

Relación de problemas 5. Curvas y campos vectoriales diferenciables.

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.

1. Para las siguientes curvas, determina su dominio, su vector tangente y su regularidad.

(I) $\alpha(t) = (3 \cos(2t), 3 \sin(2t)),$

(IV) $\alpha(t) = (t^2 - 2t + 1, t),$

(II) $\alpha(t) = (3 \cos(t), -2 \sin(t)),$

(V) $\alpha(t) = (\ln(t), t^2 + 1, e^{2t}),$

(III) $\alpha(t) = (e^t, 4e^{-t}),$

(VI) $\alpha(t) = \left(\frac{1}{t^2-t}, \sqrt{t-1}, 3t-1\right).$

Calcula su recta tangente en el punto $\alpha(0)$.

¿Cuál es la traza de las curvas (i)–(iv)?

2. Calcula la longitud de las siguientes curvas en el intervalo indicado:

(I) El segmento de recta $\alpha(t) = (3t, t + 2, -2t + 1)$, para $t \in [0, 1]$.

(II) La circunferencia $\alpha(t) = (r \cos(t) + a, r \sin(t) + b)$, para $t \in [0, 2\pi]$.

(III) La espiral $\alpha(t) = (e^{-t} \sin(t), e^{-t} \cos(t))$, para $t \in [0, 4\pi]$.

3. Obtén una curva cuya trayectoria sea:

(I) El segmento de recta $2x + 3y = -3$ desde el punto $(0, -1)$ hasta $(-3, 1)$.

(II) El arco de la parábola $4y = (x - 1)^2 + 2$ desde el punto $(0, 3/4)$ hasta $(1, 1/2)$.

(III) El arco de la circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio 2 recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj desde el punto $(-1, 1)$ hasta $(1, -1)$.

(IV) El arco de elipse de centro $(0, 0)$, semieje horizontal 5 y vertical 3 recorrida en sentido de las agujas del reloj desde el punto $(0, 3)$ hasta $(5, 0)$.

4. Calcula la divergencia y el rotacional del campo

$$E(x, y, z) = (2xz - y^3, z^2x - y^3z, 3xy + 3xz + 3yz).$$

Comprueba que $\text{div}(\text{rot}(E)) = 0$.

5. Calcula el campo gradiente y el laplaciano de las funciones $f(x, y) = e^x \sin(y)$ y $g(x, y, z) = x^{yz}$.

¿Cuánto vale la divergencia de ∇f y ∇g ?

6. Calcula el trabajo realizado por los siguientes campos de fuerzas F :

(I) $F(x, y) = (-x, -2y)$, sobre la curva $y = x^3$ desde el punto $(0, 0)$ hasta $(2, 8)$.

(II) $F(x, y) = (2x, -y)$, sobre el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

(III) $F(x, y, z) = (x, y, -5z)$, sobre $\alpha(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), t)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Comprueba si los siguientes campos son conservativos y calcula la integral de línea:

(I) $F(x, y) = (2xy, x^2)$ sobre la curva $\alpha(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

(II) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ sobre la curva $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Calcula su función potencial. si es posible.

8. Se considera el campo $F(x, y) = (2xy, x^2 + y^2)$, el segmento de recta C_1 de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ y el arco de circunferencia $C_2 = \alpha([0, \pi])$ con $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

(I) Calcula el trabajo de F a lo largo de C_1 y de C_2 .

(II) ¿Cuánto vale el trabajo de F a lo largo de $C_1 \cup C_2$?

(III) ¿Es el campo F conservativo?

9. Se consideran los campos vectoriales $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidos por

$$F(x, y) = (3x^2 + \operatorname{sen}(y), x \operatorname{cos}(y)), \quad G(x, y) = F(x, y) + (y, 0).$$

(I) Estudiar si son conservativos.

(II) Calcular el trabajo de F y de G a lo largo del menor arco de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, desde $(1, 0)$ a $(0, 1)$.