Matemáticas I - 1^{o} Grado en Ingeniería Electrónica Industrial
Relación de Ejercicios 1

(1) Sean A y B dos matrices de orden 4×5 y C, D, E y F matrices con rdenes 5×2, 4×2, 5×2 y 5×4, respectivamente. Determinar cules de las siguientes expresiones matriciales estn bien definidas y, en tal caso, calcular el orden de la matriz resultante:
BA, $AC + D$, $AE + B$, $AB + B$, $E(A + B)$, $E(AC)$, $E^t A$, y $(A^t + E)D$.

(2) Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Calcular, si es posible, $A^2 - (AB) + B^2$ y $2A + C^2$.

(3) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

calcular, si es posible: AB, $D + E$, $D - E$, DE, ED, BC y $C^t B$.

(4) Dadas las matrices siguientes, estudiar si son matrices cuadradas y, si lo son, especificar si son triangulares, diagonales o escalonadas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(5) Para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

comprobar que se verifican estas propiedades:

a) $AB \neq BA$ (el producto de matrices no es conmutativo),

b) $(AB)^t = B^t A^t$ (la traspuesta del producto es el producto de las traspuestas cambiado de orden).

(6) Sabemos que si dos nmeros reales a y b verifican $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. Encontrar un ejemplo de dos matrices cuadradas de orden dos A y B que cumplan $AB = 0_{2\times 2}$ y ninguna de las dos matrices sea la matriz cero.

(7) Estudiar si las siguientes matrices tienen inversa y, en su caso, calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(8) Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz X de orden 2×2 que resuelve las ecuaciones matriciales: $BX = C$, $AX - B = C$ y $XC^t = B$.

(9) Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -6 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

(10) Para la matriz D del ejercicio anterior calcular los menores adjuntos δ_{13}, δ_{34} y δ_{21}. Calcular también el determinante $|D|$.

(11) Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 14 & 4 \end{vmatrix}.$$

(12) Analizar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden entonces $|A+B| = |A| + |B|$.

(13) Determinar el rango de las siguientes matrices en función del parámetro t:

$$A = \begin{pmatrix} t & t+3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t & 3 & -1 \\ 0 & t+1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & t+3 \\ 1 & t & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(14) Decidir cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones son lineales. Para los que lo sean, escribir la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+\sqrt{z} & = & 0 \\ y-z & = & 3x \\ x+y+z & = & 0 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ y-z & = & 35 \\ x+2y+3z & = & 2007 \end{array} \right.,$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2z & = & -3y \\ \sin(2)\,z & = & 35-2x \\ y+x & = & \sqrt{3}\,z \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 28 \\ z^2 & = & 35 \\ \sin(x)+\cos(y) & = & \tan(z) \end{array} \right..$$

(15) Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+2y+10z & = & 18 \\ 2x+3y+12z & = & 23 \\ 2y+5z & = & 11 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & -1 \\ 3x-y+2z & = & 1 \\ 5x+3y-4z & = & 2 \end{array} \right.,$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 6 \\ 2x-y+4z & = & 2 \\ 4x+3y-2z & = & 14 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x-3y+4z-2t & = & 5 \\ 2y+5z+t & = & 2 \\ y-3z & = & 4 \end{array} \right..$$

(16) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales escalonados:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 1 \\ y+z+t &=& 2 \\ z+t &=& 3 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& -z-t \\ y+z+t &=& 3 \end{array}\right. , \quad \{x-y+10z=8 .$$

(17) Utilizar el método de Gauss para discutir y resolver los sistema de ecuaciones lineales del ejercicio 2. En caso de que alguno de estos sistemas sea de Cramer, resolverlo también haciendo uso de la regla de Cramer.

(18) Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -4y-z &=& -7 \\ x+y+z &=& 2 \\ x-2y+z &=& -2 \\ -x+2y &=& 3 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcl} y+z-2s+t &=& 2 \\ x+2y+s &=& 7 \\ 2x-y+z+4s+t &=& 0 \end{array}\right. .$$

(19) Calcular los valores del parámetro k para los que el siguiente sistema de ecuaciones lineales es incompatible o compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y-z-2t &=& 0 \\ x+ky+z+t &=& 0 \\ x+2y+5z+7t &=& 0 \\ 2x+y+4z+5t &=& 0 \end{array}\right. .$$

(20) Discutir y resolver, cuando sea posible, los sistemas de ecuaciones lineales siguientes en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 1 \\ -x-y+z &=& -2 \\ x+az &=& -1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+4ay-2az &=& 2 \\ x-3az &=& 1 \\ x+3ay+(a-1)z &=& 2 \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y+az &=& 2 \\ 5x+3y+az &=& 2 \\ ax+5y+3z &=& 2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z &=& 2 \\ ax+ay+2z &=& a+2 \\ -ax-y+az &=& a^2+a-2 \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z &=& 1 \\ x+ay+z &=& a \\ x+y+az &=& a^2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+3y-az &=& 4 \\ -ax+y+az &=& 0 \\ -x+2ay &=& a+2 \\ 2x-y-2z &=& 0 \end{array}\right. .$$

(21) Las tres cifras de un número suman 21. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtiene 198. Se sabe también que la cifra de las decenas coincide con la media aritmética entre las otras dos. Calcular dicho número.

(22) Calcular la parábola $y=ax^2+bx+c$ cuya gráfica pasa por $(2,0)$, $(3,0)$ y $(-1,12)$.

(23) Para la construcción de un almacén se necesita una unidad de hierro y ninguna de madera. Para la construcción de un piso se necesita una unidad de cada material y para la construcción de una torre se necesitan cuatro unidades de hierro y una de madera. Si poseemos en reserva 14 unidades de hierro y cuatro de madera, decidir cuántos almacenes, pisos y torres se pueden construir de manera que se utilicen todas las reservas.