Resumen de cónicas

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría. Curso 2013/2014.

Parábola

Definición:

Una *parábola* es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo P, llamado *foco*, y una recta r, llamada *directriz*, que no pasa por P.

Elementos geométricos:

- Llamamos *eje* a la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.
- Llamamos *vértice* al punto de corte del eje con la parábola (es el punto medio entre el foco y su proyección ortogonal sobre la directriz, y está en el eje).

Propiedades:

- **Simetría**: La parábola es simétrica con respecto a su eje.
- **Reflectora**: Sea Q un punto de la parábola. La recta tangente a la parábola en el punto Q forma ángulos iguales con la recta paralela al eje que pasa por Q y la recta que pasa por Q y el foco P.

Ecuación de la parábola:

- Si $r \equiv y = c$ (directriz horizontal) y $P = (x_0, y_0)$, con $y_0 \neq c$:

$$y = \frac{(x - x_0)^2}{2(y_0 - c)} + \frac{y_0 + c}{2}$$

- Si $r \equiv x = c$ (directriz vertical) y $P = (x_0, y_0)$, con $x_0 \neq c$:

$$x = \frac{(y - y_0)^2}{2(x_0 - c)} + \frac{x_0 + c}{2}$$

Elipse

Definición:

Una *elipse* es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano que cumplen que la suma de las distancias de (x, y) a dos puntos fijos P_1 y P_2, llamados *focos*, es constante $2R$, siendo $2R > \text{dist}(P_1, P_2)$.

Elementos geométricos:

- Llamamos *vértices* a los puntos de corte V_1, V_2 de la elipse con la recta que pasa por P_1, P_2.
- Llamamos *centro* al punto medio de los focos (o de los vértices).
- Llamamos *eje mayor* al segmento que une los vértices.
- Llamamos *eje menor* al segmento perpendicular al eje mayor que pasa por el centro y une dos puntos de la elipse.
- Llamamos *distancia focal* a la distancia entre los focos.

Propiedades:

- **Simetría**: La elipse es simétrica con respecto a sus ejes mayor y menor.
- **Reflectora**: Sea Q un punto de la elipse. La recta tangente a la elipse en Q forma ángulos iguales con las rectas que pasan por Q y por cada uno de los focos de la elipse.

Ecuación de la elipse:

Sean $C = (x_0, y_0)$ el centro de la elipse, $R = \text{dist}(V_1, C)$, $\mu = \text{dist}(P_1, C)$ y $\lambda^2 = R^2 - \mu^2$.

- Si el eje mayor es horizontal: $\dfrac{(x - x_0)^2}{R^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{\lambda^2} = 1$.
- Si el eje mayor es vertical: $\dfrac{(y - y_0)^2}{R^2} + \dfrac{(x - x_0)^2}{\lambda^2} = 1.$

Hipérbola
Definición: Una *hipérbola* es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano que cumplen que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de (x, y) a dos puntos fijos P_1 y P_2, llamados *focos*, es constante $2R$, siendo $2R < \text{dist}(P_1, P_2)$.
Elementos geométricos: ▪ Llamamos *vértices* a los puntos de corte V_1, V_2 de la hipérbola con la recta que pasa por los focos. ▪ Llamamos *centro* al punto medio de los focos (o de los vértices). ▪ Llamamos *eje transversal* al segmento que une los vértices.
Propiedades: ▪ **Simetría**: La hipérbola es simétrica con respecto a la recta que contiene a su eje transversal y con respecto a la recta ortogonal a su eje transversal y que pasa por el centro. ▪ **Reflectora**: Sea Q un punto de la hipérbola. La recta tangente a la hipérbola en Q forma ángulos iguales con las rectas que pasan por Q y por cada uno de los focos de la hipérbola.
Ecuación de la hipérbola: Sean $C = (x_0, y_0)$ el centro de la hipérbola, $R = \text{dist}(V_1, C)$, $\mu = \text{dist}(P_1, C)$ y $\lambda^2 = \mu^2 - R^2$. ▪ Si el eje transversal es horizontal: $\dfrac{(x-x_0)^2}{R^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{\lambda^2} = 1$. ▪ Si el eje transversal es vertical: $\dfrac{(y-y_0)^2}{R^2} - \dfrac{(x-x_0)^2}{\lambda^2} = 1$.

Clasificación de cónicas
Ecuación general: $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$ Equivalentemente, $$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & D & E \\ D & A & B \\ E & B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$
Consideramos las matrices: $$M = \begin{pmatrix} F & D & E \\ D & A & B \\ E & B & C \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$
Clasificación: 1. Si $\lvert M\rvert = 0$, la ecuación no define ninguna cónica (caso degenerado). 2. Si $\lvert M\rvert \neq 0$, entonces: - $\lvert N\rvert = 0 \Rightarrow$ **parábola** - $\lvert N\rvert < 0 \Rightarrow$ **hipérbola** - $\lvert N\rvert > 0$ y $\lvert M\rvert$ tiene signo opuesto al de $A + C \Rightarrow$ **elipse** - $\lvert N\rvert > 0$ y $\lvert M\rvert$ tiene el signo de $A + C \Rightarrow$ no hay puntos que cumplan la ecuación