Tema 0

Repaso de conceptos básicos

0.1. Conjuntos

• Un CONJUNTO A es una colección de objetos, que llamaremos ELEMENTOS del conjunto. Para indicar que un cierto objeto a está en el conjunto A, se escribe $a \in A$ y se lee a PERTENECE A A. Para indicar que no está, se escribe $a \notin A$. El conjunto que no tiene elementos se llama CONJUNTO VACÍO, y se representa por $\emptyset$.

EJEMPLO: Sea A el *conjunto* formado por los alumnos del grupo 1ºD de Ciencias Ambientales. Podemos decir que el alumno llamado José *pertenece al conjunto A*, o dicho de otra manera, que el alumno José es un *elemento de A*. ($A =$ alumnos del grupo 1ºD de Ambientales, José$\in A$).

Los conjuntos se pueden definir de diversas formas. En cualquiera de ellas, hay que dejar claro qué elementos pertenecen y qué elementos no. Por ejemplo, se puede definir:

$D = \{2,3,5,7,9,11\}$.

$E = \{x \in D : x \leq 5\}$, es decir, $E = \{2,3,5\}$.

$F = \{x^2 : x \in E\}$, es decir, $F = \{4,9,25\}$.

• Un SUBCONJUNTO X de A es un conjunto tal que todo elemento de X es también elemento de A, es decir, si $a \in X$ entonces $a \in A$. Se escribe $X \subseteq A$ y se lee X *incluido en A*.

EJEMPLO: Siendo A el conjunto del ejemplo anterior, podemos decir que el conjunto de los alumnos rubios del grupo de 1ºD de Ambientales (que llamaremos X), es un *subconjunto de A*. ($X =$ alumnos rubios del grupo de 1ºD de Ambientales, $X \subseteq A$).

• Sean A y B dos conjuntos. La UNIÓN de A y B es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B (sin repetir los elementos comunes de A y de B), y se escribe $A \cup B$. La INTERSECCIÓN de A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a la vez a A y a B, y se escribe $A \cap B$.

EJEMPLO: Llamemos $B =$ alumnos de Ambientales que no están en el grupo D. Entonces el conjunto $A \cup B$ es el conjunto de todos los alumnos de Ambientales.

EJEMPLO: Para la intersección pongamos otro ejemplo. Sea $Y =$ alumnos del grupo 1ºD con ojos azules. Entonces $X \cap Y$ son los alumnos del grupo 1ºD rubios y con ojos azules.

• Sean A y B dos conjuntos. El PRODUCTO CARTESIANO de A y B es el conjunto formado por los pares (a,b) donde $a \in A$ y $b \in B$. Se escribe $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$. Si $A = B$, se suele escribir $A \times A = A^2$.

EJEMPLO: Sean A y B los conjuntos de los anteriores ejemplos. Supongamos que hay que hacer un trabajo para alguna asignatura en grupos de dos alumnos, tal que uno sea del grupo D y el otro de un grupo diferente. Entonces el conjunto de las parejas posibles es descrito por el conjunto $A \times B$.

0.2. Números reales

En esta sección recordaremos los principales conjuntos de números con los que trabajaremos a lo largo del curso.

- Denotamos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.
- Denotamos por $\mathbb{Z}$ al conjunto de los números enteros, es decir los naturales, incluyendo también el 0 y los opuestos de los naturales: $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- Denotamos por $\mathbb{Q}$ al conjunto de los números fraccionarios, es decir, las fracciones de números enteros: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0\}$.
- Por último, en el conjunto $\mathbb{R}$ incluimos también aquellos números que no se expresan como fracciones, como por ejemplo $\sqrt{2}$, π, e, etc.

Claramente, se tiene que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. El conjunto $\mathbb{R}$ se puede identificar con una recta, llamada usualmente recta real. De la misma forma, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se identifica con un plano y $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con el espacio tridimensional.

• Los números reales tienen un orden "$\leq$". Dados dos números reales a y b, se dice que a es menor o igual que b, si podemos encontrar otro número h positivo o cero tal que $b = a + h$. En tal caso escribimos $a \leq b$ o bien $b \geq a$. Si h es positivo, escribimos $a < b$ o $b > a$. (Ejemplos: $3 < 4$, $1 > -8$, $-4 \leq 2$, $2 \geq 2$). Algunas propiedades que hay que recordar son las siguientes:

1. Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.
   ($3 \leq 6$, entonces $3 + 2 = 5 \leq 6 + 2 = 8$).
2. Si $a \leq b$ y $c \geq 0$ entonces $ac \leq bc$.
   ($3 \leq 6$ y $7 \geq 0$, entonces $3 \cdot 7 = 21 \leq 6 \cdot 7 = 42$).
3. Si $a \leq b$ y $c < 0$ entonces $ac \geq bc$. En particular, $-b \leq -a$.
   ($3 \leq 6$ y $-2 < 0$, entonces $-2 \cdot 6 = -12 \leq -2 \cdot 3 = -6$).
4. Si a y b son números reales no nulos con el mismo signo y $a \leq b$ entonces $1/a \geq 1/b$.
   ($-3 \leq -2$, por tanto $-1/3 \geq -1/2$).

• Recuerda también algunas igualdades que conoces y que se cumplen para todos $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab,$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

• Para cada número real a, se define su *valor absoluto* como:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

EJEMPLO: $|-3| = 3$, $|3| = 3$, $|-\pi| = \pi$.

Dados dos números reales a y b, a la cantidad $|b-a|$, que coincide con $|a-b|$, la llamaremos *distancia entre a y b*.

• Para la siguiente definición suponemos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Un *intervalo* de $\mathbb{R}$ es un conjunto de alguno de los siguientes tipos:

(i) $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (abierto y acotado),

(ii) $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (abierto por la izquierda, cerrado por la derecha y acotado),

(iii) $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (cerrado por la izquierda, abierto por la derecha y acotado),

(iv) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (cerrado y acotado),

(v) $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ (abierto por la izquierda y no acotado),

(vi) $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ (cerrado por la izquierda y no acotado),

(vii) $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ (abierto por la derecha y no acotado),

(viii) $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ (cerrado por la derecha y no acotado),

(ix) $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

• Sea $a \in \mathbb{R}$ y r un número real positivo. Se llama *entorno abierto* (*simétrico*) *de centro a y radio r*, y lo denotamos por $B(a,r)$, al intervalo abierto y acotado $(a-r, a+r)$, es decir:

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : a-r < x < a+r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}.$$

Geométricamente, el conjunto $B(a,r)$ contiene todos los puntos de las recta real cuya distancia al punto a es menor que r (es decir, coincide con el segmento abierto de extremos $a-r$ y $a+r$).

0.3. Una demostración con errores

Vamos a probar que $-1 = 1$. Procedemos de la siguiente forma:

$$1-2 = 3-4.$$

Elevando al cuadrado en esta igualdad tenemos:

$$(1-2)^2 = (3-4)^2.$$

Ahora, el cuadrado de un número cualquiera a es el mismo que el cuadrado de su opuesto $-a$. Por tanto, la igualdad anterior se transforma en:

$$(1-2)^2 = (4-3)^2.$$

Por último, simplificamos los cuadrados y obtenemos:

$$1-2=4-3,$$

o lo que es lo mismo:

$$-1=1.$$

Busca el error en esta prueba.