Tema 1

Matrices, Determinantes y Sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Matrices

Definición: Una MATRIZ es un conjunto de números reales dispuestos en forma de rectángulo, que usualmente se delimitan por medio de paréntesis. Si una matriz tiene n filas y m columnas, se dice que es una matriz de orden $n \times m$. Nótese que una tal matriz tiene $n \cdot m$ elementos.

El elemento (o componente) (i, j) de una matriz A es el número a_{ij} que se sitúa en la fila i y la columna j. Por ejemplo, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es 2×3, y su elemento $(1,2)$ es $a_{12} = 9$.

Dos matrices A y B son iguales si tienen el mismo número de filas y columnas, y además todos sus componentes (i, j) son iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$ para cualesquiera i, j.

A continuación introducimos algunas definiciones:

- Una matriz que esté formada por una sola columna, se llama VECTOR COLUMNA. Análogamente, una matriz formada por una única fila se llama VECTOR FILA.

- Si A es una matriz $n \times m$, su MATRIZ TRASPUESTA es una matriz $m \times n$ cuyas filas son las columnas de A. Se representa por A^t. En el ejemplo anterior, la matriz A^t sería:

  $$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

  Una matriz se dice que es SIMÉTRICA si es igual a su traspuesta. Para ello, obviamente, deberá tener el mismo número de filas que de columnas (ver definición siguiente).

- Una MATRIZ CUADRADA es aquélla que tiene igual número de filas que de columnas. En este caso, se llama DIAGONAL PRINCIPAL a la diagonal formada por todos los elementos a_{ii}.

1. Una matriz cuadrada se dice DIAGONAL si todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.
2. Una matriz cuadrada se dice TRIANGULAR SUPERIOR si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.
3. Una matriz cuadrada se dice TRIANGULAR INFERIOR si todos los elementos por encima de la diagonal principal son iguales a cero.

Por ejemplo, de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{2} & 0 & 0 \\ 3 & \underline{1} & 0 \\ 6 & 4 & \underline{7} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

todas son cuadradas, A es triangular inferior, B es diagonal y C es simétrica. Los elementos de la diagonal principal de A vienen subrayados.

1.1.1. Operaciones con matrices

Suma de matrices

Si A y B son matrices $n \times m$, se define la matriz $A+B$ como una matriz también $n \times m$ cuyas componentes se obtienen sumando las componentes (i, j) de A y B. Es decir, si llamamos $C = A+B$, entonces $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. La suma de matrices verifica estas propiedades:

1. Asociativa: $A + (B+C) = (A+B) + C$.
2. Elemento neutro: Es aquella matriz $n \times m$ cuyas componentes son todas cero. Se denomina matriz 0, y verifica que $A + 0 = 0 + A = A$ para toda matriz A de orden $n \times m$.
3. Elemento opuesto: Dada A una matriz, su matriz opuesta $-A$ se define como aquélla cuyas componentes son iguales a las de A, pero cambiadas de signo. Por tanto, se tiene que $A + (-A) = (-A) + A = 0$.
4. Conmutativa de la suma: $A + B = B + A$.

Producto por números

Dada A una matriz y λ un número real, se puede definir el producto λA como una matriz, con el mismo número de filas y columnas que A, y obtenida multiplicando por λ cada componente. Es decir, si $C = \lambda A$, entonces $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. El producto de matrices por números cumple las siguientes propiedades:

1. Distributivas: $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
2. Pseudoasociativa: $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.
3. Modular: $1A = A$.

Producto de matrices

La definición del producto de matrices es más complicada y menos intuitiva. Primero aprenderemos a multiplicar un vector fila con un vector columna cuando ambos tienen el mismo número de elementos. Sea A una matriz de orden $1\times m$ y B una matriz de orden $m\times 1$. Definimos el producto de A y B (en ese orden) como el número real siguiente:

