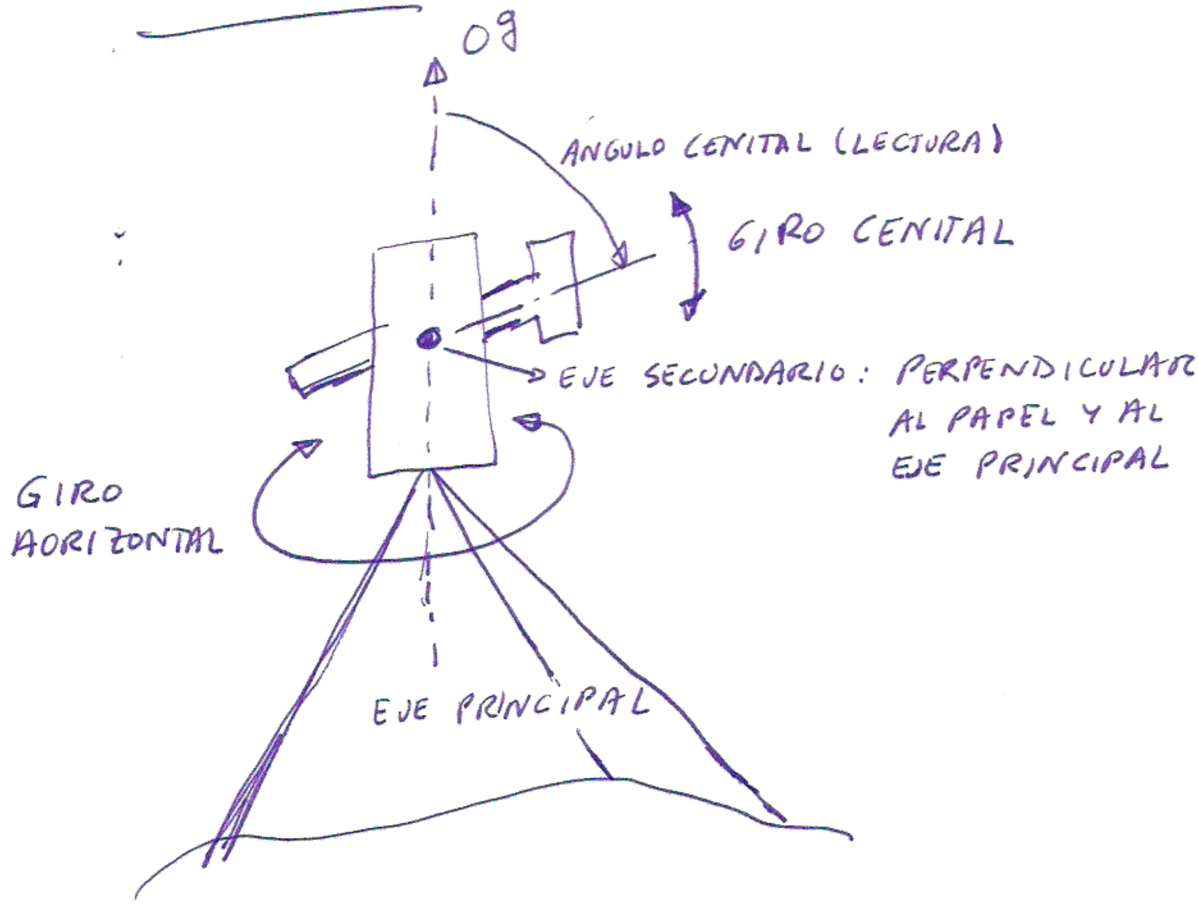
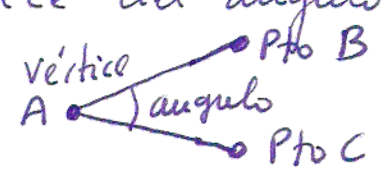
ÁNGULOS



– ÁNGULOS HORIZONTALES

La medición de ángulos se realizan con un teodolito o estación total estacionado en ~~el de los~~ vértice del ángulo que se pretende medir.



