

Repaso de conceptos básicos

0.1. Conjuntos

- Un CONJUNTO A es una colección de objetos, que llamaremos ELEMENTOS del conjunto. Para indicar que un cierto objeto a está en el conjunto A , se escribe $a \in A$ y se lee a PERTENECE A A . Para indicar que no está, se escribe $a \notin A$. El conjunto que no tiene elementos se llama CONJUNTO VACÍO, y se representa por \emptyset .

EJEMPLO: Sea A el *conjunto* formado por los alumnos del grupo 1ºD de Ciencias Ambientales. Podemos decir que el alumno llamado José *pertenece al conjunto* A , o dicho de otra manera, que el alumno José es un *elemento de* A . ($A =$ alumnos del grupo 1ºD de Ambientales, José $\in A$).

Los conjuntos se pueden definir de diversas formas. En cualquiera de ellas, hay que dejar claro qué elementos pertenecen y qué elementos no. Por ejemplo, se puede definir:

$$D = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}.$$

$$E = \{x \in D : x \leq 5\}, \text{ es decir, } E = \{2, 3, 5\}.$$

$$F = \{x^2 : x \in E\}, \text{ es decir, } F = \{4, 9, 25\}.$$

- Un SUBCONJUNTO X de A es un conjunto tal que todo elemento de X es también elemento de A , es decir, si $a \in X$ entonces $a \in A$. Se escribe $X \subseteq A$ y se lee X *incluido en* A .

EJEMPLO: Siendo A el conjunto del ejemplo anterior, podemos decir que el conjunto de los alumnos rubios del grupo de 1ºD de Ambientales (que llamaremos X), es un *subconjunto de* A . ($X =$ alumnos rubios del grupo de 1ºD de Ambientales, $X \subseteq A$).

- Sean A y B dos conjuntos. La UNIÓN de A y B es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B (sin repetir los elementos comunes de A y de B), y se escribe $A \cup B$. La INTERSECCIÓN de A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a la vez a A y a B , y se escribe $A \cap B$.

EJEMPLO: Llamemos $B =$ alumnos de Ambientales que no están en el grupo D. Entonces el conjunto $A \cup B$ es el conjunto de todos los alumnos de Ambientales.

EJEMPLO: Para la intersección pongamos otro ejemplo. Sea $Y =$ alumnos del grupo 1ºD con ojos azules. Entonces $X \cap Y$ son los alumnos del grupo 1ºD rubios y con ojos azules.

- Sean A y B dos conjuntos. El PRODUCTO CARTESIANO de A y B es el conjunto formado por los pares (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$. Se escribe $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Si $A = B$, se suele escribir $A \times A = A^2$.

EJEMPLO: Sean A y B los conjuntos de los anteriores ejemplos. Supongamos que hay que hacer un trabajo para alguna asignatura en grupos de dos alumnos, tal que uno sea del grupo D y el otro de un grupo diferente. Entonces el conjunto de las parejas posibles es descrito por el conjunto $A \times B$.

0.2. Números reales

En esta sección recordaremos los principales conjuntos de números con los que trabajaremos a lo largo del curso.

- Denotamos por \mathbb{N} al conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.
- Denotamos por \mathbb{Z} al conjunto de los números enteros, es decir los naturales, incluyendo también el 0 y los opuestos de los naturales: $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- Denotamos por \mathbb{Q} al conjunto de los números fraccionarios, es decir, las fracciones de números enteros: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.
- Por último, en el conjunto \mathbb{R} incluimos también aquellos números que no se expresan como fracciones, como por ejemplo $\sqrt{2}$, π , e , etc.

Claramente, se tiene que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. El conjunto \mathbb{R} se puede identificar con una recta, llamada usualmente recta real. De la misma forma, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se identifica con un plano y $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con el espacio tridimensional.

• Los números reales tienen un orden “ \leq ”. Dados dos números reales a y b , se dice que a es menor o igual que b , si podemos encontrar otro número h positivo o cero tal que $b = a + h$. En tal caso escribimos $a \leq b$ o bien $b \geq a$. Si h es positivo, escribimos $a < b$ o $b > a$. (Ejemplos: $3 < 4$, $1 > -8$, $-4 \leq 2$, $2 \geq 2$). Algunas propiedades que hay que recordar son las siguientes:

1. Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.
($3 \leq 6$, entonces $3 + 2 = 5 \leq 6 + 2 = 8$).
2. Si $a \leq b$ y $c \geq 0$ entonces $ac \leq bc$.
($3 \leq 6$ y $7 \geq 0$, entonces $3 \cdot 7 = 21 \leq 6 \cdot 7 = 42$).
3. Si $a \leq b$ y $c < 0$ entonces $ac \geq bc$. En particular, $-b \leq -a$.
($3 \leq 6$ y $-2 < 0$, entonces $-2 \cdot 6 = -12 \leq -2 \cdot 3 = -6$).
4. Si a y b son números reales no nulos con el mismo signo y $a \leq b$ entonces $1/a \geq 1/b$.
($-3 \leq -2$, por tanto $-1/3 \geq -1/2$).

- Recuerda también algunas igualdades que conoces y que se cumplen para todos $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

- Para cada número real a , se define su *valor absoluto* como:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

EJEMPLO: $|-3| = 3$, $|3| = 3$, $|\pi| = \pi$.

Dados dos números reales a y b , a la cantidad $|b - a|$, que coincide con $|a - b|$, la llamaremos *distancia entre a y b* .

- Para la siguiente definición suponemos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Un *intervalo* de \mathbb{R} es un conjunto de alguno de los siguientes tipos:

- (i) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (abierto y acotado),
- (ii) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (abierto por la izquierda, cerrado por la derecha y acotado),
- (iii) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (cerrado por la izquierda, abierto por la derecha y acotado),
- (iv) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (cerrado y acotado),
- (v) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ (abierto por la izquierda y no acotado),
- (vi) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ (cerrado por la izquierda y no acotado),
- (vii) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ (abierto por la derecha y no acotado),
- (viii) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ (cerrado por la derecha y no acotado),
- (ix) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

- Sea $a \in \mathbb{R}$ y r un número real positivo. Se llama *entorno abierto (simétrico) de centro a y radio r* , y lo denotamos por $B(a, r)$, al intervalo abierto y acotado $(a - r, a + r)$, es decir:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}.$$

Geoméricamente, el conjunto $B(a, r)$ contiene todos los puntos de la recta real cuya distancia al punto a es menor que r (es decir, coincide con el segmento abierto de extremos $a - r$ y $a + r$).

0.3. Una demostración con errores

Vamos a probar que $-1 = 1$. Procedemos de la siguiente forma:

$$1 - 2 = 3 - 4.$$

Elevando al cuadrado en esta igualdad tenemos:

$$(1 - 2)^2 = (3 - 4)^2.$$

Ahora, el cuadrado de un número cualquiera a es el mismo que el cuadrado de su opuesto $-a$. Por tanto, la igualdad anterior se transforma en:

$$(1 - 2)^2 = (4 - 3)^2.$$

Por último, simplificamos los cuadrados y obtenemos:

$$1 - 2 = 4 - 3,$$

o lo que es lo mismo:

$$-1 = 1.$$

Busca el error en esta prueba.