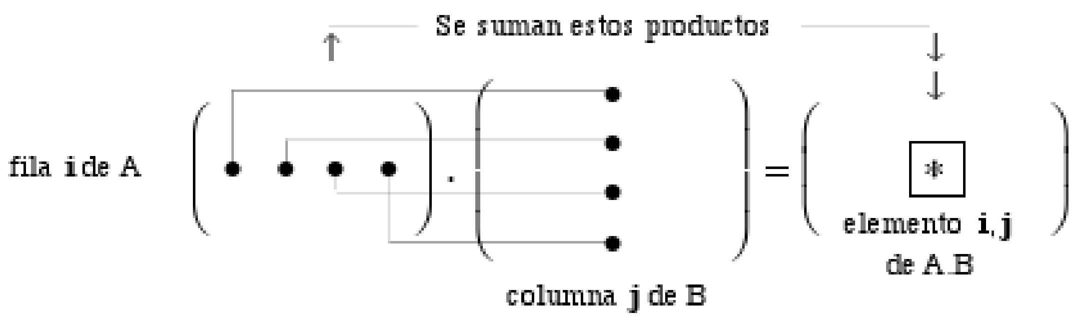
$$AB = a_1b_1 + \cdots + a_mb_m,$$

donde hemos llamado a_i a los números de A y b_i a los de B.

Pasemos ahora al caso general. Sea A una matriz $n\times m$ y B una matriz $m\times k$. Se define el producto AB como una matriz C, que tendrá orden $n\times k$, y cuya componente c_{ij} se obtiene al multiplicar la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B, es decir:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{im}b_{mj}.$$

Figura 1.1: Producto de matrices



Importante: Para que A y B se puedan multiplicar, A debe tener tantas columnas como filas tiene B. Además, en tal caso, la matriz AB tiene tantas filas como A y tantas columnas como B.

Para cualquier número natural n, se define la MATRIZ IDENTIDAD de orden n, que representamos por I_n, como la matriz $n\times n$ diagonal cuya diagonal principal está formada por unos. A veces se escribirá simplemente I. Esta matriz es muy importante ya que juega el papel de elemento neutro para el producto de matrices.

Enunciamos ahora las propiedades básicas para el producto de matrices:

1. Asociativa $(AB)C = A(BC)$.
2. Elemento neutro: Si A es una matriz $n\times m$, entonces $AI_m = A$, $I_nA = A$.
3. Distributivas: $A(B+C) = AB + AC$; $(A+B)C = AC + BC$.

En el producto de matrices hay un par de propiedades a las que estamos acostumbrados con los números que **no se cumplen**. La primera de ellas es **la propiedad conmutativa**. De hecho, puede ocurrir que dos matrices A y B se puedan multiplicar así, AB, pero no de la forma BA. Más aún, incluso en los casos en que se puedan multiplicar por ambos lados, el resultado puede ser distinto:

$AB \neq BA$. Del mismo modo **no es cierto** que si el producto de dos matrices es la matriz cero, entonces alguna de las dos sea la matriz cero.

Por último, dada una matriz cuadrada A y un número natural n, se define A^n como el producto de la matriz A consigo misma n veces $A^n = A \cdots A$.

1.1.2. Transformaciones elementales. Rango de una matriz

La idea que se persigue con las transformaciones elementales es convertir una matriz concreta en otra matriz más fácil de estudiar. En concreto, siempre será posible conseguir una matriz escalonada, en el sentido que definimos a continuación.

Sea A una matriz y F una fila de A. Diremos que F es nula si todos los números de F coinciden con el cero. Si F es no nula, llamamos PIVOTE de F al primer número distinto de cero de F contando de izquierda a derecha.

Una MATRIZ ESCALONADA es aquélla que verifica las siguientes propiedades:

1. Todas las filas nulas (caso de existir) se encuentran en la parte inferior de la matriz.
2. El pivote de cada fila no nula se encuentra estrictamente más a la derecha que el pivote de la fila de encima.

Por ejemplo, entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A no es escalonada, mientras que B y C sí lo son.

Dada una matriz escalonada E se define el RANGO de E, que representamos por $\mathrm{rg}(E)$, como el número de filas no nulas de E.

En los ejemplos B y C de arriba se tiene $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(C) = 2$, sin embargo no podemos decir que $\mathrm{rg}(A) = 3$ ya que A no está escalonada. Otro ejemplo, las matrices nulas tienen rango cero y la matriz identidad de orden n cumple $\mathrm{rg}(I_n) = n$.