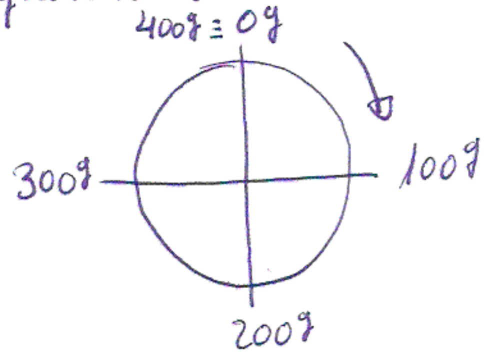
$\widehat{BAC}$.

El aparato (estación total o teodolito) tiene un origen de medición propio (cero del aparato)

Además el sentido de medición de los ángulos puede ser DIRECTO (contrario al movto. de las agujas del reloj) o INVERSO (a favor de " " " ").
RETRÓGRADO

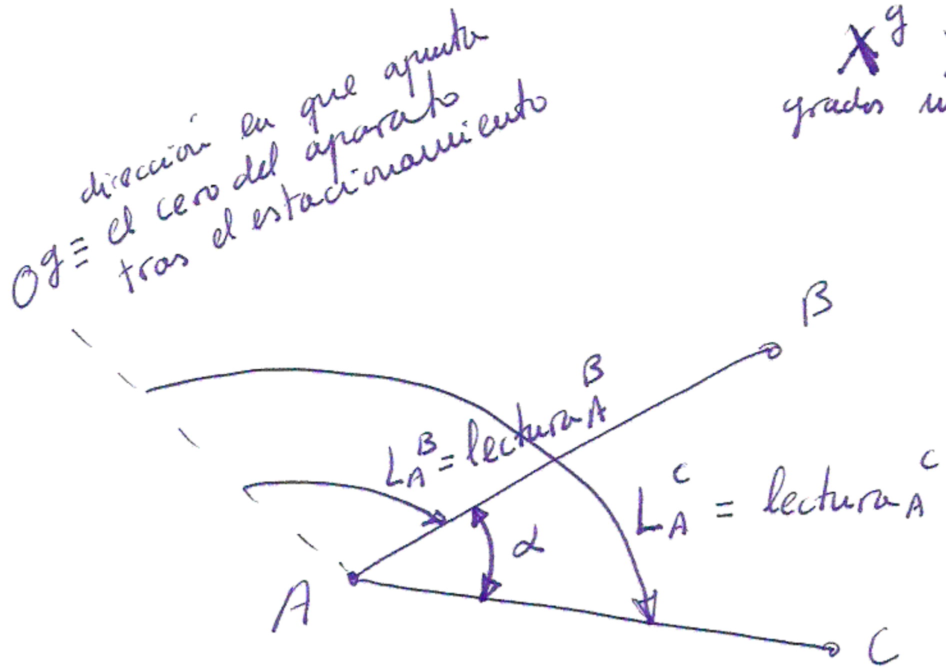
Esquema de medición de ángulos horizontales considerando que la graduación del limbo horizontal del aparato está hecha en sentido INVERSO. El
RETRÓGRADO
limbo equivale a un círculo graduado

LIMBO



En esta figura se han considerado ángulos centesimales cuyo rango es $[0^g, 400^g]$ y se simbolizan como:

