Matemáticas I - 1º Grado en Ingeniería Electrónica Industrial
Relación de Ejercicios 5

(1) Calcular la curvatura de la elipse $\alpha(t) = (a\cos(t), b\ \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $a \neq b$.

(2) La traza de la curva $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$, $t \in \mathbb{R}$, se denomina *catenaria*. Demostrar que la curvatura de la catenaria es

$$k(t) = \frac{1}{\cosh^2(t)}.$$

(3) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular plana y sean $n(t)$ y $k(t)$ su vector normal y su curvatura. Supongamos que $k(t) \neq 0$, $t \in I$. En esta situación, la curva

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} n(t), \quad t \in I$$

se denomina la *evoluta* de α. Probar que la tangente en t a la evoluta de α es normal a α en t.

(4) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva con curvatura $k_\alpha(t)$. Calcula la curvatura de la curva $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(t) = \alpha(-t)$.

(5) Dada la curva (*hélice*)

$$\alpha(s) = (a\cos(s), a\sin(s), bs)\,, \quad s \in \mathbb{R}.$$

(a) Parametrizar α por la longitud de arco. Llamar β a la parametrización por el arco de α.
(b) Determinar la curvatura y la torsión de β.
(c) Determinar el plano osculador de β.

(6) Considerar la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = \big(-\cos(e^t)\,,\, \sin(e^t)\big)$.
(a) Parametrizar α por la longitud de arco. Llamar β a la parametrización por el arco de α.
(b) Calcular el diedro de Frenet y la curvatura de la curva β.
(c) Considerar β como una curva en el espacio, es decir, $\beta \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Calcular la torsión de β.

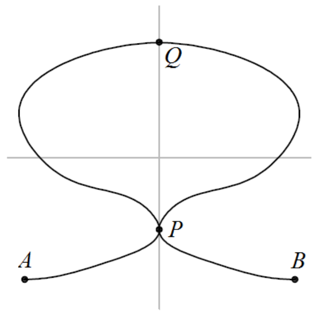
(7) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva con $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Demostrar que $|\alpha(t)|$ es una constante no nula si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t \in I$.

(8) Demostrar que la curva $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(s) = \left(\sin\left(\frac{s}{2}\right) + \cos\left(\frac{s}{2}\right), \sin\left(\frac{s}{2}\right) - \cos\left(\frac{s}{2}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

es regular, está parametrizada por la longitud de arco y calcular la longitud de α entre $s = -3$ y $s = \pi$. Calcular el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de la curva α.

(9) Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana, parametrizada por el arco, cuya traza se corresponde con el siguiente dibujo:



Supongamos que α recorre su traza empezando en el punto A y terminando en en punto B, pasa por el punto P en tiempo s_1, por el punto Q en tiempo s_2, y luego otra vez por el punto P en tiempo s_3.

(a) Decidir razonadamente si la curvatura de alpha en s_1 y en s_3 es la misma u opuesta; es decir, si $\kappa(s_1) = \kappa(s_3)$ ó $\kappa(s_1) = -\kappa(s_3)$.

(b) Esbozar un dibujo del diedro de Frenet de α y decidir razonadamente en qué partes tiene curvatura positiva, negativa y cero.

(10) Imagina la traza de una curva plana a tu elección. Elige un sentido de recorrido y supón que la curva está parametrizada por el arco. Esboza un dibujo del diedro de Frenet de la curva y decide razonadamente en qué partes la curva tiene curvatura positiva, negativa y cero, y en qué partes el módulo de la curvatura es grande y pequeño.

(11) Calcular la matriz jacobiana, la divergencia y el rotacional del campo tridimensional dado por:

$$X(x, y, z) = \left(\frac{x}{y+z}, \frac{y}{x+z}, \frac{z}{x+y} \right).$$

(12) Calcular la matriz jacobiana, la divergencia y el rotacional del siguiente campo tridimensional X en el punto $(1, 0, 1)$.

$$X(x, y, z) = (x^2 + \sin(yz), \arctan(y), xy + z^2 + xe^z).$$

(13) Sea $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo bidimensional con componentes (X_1, X_2). Se dice que X es *conservativo* si existe una función diferenciable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de forma que $X = \nabla g$. Demostrar que si X es conservativo y g es dos veces diferenciable, entonces:

$$\frac{\partial X_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial X_2}{\partial x}(x, y), \qquad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Indicación: téngase en cuenta el Lema de Schwarz.