Matemáticas I - 1º Grado en Ingeniería Electrónica Industrial
Relación de Ejercicios 2

(1) Determinar si los siguientes conjuntos de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales:
(a) $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
(b) $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon a \in \mathbb{R} \right\}$
(c) $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon a, b \in \mathbb{R} \right\}$
(d) $H_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

(2) En el espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual que tres se consideran los subespacios:
(a) $A = \{p(x) \colon p(0) = 0\}$
(b) $B = \{p(x) \colon p(1) = 0\}$
(c) $C = \{p(x) \colon p(-1) = 0\}$
(d) $D = \{p(x) \colon p(-x) = -p(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$
(e) $E = \{p(x) \colon p(-x) = p(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$
Determinar unas ecuaciones cartesianas y una base de cada uno de ellos.

(3) Decidir razonadamente si los siguientes subconjuntos son o no subespacios vectoriales:
(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = y = z\}$
(b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + t = 2\}$
(c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon xy = 3\}$
(d) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y = 0\}$
(e) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon 2x + t = y\}$
(f) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y^2\}$

(4) Para cada uno de los siguientes casos decidir si el vector v pertenece o no al subespacio vectorial U:
(a) $v = (1, -2, 5)$, $U = L\big((1, -3, 2), (2, -4, -1), (1, -5, 7)\big) \leq \mathbb{R}^3$
(b) $v = (8, 1, 1)$, $U = L\big((1, -3, 2), (2, -1, 1)\big) \leq \mathbb{R}^3$
(c) $v = (1, -3, 2, -1)$, $U = L\big((2, -1, 0, 0), (-1, 3, -2, 1)\big) \leq \mathbb{R}^4$

(5) Decidir si los vectores de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:
(a) $\big\{(1, 1, -2, 3, 4), (2, 3, 3, -1, 3), (5, 7, 4, 1, 5)\big\} \subset \mathbb{R}^5$
(b) $\big\{(1, 1, 1), (2, 3, -1), (0, 1, 7), (-6, 5, 14)\big\} \subset \mathbb{R}^3$
(c) $\big\{(2, 1, 3), (4, -1, 5), (2, 1, 2)\big\} \subset \mathbb{R}^3$
(d) $\big\{(1, 1, 1), (2, 3, 4), (-1, 3, 7), (2, 4, 6)\big\} \subset \mathbb{R}^3$

(6) Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son o no una base del subespacio vectorial U:
(a) $S = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$, $U = \mathbb{R}^3$
(b) $S = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 2), (2, 5, 6, 4), (2, 6, 8, 5)\}$, $U = \mathbb{R}^4$
(c) $S = \{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = y\}$
(d) $S = \{(1, 2, 3, 0), (0, 0, 0, 1), (-1, 1, 0, 4)\}$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon z = x + y\}$

(7) Obtener una base de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales:
(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$
(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = y = z\} \leq \mathbb{R}^3$
(c) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon z = 3x, y = t\} \leq \mathbb{R}^4$
(d) $U = L\big((1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4), (3, 8, -3, -5)\big) \leq \mathbb{R}^4$

(8) Encontrar unas ecuaciones implícitas para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales:

(a) $U = L\big((1,1,-2),(2,-3,1)\big) \leq \mathbb{R}^3$
(b) $U = L\big((1,1,2),(-1,1,1),(5,-3,2)\big) \leq \mathbb{R}^3$
(c) $U = L\big((1,2,-1,3),(-2,-4,2,-6)\big) \leq \mathbb{R}^4$
(d) $U = L\big((1,1,2,-3,-1),(1,0,1,0,1),(0,1,1,2,-3)\big) \leq \mathbb{R}^5$

(9) Sean $B = \{(1,0,-1),(2,1,1),(0,1,1)\}$ y $B' = \{(1,1,-2),(0,2,0),(-1,1,1)\}$.
(a) Demostrar que B y B' son bases de $\mathbb{R}^3$.
(b) Calcular el vector $(4,-2,5)$ en coordenadas respecto de B y de B'.
(c) Calcular el vector $(1,-2,0)_B$ en coordenadas respecto de B'.
(d) Calcular el vector $(-2,1,3)_{B'}$ en coordenadas respecto de B.

(10) Consideremos los vectores v_1, v_2 y v_3 de $\mathbb{R}^3$ dados por $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,1)$ y $v_3 = (-1,-2,-1)$. Se pide:
(a) Calcular una base B del subespacio $U = L\big(v_1, v_2, v_3\big) \leq \mathbb{R}^3$.
(b) Ampliar la base B del apartado anterior hasta obtener una base B' de $\mathbb{R}^3$.
(c) Calcular unas ecuaciones implícitas del subespacio U del apartado (a).

(11) Se pide:
(a) Calcular una base para $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x - 3t = 0,\ y + 2z = 0\}$. Ampliarla hasta obtener una base de $\mathbb{R}^4$.
(b) Comprobar si $S = \{(3,0,0,1),(0,-2,1,0),(-3,-2,1,-1)\}$ es una base de U.

(12) Calcular una base de los subespacios:
(a) $U = L\big((1,1,0),(1,0,0),(1,3,0)\big)$
(b) $V = L\big((1,1,0,2),(0,0,0,1),(2,2,0,1),(1,1,0,3)\big)$

(13) Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales y determinar en su caso el núcleo y la imagen.
(a) $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(u) = u + u_0$ con u_0 un vector fijo de $\mathbb{R}^3$.
(b) $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(u) = u_0$ con u_0 un vector fijo de $\mathbb{R}^3$.
(c) $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2, 0, x_2 + x_3)$.
(d) $f \colon \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $f(p(x)) = xp'(x)$, donde $p'(x)$ es la derivada de $p(x)$.
(e) $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (2x + y + 4z, x + y + 2z, x + y + 3z)$.
(f) $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4, x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4)$.
(g) $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + x_2 + 3x_3, 3x_1 - x_2 + x_3, -4x_1 + 3x_2 + x_3)$.
(h) $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (z, x + y, -z)$.
(i) $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x + y, 0)$.

(14) ¿Existe una aplicación lineal $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de forma que su núcleo es el subespacio generado por $(1,0,1)$ y $(1,1,1)$ y la imagen está generada por $(1,0,0,0)$ y $(1,2,0,0)$?

(15) En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios $U = L\big((1,1,1)\big)$ y $W \equiv x + y + z = 0$. Determinar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ de forma que $\ker(f) = U$ e $\operatorname{Im}(f) = W$.

(16) En $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo dado por:
$$f(1,1,1) = (2,3,3), \quad f(1,1,0) = (1,3,2), \quad f(1,0,0) = (0,1,1).$$
Calcular la matriz del endomorfismo f respecto de la base canónica en el dominio y la base $B' = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ en el codominio.