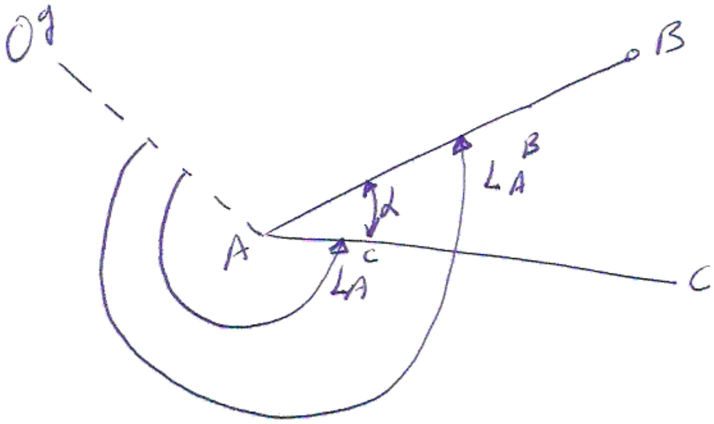
X^g X^c X^{cc}
grados minutos segundos



Denominamos Lectura Horizontal ($L_{estación}^{pto}$) desde la estación al pto como el ángulo formado entre la dirección en que apunta el cero del aparato y la dirección del pto medido en la figura hay 2 lecturas horiz: L_A^B y L_A^C siendo A ~~la~~ ~~planta~~ estación.

El ángulo que interesa medir es $\boxed{\alpha = L_A^C - L_A^B}$

Si la graduación del aparato es <u>directa</u> las lecturas y el valor del ángulo quedarían como sigue:



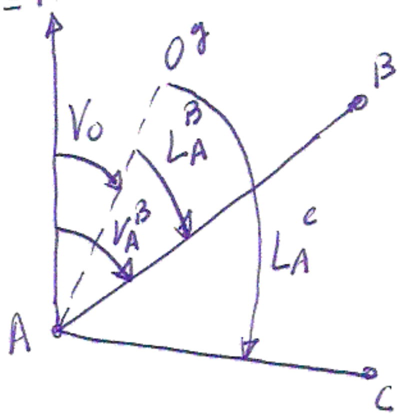
$$\alpha = L_A^B - L_A^C$$

En topografía cualquier dirección se refiere al norte de la cuadrícula del sistema cartográfico en el que se expresan las coordenadas de los ptos que materializan tal dirección. Tal expresión de una dirección es el Acimut cartográfico (V).

Es útil calcular la CONSTANTE DE ORIENTACIÓN (V_0) DEL APARATO, porque una vez conocida es fácil calcular el acimut cartográfico de cualquier dirección conociendo sólo su lectura horizontal.

Suponiendo graduación y sentido de medición <u>RETRÓGRADO</u>:

