Relación de problemas 1
Geometría afín euclídea del plano.

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.

1. Determina a para que el vector $u = (a, 2)$ sea ortogonal a $v = (2, -3)$. Probar que $\{u, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

2. ¿Existe algún vector en el plano que sea ortogonal a sí mismo? ¿Qué se puede decir sobre un vector de $\mathbb{R}^2$ que es ortogonal a todos los demás?

3. Calcula la distancia entre los puntos $P = (1, -1)$ y $Q = (3, 1)$. Encuentra un punto equidistante a ambos.

4. Encuentra el vector director, la ecuación paramétrica y la ecuación implícita de cada una de las rectas del plano que pasan por los siguientes pares de puntos:

   a) $P_2 = (1, 1)$ y $Q_2 = (-1, -1)$.
   b) $P_3 = (4, -1)$ y $Q_3 = (0, 0)$.
   c) $P_4 = (0, 2)$ y $Q_4 = (1, 2)$.
   d) $P_5 = (1, 1)$ y $Q_5 = (1, 3)$.

5. Obtén unas ecuaciones paramétricas y un vector director de cada una de las siguientes rectas del plano dadas en implícitas:

   (I) $3x = -1$. (II) $x - y = 0$. (III) $y = 2$. (IV) $2y - 1 = 3x$.

6. Para cada uno de los siguientes pares de puntos y rectas:

   (I) $P = (1, 0)$, $r \equiv y = 3$;
   (II) $P = (2, 1)$, $r \equiv 4x - 3y = 5$;
   (III) $P = (1, -1)$, $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$

   calcula la recta ortogonal a r que pasa por P, el punto de corte de las dos rectas, la distancia de P a r, y la recta paralela a r que pasa por P.

7. Estudia la posición relativa de las rectas r y s del plano, sabiendo que $r \equiv x - 3y = 5$ y que s pasa por el punto $P = (3, 1)$ en la dirección del vector $u = (1, 2)$. Halla el punto de corte y el ángulo que forman si se cortan y la distancia entre ellas si son paralelas.

8. Calcula unas ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta r del plano que es paralela a $s \equiv 2x + y = 1$ y que pasa por $P = (-1, 1)$. Obtén la distancia entre r y s.

9. Dados los pares de rectas del plano siguientes, estudia su posición relativa. Si se cortan, determina el ángulo que forman y, si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.

(I) $r_1 \equiv x = y$, $s_1 \equiv 2x - y = 0$

(II) $r_2 \equiv x - y = 1$, $s_2 \equiv (2\lambda, 1 + 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(III) $r_3 \equiv 2x + y = 3$, $s_3 \equiv (0,3) + \lambda(-1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(IV) $r_4 \equiv x = -y$, $s_4 \equiv 2x = 0$

10. Halla x para que la distancia entre $P = (x, 1)$ y $Q = (2, 4)$ sea 5. Escribe la ecuación de la circunferencia de centro Q y radio 5.

11. Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1,2)$, $(-1,2)$ y $(2,1)$.

12. ¿Los puntos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ que verifican $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 8 = 0$, forman una circunferencia? ¿Y los que cumplen la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$? En caso de respuesta afirmativa, determina radio y centro.

13. Verificar que la ecuación $x^2 + y^2 - 2x + my = 9$, $m \in \mathbb{R}$, define una circunferencia. Hallar el valor m para que la circunferencia:

    (I) Pase por el punto $(1, 2)$.

    (II) Tenga centro sobre la recta de ecuación $2x - 3y = 14$.

    (III) Tenga radio igual a 5.

14. Hallar los puntos de intersección entre la recta de ecuación $y = x$ y la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 5x + y = 0$.

15. Determinar vertice, foco, directriz y eje de las siguientes parábolas:

    (I) $y = 2x^2 + 4x - 1$

    (II) $x = -3y^2 + 12y - 7$

    (III) $2y^2 + x = 1$

16. Dado un punto P en el plano y una recta r, llamamos *punto simétrico de P respecto de r* al punto Q que cumple que la recta r corta ortogonalmente al segmento $\overline{PQ}$ en su punto medio. Dada la parábola $(x - 1)^2 = 4y$:

    (I) Determina su eje y comprueba que el punto $P = (3, 1)$ pertenece a dicha parábola.