La siguiente cuestión que abordaremos es la definición de rango para una matriz cualquiera que no esté escalonada. La idea será la de transformar la matriz dada en otra que sea escalonada mediante las llamadas *transformaciones elementales por filas* que describimos a continuación.

Dada una matriz A cualquiera, las TRANSFORMACIONES ELEMENTALES por filas de A son tres:

I. Intercambiar la posición de dos filas.

II. Multiplicar una fila por un número real distinto de cero.

III. Sustituir una fila por el resultado de sumarle a dicha fila otra fila que ha sido previamente multiplicada por un número cualquiera.

Nota: Análogamente podríamos hacerlo todo por columnas; sin embargo, son las transformaciones por filas las que son importantes en los sistemas de ecuaciones lineales que estudiaremos después.

El siguiente resultado nos garantiza que siempre podemos transformar una matriz cualquiera en otra escalonada.

Teorema 1.1. *A partir de cualquier matriz A se puede llegar, mediante una cantidad finita de transformaciones elementales, a una matriz escalonada E.*

Veamos en un ejemplo cómo se hace. Obsérvese que, primero, hacemos que la componente $(1,1)$ de la matriz de partida sea igual a uno. Luego, se hace que el resto de componentes de la primera columna sean cero. Después se pasa a la componente $(2,2)$, y así sucesivamente.

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2'=F_2-F_1}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3'=F_3+6F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & 13 \end{pmatrix} \underset{F_3'=F_3+4F_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_3'=-F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

El teorema anterior nos permite hacer una definición importante:

- Dada una matriz A cualquiera se define el RANGO de A y lo denotamos $\mathrm{rg}(A)$ como el rango de cualquier matriz escalonada E equivalente con A (se demuestra que este número no depende de la matriz escalonada E a la que se llegue). El rango siempre es un número menor o igual que el número de filas y el número de columnas de A. Además, el rango es cero si y sólo si $A = 0$. En nuestro ejemplo de antes, el rango es 3.

1.2. Determinantes

El determinante de una matriz cuadrada **es un número real** cuya definición exacta es bastante complicada. Por ello, definiremos primero el determinante de matrices pequeñas, y estudiaremos métodos y técnicas para calcular determinantes en general. **Solamente se puede calcular el determinante a matrices cuadradas**.

En cuanto a la notación, a veces el determinante se escribe con la palabra det, y otras veces se indica sustituyendo los paréntesis de la matriz por barras verticales.

- El determinante de una matriz 1×1 es: $\det(a) = a$.
- El determinante de una matriz 2×2 es:

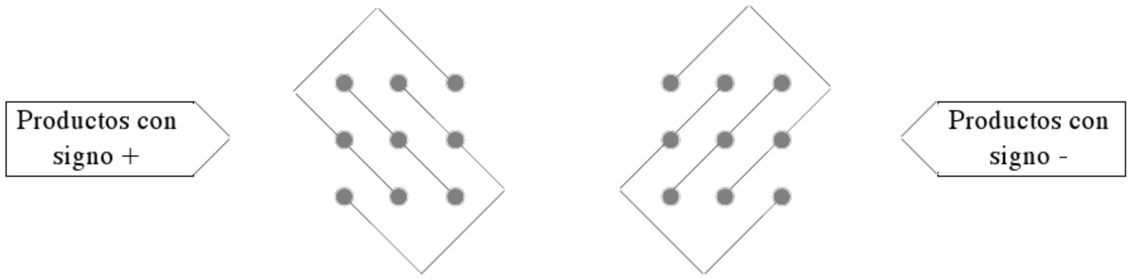
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- El determinante de una matriz 3×3 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

La fórmula anterior se conoce como *Regla de Sarrus*.

Figura 1.2: Regla de Sarrus



- Veamos ahora como calcular el determinante de una matriz cuadrada cualquiera. Para ello, necesitamos antes el concepto de menor adjunto de una matriz. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada. Dado un par de índices (i, j) representamos por A_{ij} a la matriz que resulta al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. El MENOR ADJUNTO δ_{ij} de A es el número real dado por:

$$\delta_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_{ij}|.$$

El signo $(-1)^{i+j}$ en la definición anterior se suele recordar mediante la regla:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. Entonces su DETERMINANTE se puede calcular mediante el *desarrollo de Laplace* por una fila cualquiera (o columna), de la siguiente forma:

1. Si elegimos la i-ésima fila, $|A| = a_{i1}\,\delta_{i1} + \ldots + a_{in}\,\delta_{in}$.
2. Si elegimos la j-ésima columna, $|A| = a_{1j}\,\delta_{1j} + \ldots + a_{nj}\,\delta_{nj}$.