NC ≡ Norte Cuadrícula

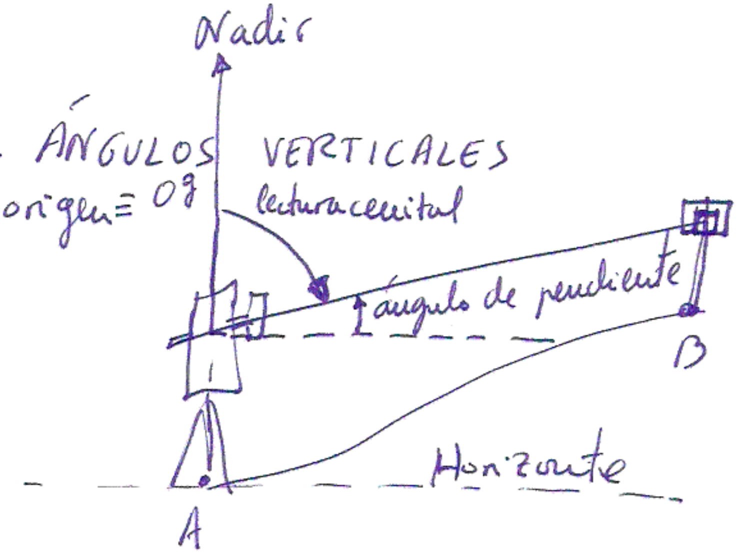


$$V_A^B = L_A^B + V_0 \Rightarrow V_0 = V_A^B - L_A^B$$

y de ahí es fácil obtener V_A^C

$$\boxed{V_A^C = L_A^C + V_0}$$

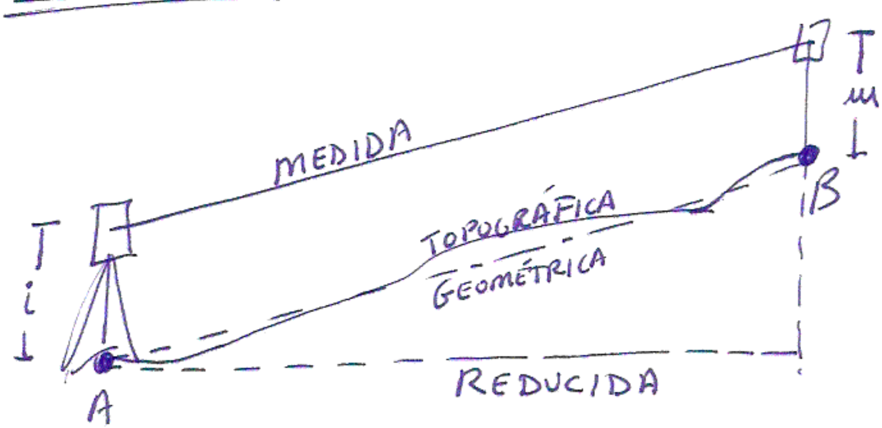
– ÁNGULOS VERTICALES



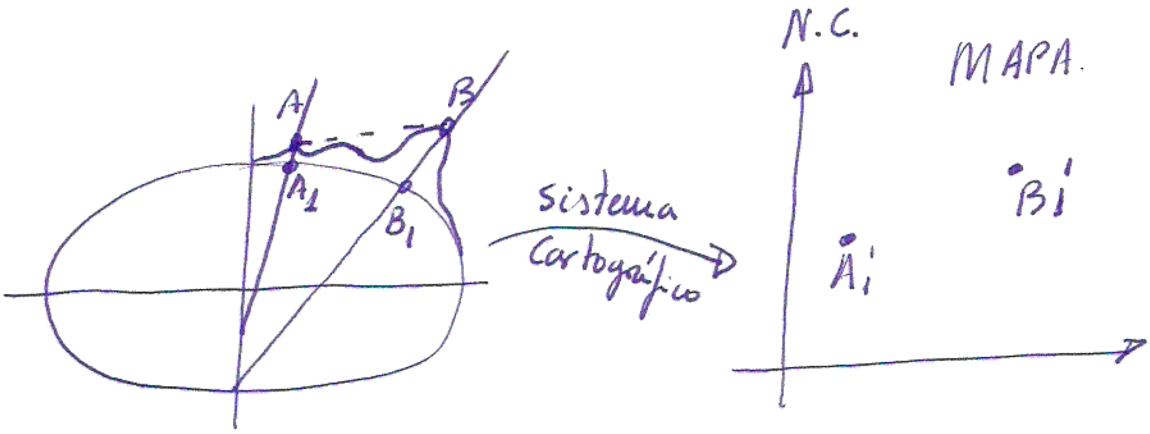
en medición de ángulos verticales el origen (0g) se encuentra en el nadir (siguiendo la vertical por encima del horizonte)

La lectura cenital (ξ) también es denominada distancia cenital.

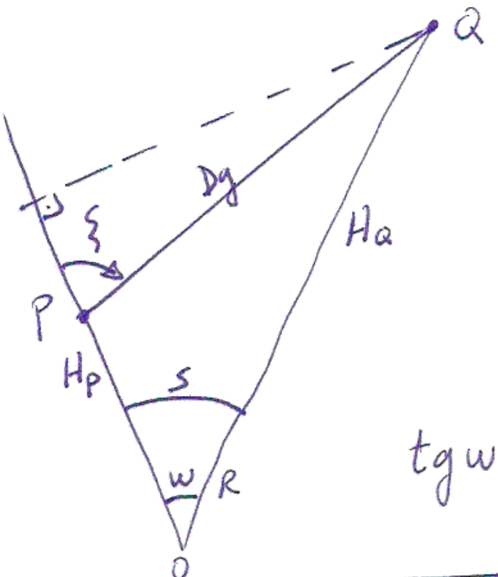
DISTANCIAS (DENOMINACIONES)



REDUCCIÓN DE DISTANCIAS AL ELIPSOIDE



Para representar cualquier punto sobre el mapa o plano, aquel debe encontrarse reducido a la superficie del elipsoide (en la figura: A_1 y B_1). Sin embargo las distancias medidas con la estación total no están reducidas al elipsoide ($\overline{AB}$ en la figura) por ello será necesario reducir tales distancias al elipsoide ($\widehat{A_1B_1}$ en la figura).



