Relación de problemas 3.

Cálculo diferencial de funciones de varias variables.

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.

1. Calcula el dominio de definición y las derivadas parciales de las siguientes funciones:

   (I) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

   (II) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

   (III) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (IV) $f(x,y) = \ln(4x^2 - y^2)$

   (V) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(x + \operatorname{sen} y)$

   (VI) $f(x,y,z) = (x^2+4y^2)\, e^{\frac{1-x^2-y^2}{z}}$.

   (VII) $f(x,y,z) = \ln(z - x^2 - y^2)$

   (VIII) $f(x,y,z) = \sqrt{1-2x^2-2y^2}$

2. Se considera la función $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,2)$ y halla la dirección de máximo crecimiento en este punto. Repetir el ejercicio con los puntos $(0,0)$, $(0,1)$, $(-7,-2)$.

3. Calcula las derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ para cada $(x,y) \neq (0,0)$. Escribir la matriz hessiana en el punto $(2,-1)$.

4. Se pide a un estudiante calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = x^4 - y^2$ en el punto $(2,3,7)$. Su respuesta es:

   $$z = 4x^3(x-2) - 2y(y-3).$$

   (a) Explicar, sin hacer cálculos y sin mirar la expresión de f, porqué su respuesta no puede ser correcta.

   (b) ¿Cuales son los errores cometidos por el estudiante?

   (c) ¿Cuál es la ecuación correcta del plano tangente?

5. Halla los puntos del paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ donde el plano tangente es paralelo al plano $x + 2y + z = 6$. Repetir el ejercicio con el plano $3x + 5y - 2z = 3$.

6. Se considera la función de dos variables definida en $\mathbb{R}^2$ por:

   $$f(x,y) = x^2y + y^2 + 4xy.$$

   (a) Calcula la derivada direccional de f en el punto $(1,2)$ según la dirección del vector $(\sqrt{2},0)$. En este punto halla la dirección de máximo decrecimiento de la función.

   (b) Clasifica los puntos críticos de f.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de dos variables, dada por

$$f(x, y) = (x^2 - x)(y^2 - 4y + 3).$$

   (a) Calcular la derivada direccional de f en el punto $(-1, 3)$ para el vector unitario que indica el máximo crecimiento de f.

   (b) Encontrar y clasificar los puntos críticos de f.

8. Clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}^2$:

   (I) $f(x, y) = x^2 + y^2$,

   (II) $f(x, y) = x^2 - y^2$,

   (III) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$,

   (IV) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

   (V) $f(x, y) = x^2 y + y^3 - y$,

   (VI) $f(x, y) = x - \operatorname{arc\,tg} x + y^2$,

   (VII) $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2$,

   (VIII) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x) + y^2 - 2y + 1$,

   (IX) $f(x, y) = (x^2 - x - 2)e^{(y^2+y+3)}$

9. Se considera la función de tres variables dada por

$$f(x, y, z) = (\operatorname{sen} x)\,(\cos y)\, e^{xyz}.$$

   Calcula la derivada direccional de $f(x, y, z)$ en el punto $(0, 0, 0)$ según la dirección del vector $(1, -2, 6)$. Halla la dirección de máximo crecimiento en este punto.

10. Calcula los puntos críticos de las siguientes funciones de tres variables:

   (I) $f(x, y, z) = x^2 - 6y + 2z + y^2 + z^2 + 10$,

   (II) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xz - 4yz + 10z$,

   (III) $f(x, y, z) = x^2\, y^2\, z^2$,

   (IV) $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y + z}$,

   (V) $f(x, y, z) = x^3 - 2xy^2 + z^2 y$,

   (VI) $f(x, y, z) = xy + z^2 + xe^z$.