Matemáticas I - 1º Grado en Ingeniería Electrónica Industrial
Relación de Ejercicios 3

(1) Estudiar si son diagonalizables las siguientes matrices, y en su caso, calcular las matrices de paso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Estudiar para qué valores de los parámetros a y b la matriz siguiente es diagonalizable

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(3) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Diagonalizar, si es posible las matrices A y B calculando las matrices de paso.
(b) ¿Son A y B matrices semejantes? ¿Por qué?.

(4) Demostrar o dar un contraejemplo para decidir la veracidad de las siguientes afirmaciones:
(a) Toda matriz invertible es diagonalizable.
(b) Si A es diagonalizable, entonces A^n es diagonalizable para $n \in \mathbb{N}$.
(c) Si A y B son diagonalizables, entonces $A + B$ y AB son diagonalizables.
(d) Si A es regular, entonces AB es semejante a BA para cualquier matriz cuadrada B.
(e) Una matriz cuadrada diagonalizable es invertible si y sólo si, 0 no es valor propio.
(f) Si λ es valor propio de A y A es invertible, entonces $1/\lambda$ es valor propio de A^{-1}.

(5) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, definido en la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ por

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (\alpha+1)e_1 - \alpha e_2 + \alpha e_3 \\ f(e_2) &= (\alpha+\beta)e_1 - \alpha e_2 + (\alpha-1)e_3 \\ f(e_3) &= \beta e_1 - e_2 \end{aligned}$$

con α, $\beta \in \mathbb{R}$.
(a) Determinar los valores propios de f, comprobando que no dependen de α ni de β.
(b) Calcular el valor de α para el que el endomorfismo f es diagonalizable. Obtener en estas condiciones una base formada por vectores propios.

(6) En el espacio $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo dado por:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) &= 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) &= 2e_2 + e_3 \end{aligned}$$

en la base $B = \{e_1 = (0,1,0), e_2 = (-1,0,0), e_3 = (0,0,1)\}$.
(a) Calcular las matrices de f en la base B y en la base canónica.
(b) Calcular el núcleo de la aplicación.
(c) buscar una base de vectores en la que la aplicación presente una forma diagonal.