S = dist. reducida al elips.

H_P, H_Q: altitudes geodésicas

ξ = dist. cenital

R = radio terrestre

D_g: dist. geométrica.

$$\operatorname{tg} w = \frac{D_g \cdot \operatorname{sen} \xi}{R + H_p + D_g \cos \xi}$$

$$\boxed{S = w^r \cdot R}$$

Si se conoce φ del lugar $\quad R = \dfrac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}$

e = excentricidad elipsoide

La misma reducción al elipsoide se puede conseguir mediante un encadenamiento de 3 correcciones:

- C_1: paso de la geométrica al horizonte medio:

$$C_1 = D_g - D_R = \frac{H^2}{2D_g}$$

- C_2: reducción a la cuerda ~~(nivel del)~~ del elipsoide

$$C_2 = D_R - D_{cuerda} = \frac{D_R \cdot H}{R}$$

- C_3: paso de la cuerda al arco

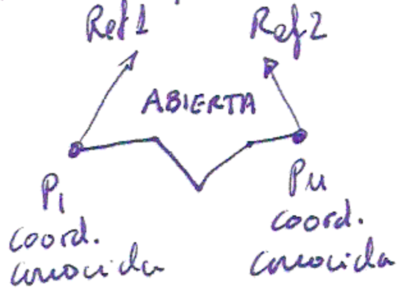
$$C_3 = S - \text{cuerda} = \frac{(D_{cuerda})^3}{24R^2}$$

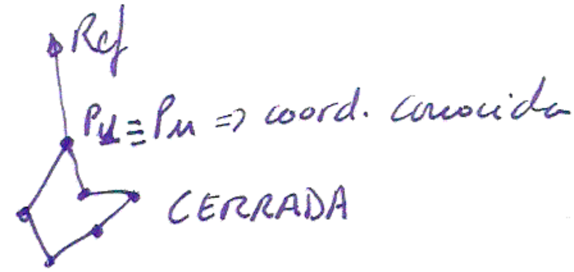
$$\boxed{S = D_g - C_1 - C_2 + C_3}$$

POLIGONAL O ITINERARIO

Método topográfico planimétrico que partiendo de un pto de coordenadas conocidas y el acimut cartográfico desde él y en una dirección dada, permite transmitir coordenadas a los vértices de una línea poligonal. Ello requiere el estacionamiento en dichos vértices y observación de ángulos y distancias.

Sólo consideraremos poligonales en las que pto. inicial y final sean de coord. conocidas. De forma que se pueda compensar la observación.





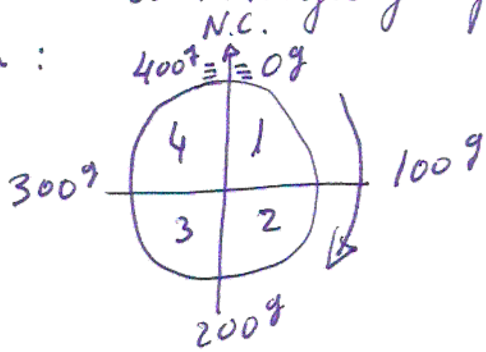
$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \equiv$ VÉRTICES

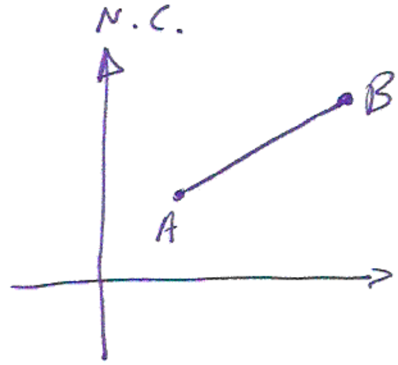
Haremos el estudio sobre el caso más general: una poligonal abierta y cuyos ~~ptos~~ vértices extremos observan a referencias distintas (Ref 1 y Ref 2 en la figura). Los acimutes a tales referencias deben ser conocidos.

