Relación de problemas 2
Geometría afín y euclídea del espacio.

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.

1. Calcula una ecuación implícita del plano tal que:

   (I) Pasa por el punto $P = (2, 1, 0)$ y es ortogonal al vector $\vec{v} = (1, 0, -1)$.

   (II) Pasa por el punto $P = (2, 0, -3)$ y es paralelo a $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 0, -3)$.

   (III) Pasa por los puntos $P = (1, 0, 0)$, $Q = (-1, 1, 6)$ y $R = (0, 1, 1)$.

   (IV) Pasa por el punto $P = (4, -2, 1)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 7\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$

   (V) Pasa por el punto $P = (2, 2, 1)$ y contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$.

   (VI) Es paralelo al plano $x - 2y - z = 2$ y pasa por el punto $(0, 1, -1)$.

   (VII) Es paralelo al plano $2x - 3y - 6z = 14$ y dista 5 unidades del origen.

2. Determina unas ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta r en cada uno de los siguientes casos:

   (I) $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - z = 7 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$

   (II) $r \equiv \begin{cases} x - 3y + 6z = 4 \\ 5x + y - z = 4 \end{cases}$

   (III) La recta r pasa por el origen y lleva la dirección del vector $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

   (IV) La recta r pasa por el punto $(-2, 0, 3)$ y lleva la dirección del vector $\vec{v} = (2, 4, -2)$.

   (V) La recta r pasa por el punto $(-2, 0, 3)$ y lleva la dirección del vector $\vec{v} = (6, 3, 0)$.

   (VI) La recta r pasa por los puntos $(5, -3, -2)$ y $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$.

   (VII) La recta r pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralela a la recta

   $$s \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = -7 + \lambda \end{cases}$$

   (VIII) La recta r pasa por el punto $(-3, 5, 4)$ y es paralela a la recta dada por

   $$s \equiv \begin{cases} x - 3y = 1 \\ x - 3z = -8 \end{cases}$$

   (IX) La recta r pasa por el punto $(2, 3, 4)$ y es paralela al plano xz y al plano yz.

   (X) La recta r pasa por el punto $(-1, 0, -1)$, es paralela al plano $x + y + z - 1 = 0$ y corta a la recta

   $$s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

   (XI) La recta r es perpendicular al plano $2x + 3y + 2z = -1$ y pasa por el punto $(3, -1, 1)$.

3. Calcula la posición relativa de las seis parejas que forman los siguientes cuatro planos:

   $$\Pi_1 \equiv 2x - y + 3z + 2 = 0, \qquad \Pi_2 \equiv 2x - y + 2z = 0,$$
   $$\Pi_3 \equiv -2x + y - 3z + 1 = 0, \qquad \Pi_4 \equiv 6x - 3y + 9z + 6 = 0.$$

   Si se cortan, calcula el ángulo que forman; si son paralelos, calcula la distancia entre ellos.

4. Halla la posición relativa de la recta r y el plano Π en cada uno de los siguientes casos:

(I) $\Pi \equiv 2x - 2y + z = 12$
$$r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \lambda \\ y = -3/2 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

(II) $\Pi \equiv 2x + 3y = -5$
$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases}$$

(III) $\Pi \equiv 5x + 3y = 17$
$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 5y + 3z = -11 \end{cases}$$

(IV) $\Pi \equiv 2x + 3y = 10$
$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

Si se cortan, calcula el punto de corte y el ángulo que forman; si son paralelos, calcula la distancia entre ellos.

5. Determina la posición relativa de las rectas r y s en cada uno de los siguientes casos y, si se cortan, calcula el punto de corte y el ángulo que forman:

(I) $$r \equiv \begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = 3 \\ z = -t + 1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = 2\lambda + 3 \\ z = \lambda + 1 \end{cases}$$

(II) $$r \equiv \begin{cases} x + 3y = 6 \\ x - 3z = 3 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

(III) $$r \equiv \begin{cases} 6x + 3y = 18 \\ y - 6z = 16 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 4x - 2z = 16 \\ 4y - z = -18 \end{cases}$$

6. Calcula la distancia del punto $(1, 1, 2)$ al plano de ecuación $x + y = 1$.

7. Sean $P = (1, 2, 0)$, $Q = (1, -1, 1)$ y $r \equiv \begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$. Calcula:

   (I) una ecuación implícita del plano Π que pasa por P y Q y es paralelo a r;
   (II) la distancia de Π a r;
   (III) una ecuación implícita del plano que es perpendicular a r y pasa por P.

8. En los siguientes apartados, calcula la distancia entre el punto P y el plano Π:

   (I) $P = (0, 0, 0)$ y $\Pi \equiv 2x + 3y + z = 12$.
   (II) $P = (1, 2, 3)$ y $\Pi \equiv 2x - y + z$.

9. Calcula, en cada apartado, la distancia entre los planos Π_1 y Π_2:

   (I) $\Pi_1 \equiv x - 3y + 4z = 10$ y
   $\Pi_2 \equiv x - 3y + 4z = 6$
   (II) $\Pi_1 \equiv 2x - 4z = 4$ y
   $\Pi_2 \equiv x - 2z = 5$.

10. Dado el punto $P = (0, 0, 0)$, calcula su punto simétrico respecto del plano $\Pi \equiv x - 2z = 1$.

11. Un rayo de luz incide sobre un espejo plano de ecuación $3x + 2y - z = 0$ con dirección de incidencia $\vec{v} = (3, 1, 1)$. Calcula la dirección en la que es reflejado el rayo.