc} 2x & +y & -z & +3t & =0 \\ x & & +2z & +t & =0 \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} (2,1,-1,3)\cdot(x,y,z,t) = 0 \\ (1,0,2,1)\cdot(x,y,z,t) = 0 \end{array} \right\},$$

es decir, U está formado por los vectores que son perpendiculares a la vez a $(2,1,-1,3)$ y a $(1,0,2,1)$.