

Relación de problemas 5. Curvas y campos vectoriales diferenciables.

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.

1. Las funciones trigonométricas hiperbólicas *coseno hiperbólico*, \cosh , y *seno hiperbólico*, \sinh , son funciones reales de variable real definidas mediante $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ y $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Comprueba:

(I) $\cosh(-x) = \cosh(x)$ y $\sinh(-x) = -\sinh(x)$,

(II) $(\cosh(x))' = \sinh(x)$ y $(\sinh(x))' = \cosh(x)$,

(III) $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$.

Representa gráficamente ambas funciones.

2. Para las siguientes curvas, determina su dominio, calcula su vector tangente (también llamado velocidad) en un instante t y su rapidez. Particulariza los resultados obtenidos en $t = 0$ y obtén la ecuación implícita de la recta tangente a la curva en dicho punto. Además, determina en cada caso si se trata de curvas regulares.

(I) $\alpha(t) = (3 \cos(2t), 3 \sin(2t))$,

(V) $\alpha(t) = (\ln(t), t^2 + 1, e^{2t})$,

(II) $\alpha(t) = (3 \cos(t), -2 \sin(t))$,

(VI) $\alpha(t) = \left(\frac{1}{t^2-t}, \sqrt{t-1}, 3t-1\right)$,

(III) $\alpha(t) = (\cosh(t), 4 \sinh(t))$,

(VII) $\alpha(t) = (e^{5t} \cos(t), e^{5t} \sin(t), t)$,

(IV) $\alpha(t) = (t^2 - 2t + 1, t)$,

(VIII) $\alpha(t) = (t^3 - 4t, \arctan(t))$.

¿Cuál es la traza de las curvas (i)–(iv)?

3. Calcula la longitud de las siguientes curvas en el intervalo indicado:

(I) El segmento de recta $\alpha(t) = (t3, t + 2, -2t + 1)$, para $t \in [0, 1]$. ¿Sabrías calcular dicha longitud de otra forma? Obtén además las ecuaciones implícitas de dicha recta.

(II) La circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r : $\alpha(t) = (r \cos(t) + x_0, r \sin(t) + y_0)$, para $t \in [0, 2\pi]$.

(III) $\alpha(t) = (e^{-t} \sin(t), e^{-t} \cos(t))$, para $t \in [0, 4\pi]$.

4. Obtén una curva cuya trayectoria sea:

(I) El segmento de recta $2x + 3y = -3$ desde el punto $(0, -1)$ hasta $(-3, 1)$.

(II) El trozo de la parábola $4y = (x - 1)^2 + 2$ desde el punto $(0, 3/4)$ hasta $(1, 1/2)$.

(III) El trozo de la circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio 2 recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj desde el punto $(-1, 1)$ hasta $(1, -1)$.

(IV) El trozo de elipse de centro $(0, 0)$, eje mayor horizontal y semiejes mayor 5 y menor 3 recorrida en sentido de las agujas del reloj desde el punto $(0, 3)$ hasta $(5, 0)$.

5. Calcula la divergencia y el rotacional del campo E dado por $E(x, y, z) = (2xz - y^3, z^2x - y^3z, 3xy + 3xz + 3yz)$. Comprueba que $\text{div}(\text{rot}(E)) = 0$.

6. Se considera las funciones $f(x, y) = e^x \sin(y)$ y $g(x, y, z) = x^{yz}$. Calcula el campo gradiente y el laplaciano de ambas funciones, y el rotacional del campo ∇g . ¿Cuánto vale la divergencia de ∇f y ∇g ?

7. Recordemos que dados un campo eléctrico \vec{E} y un campo magnético \vec{B} , las ecuaciones de Maxwell son:

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div}(\vec{B}) = 0, \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}$$

donde ρ es la densidad de carga, μ_0 es la permeabilidad magnética, ε_0 es la permeabilidad eléctrica y \vec{J} es el campo *corriente eléctrica*.

Se consideran los campos

$$\vec{E}_t(x, y, z) = (2t(e^x - 1)y, 2te^x, t^3), \quad \vec{B}_t(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}, -t^2 \right).$$

- (I) Comprueba que \vec{E}_t y \vec{B}_t cumplen las ecuaciones segunda y tercera de Maxwell.
 (II) Si asumimos $\varepsilon_0 = 1$, calcula la función ρ .
 (III) Calcula la corriente eléctrica \vec{J} .
8. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas F sobre una partícula que recorre el camino especificado en cada caso:
- (I) $F(x, y) = (-x, -2y)$, sobre la curva de ecuación $y = x^3$ desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(2, 8)$.
 (II) $F(x, y) = (2x, -y)$, sobre el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.
 (III) $F(x, y, z) = (x, y, -5z)$, sobre la curva $\alpha(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), t)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$.
9. Recuerda que para un campo conservativo, el trabajo sólo depende de los puntos inicial y final del recorrido. Comprueba si los siguientes campos son conservativos y calcula la integral de línea sobre la curva que se indica en cada caso:
- (I) $F(x, y) = (2xy, x^2)$ sobre la curva $\alpha(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.
 (II) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ sobre la curva $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

En caso de que el campo sea conservativo intenta calcular su función potencial.

10. Dada la función $f(x, y, z) = x \ln(1 + y^2 + z^2)$, calcula el trabajo del campo $F = \nabla f$ sobre la curva $\alpha(t) = (t^2, t, 3t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Indicación: ¿Es el campo F conservativo? ¿Cuál es su función potencial?

11. Considérense el campo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $F(x, y) = (2xy, x^2 + y^2)$, el segmento de recta C_1 que une los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ y el arco de circunferencia C_2 parametrizado por la curva $\alpha : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$.
- (I) Calcula el trabajo del campo F a lo largo de C_1 . Análogamente, obtén el trabajo del campo F a lo largo de C_2 .
 (II) ¿Cuánto vale el trabajo del campo F a lo largo del camino cerrado determinado por dichas dos curvas?
 (III) ¿Es el campo F conservativo? En caso afirmativo obtén su función potencial.