A continuación, recogemos algunas de las propiedades más importantes de los determinantes. Suponemos que A es una matriz cuadrada y que λ es un número real.

1. Si B se obtiene al intercambiar dos filas de A, entonces $|B| = -|A|$.
2. Si B se obtiene al mutiplicar una **única** fila de A por λ, entonces $|B| = \lambda\,|A|$.
3. Si B se obtiene al sustituir una fila por el resultado de sumarle a dicha fila otra fila que ha sido previamente multiplicada por un número cualquiera, entonces $|B| = |A|$.
4. Si A tiene una fila de ceros entonces $|A| = 0$.
5. Si dos filas de A son iguales o proporcionales entonces $|A| = 0$.
6. Si A es triangular (superior o inferior), entonces $|A|$ se puede calcular como el producto de los números de la diagonal principal.
7. El determinante de una matriz cuadrada coincide con el de su traspuesta, es decir, $|A| = |A^t|$.

Puesto que $|A| = |A^t|$ deducimos que todas las propiedades anteriores se verifican igualmente si en lugar de filas hablamos de columnas.

A modo de ejemplo, podemos probar que el determinante de la matriz nula es cero y que el determinante de la matriz identidad es siempre uno. Para calcular ejemplos más complicados de orden mayor o igual que 4 necesitamos usar las propiedades de los determinantes. Concretamente, las tres primeras propiedades reflejan el comportamiento de los determinantes frente a transformaciones elementales y nos permiten calcular un determinante pasando de la matriz dada a otra que sea más fácil **mediante transformaciones elementales** (por filas o por columnas). En general, resultará interesante conseguir **una fila o columna en que casi todos los elementos sean cero**, y desarrollar por esa fila o columna para reducir el determinante a otro de menor orden.

1.2.1. Rango de una matriz y determinantes

Aprenderemos ahora una nueva forma de calcular el rango de una matriz mediante el uso de los determinantes.

Si A es cualquier matriz, entonces una SUBMATRIZ de A es cualquier matriz S obtenida al eliminar de A algunas de sus filas y columnas. Por ejemplo, la matriz A_{ij} obtenida al suprimir la i-ésima fila y la j-ésima columna es una submatriz de A. Nótese que aunque A no sea cuadrada contiene gran cantidad de submatrices que sí lo son y a las que tiene por tanto sentido calcularles su determinante.

Teorema 1.2. *El rango de una matriz cualquiera A coincide con el orden más grande que tengan las submatrices cuadradas de A con determinante no nulo.*

Concretamente, el resultado anterior nos dice que $\mathrm{rg}(A) = k$ si y sólo si:

(i) Existe S submatriz cuadrada de A de orden k con $|S| \neq 0$,

(ii) Si S' es cualquier submatriz cuadrada de A de orden mayor que k, entonces $|S'| = 0$.

Aplicaremos el resultado anterior de la siguiente manera. Sea A una matriz de orden $n \times m$. Por una propiedad conocida del rango sabemos que $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{n,m\}$, lo que nos proporciona una estimación de lo grande que puede ser el rango de A. Supongamos que $n = \min\{n,m\}$. Para ver si el rango de A es n buscamos submatrices cuadradas de A de orden n y que tengan determinante no nulo. Si encontramos alguna entonces $\mathrm{rg}(A) = n$. De lo contrario $\mathrm{rg}(A) \leq n-1$. Para ver si el rango de A es $n-1$ buscamos submatrices cuadradas de A de orden $n-1$ y que tengan determinante no nulo. Si encontramos alguna entonces $\mathrm{rg}(A) = n-1$. De lo contrario $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$. Así seguiríamos hasta calcular el rango de A.

Esta forma de calcular el rango será especialmente útil para matrices con parámetros.