    (II) Calcula el punto Q simétrico a $P = (3, 1)$ respecto al eje de la parábola.

    (III) Comprueba que Q se encuentra también en la parábola.

17. Halla las ecuaciones de las parábolas que verifican:

    (I) Su directriz es $y = -6$ y su foco es $(0, 6)$.

    (II) Su vértice es $(2, 0)$ y su foco es $(6, 0)$.

(III) El eje es paralelo al eje y y la parábola pasa por los puntos $(0,3)$, $(2,6)$ y $(4,11)$.

(IV) El eje es paralelo al eje x, su vertice es el punto $\left(\frac{31}{8},\frac{3}{4}\right)$, y pasa por el punto $(5,0)$.

(V) Su eje es la recta $y=0$, y pasa por los puntos $(2,0)$ y $(3,1)$.

18. Determinar centro, vertices y focos de las siguientes elipses:

(I) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{81}=1$

(II) $x^2+2y^2=2$

(III) $x^2+3y^2-2x-6y-8=0$

19. Halla la ecuación de la elipse centrada en $(0,0)$ y con ejes paralelos a los ejes coordenados tal que:

(I) Pasa por el punto $(5,0)$, su eje mayor es horizontal y la distancia entre sus focos es 6.

(II) Pasa por $(4,1)$ y por $(0,3)$.

(III) Pasa por $(3,1)$ y tiene un foco en el punto $(-4,0)$.

(IV) Uno de sus focos es $(2,0)$ y uno de sus vértices es $(3,0)$.

(V) Su eje mayor es horizontal y pasa por los puntos $(3,1)$ y $(4,0)$.

20. Halla la ecuación de una elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados que verifica:

(I) Está centrada en $(1,1)$, pasa por el punto $(0,0)$ su distancia focal (distancia entre los focos) es 10 y su eje mayor es horizontal.

(II) Tiene los vértices en $(0,2)$ y $(4,2)$ y su eje menor tiene longitud 2.

(III) Tiene sus focos en $(2,-1)$ y $(-2,-1)$ y su eje mayor tiene longitud 8.

21. Determinar centro, vertices, focos y asíntotas de las siguientes hipérbolas:

(I) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{8}=1$

(II) $-9x^2+4y^2=36$

(III) $x^2-2y^2-6x-4y+1=0$

22. Halla la ecuación de la hipérbola que verifica:

(I) Sus focos son $(7,0)$ y $(-7,0)$ y pasa por el punto $(4,0)$.

(II) Sus focos son $(-3,0)$ y $(3,0)$ y pasa por el punto $(8,5\sqrt{3})$.

(III) Centro en el punto $(0,0)$, un vértice en $(0,2)$ y un foco en $(0,4)$.

(IV) Sus vértices son $(2,3)$ y $(2,-3)$ y pasa por el punto $(3,3\sqrt{2})$.

(V) Para cualquier punto de la hipérbola, la diferencia de entre sus distancias a $(2,2)$ y $(10,2)$ es 6.

(VI) Sus vértices son los puntos $(1,2)$, $(5,2)$, y las ecuaciones de las asíntotas son de la forma $y = \frac{3}{4}x + q_1$, $y = -\frac{3}{4}x + q_2$, siendo $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$.

23. Halla la ecuación de los puntos del plano que verifican:

    (I) equidistan del punto $(3,0)$ y de la recta $x = -4$;

    (II) la suma de las distancias a los puntos $(-1,2)$ y $(1,2)$ es constante 3;

    (III) la distancia al punto $(1,0)$ es igual a un medio de la distancia a la recta $x = 4$;

    (IV) la distancia al punto $P = (1,3)$ es el doble de la distancia a la recta $y = 1/2$.

24. El filamento de una lámpara de flash está a 10 cm del vértice del reflector parabólico y se encuentra en su foco. Toma un sistema de coordenadas y determina la ecuación de una sección del reflector, de modo que ésta quede orientada horizontalmente hacia la derecha con su vértice en el origen.

25. La Luna orbita alrededor de la Tierra en una órbita elíptica con la Tierra en uno de sus focos. Los ejes de la órbita tienen longitudes 768 806 km y 767 746 km. Halla el *apogeo* (máxima distancia entre la Tierra y la Luna) y el *perigeo* (mínima distancia entre la Tierra y la Luna).