Matemáticas I - 1º Grado en Ingeniería Electrónica Industrial
Relación de Ejercicios 4

(1) En $\mathbb{R}^3$, aplicar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal a partir de la base:
(a) $B_1 = \{(1,1,1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$.
(b) $B_2 = \{(0,1,1),(1,-2,2),(3,0,1)\}$.

(2) En $\mathbb{R}^4$, aplicar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal a partir de la base:
(a) $B_1 = \{(3,0,1,5),(2,2,-2,2),(1,1,0,1),(0,0,0,1)\}$.
(b) $B_2 = \{(1,1,1,1),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,0,0,0)\}$.

(3) Descomponer el vector $(1,3,-1,4)$ en suma de dos vectores, uno perteneciente al subespacio generado por $\{(2,1,0,1),(0,3,1,1)\}$ y el otro ortogonal a dicho subespacio.

(4) Sea V un espacio vectorial, y sean u y v dos vectores unitarios que forman un ángulo de $\pi/3$ radianes. Calcular $\|2u+v\|$.

(5) En $\mathbb{R}^4$, se considera el subespacio

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z=0\}.$$

Calcular la proyección ortogonal del vector $(0,1,1,1)$ sobre U y sobre $U^\perp$.

(6) En $\mathbb{R}^4$, se considera el subespacio U generado por los vectores $u_1 = (1,-1,1,-1)$, $u_2 = (1,1,1,1)$ y $u_3 = (1,-1,-1,-1)$.
(a) Calcular el complemento ortogonal $U^\perp$ de U dando una base y unas ecuaciones cartesianas.
(b) Hallar una base ortonormal de U.
(c) Hallar las proyecciones $p_U(v)$ y $p_{U^\perp}(v)$, siendo $v = (1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$.

(7) En $\mathbb{R}^3$,
(a) Calcular la proyección ortogonal del vector $v = (1,2,1)$ sobre el subespacio

$$U = L\{(0,1,2),(1,2,3)\}.$$

(b) Si llamamos $d(v,U) = \min\{\|v-u\| : u \in U\}$ ¿cuánto vale $d(v,U)$ siendo v y U los del apartado anterior?

(8) Demostrar que si u y v son dos vectores de un espacio vectorial tales que $\|u\| = \|v\|$, entonces los vectores $u+v$ y $u-v$ son ortogonales.

(9) Hallar una base ortogonal del subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por la ecuación cartesiana $2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$.

(10) Consideremos U el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $u_1 = (4,0,0)$ y $u_2 = (-2,3,0)$, es decir, $U = L\{u_1,u_2\}$.
(a) Aplicar el método de Gram-Schmidt a la base $B_1 = \{u_1,u_2\}$ de U para encontrar una base ortonormal B_2 de U. Escribir $B_2 = \{e_1,e_2\}$.
(b) Calcular $U^\perp$ el complemento ortogonal de U. Sea $w = (-1,-2,3) \in \mathbb{R}^3$. Calcular la proyección ortogonal $p_{U^\perp}(w)$ de w sobre $U^\perp$.
(c) Decidir si $B = \{e_1,e_2,e_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, donde

$$e_3 = \frac{p_{U^\perp}(w)}{\|p_{U^\perp}(w)\|}.$$