1.2.2. Inversa de una matriz y determinantes

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se dice que A tiene INVERSA si existe una matriz cuadrada B del mismo orden que A y de forma que $AB = BA = I_n$. En tal caso, B se llama la MATRIZ INVERSA de A y la representamos por A^{-1}. A diferencia de lo que ocurre con los números reales existen matrices no nulas que no tienen inversa.

En general es complicado probar si una matriz tiene inversa y, en caso afirmativo, calcularla. No obstante, todo se simplifica mucho si hacemos uso de los determinantes. Recordemos que si A es una matriz cuadrada entonces δ_{ij} representa el menor adjunto de A obtenido al suprimir la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. Definimos la MATRIZ ADJUNTA de A como la matriz del mismo orden que A y cuyo elemento en la posición (i,j) es δ_{ij}. La representaremos por $\mathrm{Adj}(A)$.

En estas condiciones se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.3. *Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$. Además en tal caso tenemos:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\mathrm{Adj}(A))^t.$$

1.3. Sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección usaremos lo que conocemos sobre matrices y determinantes para la resolución de *sistemas de ecuaciones lineales*.

Una ECUACIÓN LINEAL con m incógnitas es una ecuación del tipo $a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m = b$ en la que los a_i y b son números reales cualesquiera. Los números a_i se llaman coeficientes, el número b se llama término independiente y las variables x_i son las incógnitas. Una SOLUCIÓN de la ecuación estará formada por m números reales de forma que al sustituir su valor concreto en las incóngnitas se cumple la ecuación.

Se llama SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES (SEL) a un conjunto de n ecuaciones lineales todas ellas con las mismas m incógnitas. Por tanto, un SEL tiene el siguiente aspecto:

$$\left.\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & +\ldots+ & a_{1m}x_m & = b_1 \\ & \ldots & & \ldots \\ a_{n1}x_1 & +\ldots+ & a_{nm}x_m & = b_n \end{array}\right\}.$$

Y esto se suele reescribir en forma matricial de la forma $AX = b$, donde estamos llamando:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \text{ y } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

La matriz A se llama MATRIZ DE COEFICIENTES, el vector columna X se llama vector de incógnitas y el vector columna b se llama vector de términos independientes. La MATRIZ AMPLIADA del SEL es la matriz que se obtiene cuando añadimos al final de la matriz de coeficientes la columna b de términos independientes. La representaremos por A^* o por $(A \,|\, b)$.

Una SOLUCIÓN de un SEL estará formada por m números reales que sean solución a la vez de todas las ecuaciones del SEL. Diremos que dos SEL son EQUIVALENTES si tienen las mismas soluciones.

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican atendiendo a la cantidad de soluciones que tienen. Un SEL se dice INCOMPATIBLE (SI) si no admite ninguna solución. Si admite soluciones se dice COMPATIBLE (SC). Un sistema compatible puede ser:

1. SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (SCD) si admite una única solución.

2. SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (SCI) si admite más de una solución.

Discutir un SEL consiste en decidir de qué tipo es según la clasificación anterior. Resolver un SEL consiste en calcular todas las soluciones del SEL si las hay.

Diremos que un SEL es HOMOGÉNEO si todos sus términos independientes son iguales a cero. Es evidente que un SEL de este tipo siempre será compatible.

La principal herramienta que usaremos para discutir un SEL sin necesidad de resolverlo es el siguiente resultado:

Teorema 1.4 (Rouché-Frobenius)**.** *Supongamos que tenemos un SEL con matriz de coeficientes A y matriz ampliada A^*. Entonces:*

1. *Si* $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A^*)$*, entonces tenemos un sistema incompatible.*

2. *Si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*)$ *y es igual al número de incógnitas, entonces tenemos un sistema compatible determinado.*

3. *Si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*)$ *y es menor que el número de incógnitas, entonces tenemos un sistema compatible indeterminado.*

A continuación nos preocuparemos de resolver un SEL. Estudiaremos dos herramientas distintas: el método de Gauss y la regla de Cramer.

1.3.1. Método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones lineales

Este método está basado en la misma idea que seguimos para calcular el rango de una matriz cualquiera: primero realizamos transformaciones sobre la matriz original para convertirla en otra más sencilla y segundo calculamos el rango de la matriz sencilla. Necesitamos entonces definir los que serán los SEL más sencillos de resolver.

Diremos que un SEL es ESCALONADO si su matriz ampliada es una matriz escalonada. Para resolver un SEL escalonado procedemos como sigue:

1. Si el SEL contiene una ecuación del tipo $0 = b$ con $b \neq 0$ entonces el sistema es incompatible. De lo contrario el SEL es compatible y pasamos al paso 2.

2. Encontramos las *incógnitas principales* y las *incógnitas secundarias* del SEL. Las principales son las que están asociadas a los pivotes de cada fila no nula de la matriz de coeficientes. Las secundarias son las restantes. Si todas las incógnitas son principales entonces el SEL es compatible determinado. De lo contrario se trata de un SEL compatible indeterminado.

3. Para resolver el SEL, se asigna a cada incógnita secundaria un parámetro real y se despejan las incógnitas principales en función de estos parámetros de abajo hacia arriba.

En particular, se deduce del procedimiento anterior que todo SEL escalonado compatible tiene una única solución o infinitas.

Una vez que sabemos resolver los SEL escalonados pasamos al caso general. Dado un SEL cualquiera, el MÉTODO DE GAUSS para resolver el SEL tiene los siguientes pasos:

1. Se escribe la matriz ampliada A^* del SEL.

2. Se realizan transformaciones elementales por filas hasta convertir A^* en una matriz escalonada.

3. Se escribe y se resuelve el SEL escalonado equivalente al original al que hemos llegado. Como este SEL es equivalente al original, sus soluciones coinciden con las del SEL original.

En particular, probamos que si un SEL es compatible entonces tiene una única solución o infinitas.

Como ejemplo, vamos a resolver el SEL siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & +3y & +2z & = & -5 \\ 3x & +y & -2z & = & 1 \\ 2x & +y & -z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Escribimos la matriz ampliada del SEL:

$$A^* = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicamos transformaciones elementales para escalonar la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2'=F_2-3F_1 \\ F_3'=F_3-2F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -8 & -8 & 16 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2'=-\frac{1}{8}F_2 \\ F_3'=-\frac{1}{5}F_3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{F_3'=F_3-F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este punto escribimos el SEL escalonado al que hemos llegado y lo resolvemos. La variable z es secundaria mientras que x,y son principales. Por tanto ponemos $z=\alpha$ donde α es un parámetro real, y despejamos de abajo hacia arriba las incógnitas x,y en función de α. Se obtiene:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & -5-2\alpha \\ & & y & = & -2-\alpha \end{array}.$$

Sustituyendo el valor de y de la segunda ecuación en la primera, obtenemos:

$$x = -3y-5-2\alpha = 6+3\alpha-5-2\alpha = 1+\alpha.$$

Deducimos que estamos ante un SCI con soluciones $x=1+\alpha$, $y=-2-\alpha$, $z=\alpha$ con $\alpha\in\mathbb{R}$.

1.3.2. Regla de Cramer

Esta regla proporciona un método para resolver ciertos sistemas de ecuaciones compatibles determinados mediante determinantes. Diremos que un SEL es un SISTEMA DE CRAMER si su matriz de coeficientes A es cuadrada (lo que equivale a decir que el SEL tienen tantas ecuaciones como incógnitas) y $|A|\neq 0$. Gracias al Teorema de Rouché-Frobenius se comprueba enseguida que un sistema de Cramer es compatible determinado. Sin embargo, no es cierto que todo SCD sea de Cramer. Veamos como resolver sistemas de Cramer.

Teorema 1.5 (Regla de Cramer)**.** *Supongamos que tenemos un sistema de Cramer con incógnitas $x_1,\dots,x_n$ y matriz ampliada $(A|b)$. Escribamos:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema es compatible determinado y se puede resolver así:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \dots, \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}}{|A|},$$

es decir, para despejar la incógnita x_i, en el numerador se tiene el determinante de la matriz que resulta al cambiar en A la columna i-ésima por la columna b, mientras que en el denominador se tiene siempre el determinante de A.

Como ejemplo, resolvamos el SEL:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & -1 \end{array}\right\}.$$

La matriz ampliada del SEL es:

$$A^* = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Comprobamos que el determinante de A es distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Las soluciones se pueden calcular por la regla de Cramer del siguiente modo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-1}{4}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-1}{4}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = 0.$$