Conocimientos previos:

* CÁLCULO DEL ACIMUT A PARTIR DE 2 PTOS DE COORD. CONOCIDAS (suponiendo graduación centesimal)

En el caso de acimut cartográfico lo sentido de medición es retrógrago por tanto los cuadrantes serán:





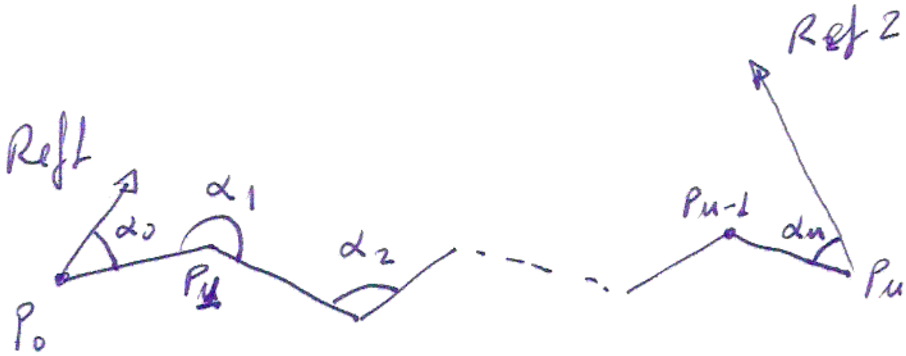
$$\boxed{V_A^B = \operatorname{arctg} \frac{\Delta X_A^B}{\Delta Y_A^B}}$$

Dependiendo del cuadrante la fórmula anterior debe ser modificada:

* 2º y 3er cuadrante $V_A^B = \operatorname{arctg} \dfrac{\Delta X_A^B}{\Delta Y_A^B} + 200^g$

* 4º cuadrante $V_A^B = \operatorname{arctg} \dfrac{\Delta X_A^B}{\Delta Y_A^B} + 400^g$

OBSERVACIÓN DE LA POLIGONAL



Datos conocidos: coord. de Ref1, Ref2, P_0 y P_n
también podría no conocerse las coord. de Ref1 y Ref2 y en su lugar saber los $V_{P_0}^{Ref1}$ y $V_{P_n}^{Ref2}$ (acimutes cartográficos)

Observables:

1.- Se estaciona en P_0 y se toman lecturas horizontales a Ref1 y P_1 ($L_{P_0}^{Ref1}$, $L_{P_0}^{P_1}$), lectura cenital a P_1 ($\xi_{P_0}^{P_1}$) y distancia medida a P_1 ($D_{P_0}^{P_1}$)

2. Se estaciona en cada uno de los vértices intermedios (P_i) y se observan, $L_{P_i}^{P_{i-1}}$, $L_{P_i}^{P_{i+1}}$, $\xi_{P_i}^{P_{i-1}}$, $\xi_{P_i}^{P_{i+1}}$, $D_{P_i}^{P_{i-1}}$, $D_{P_i}^{P_{i+1}}$

3. Se estaciona en el último vértice (P_n) y se observa $L_{P_n}^{P_{n-1}}$, $L_{P_n}^{Ref2}$, $D_{P_n}^{P_{n-1}}$

CÁLCULO DE LA POLIGONAL (según la observación)

1. Se calculan los ángulos de la poligonal

$$\alpha_0 = L_{P_0}^{P_1} - L_{P_0}^{Ref1}$$

$$\alpha_i = L_{P_i}^{P_{i+1}} - L_{P_i}^{P_{i-1}}$$

$$\alpha_n = L_{P_n}^{Ref2} - L_{P_n}^{P_{n-1}}$$

2. Se transmiten los acimutes (corrida de acimutes)

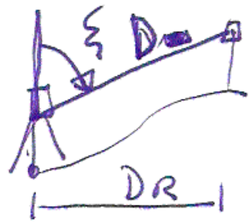
$$V_{P_0}^{P_1} = V_{P_0}^{Ref1} + \alpha_0$$

$$V_{P_i}^{P_{i+1}} = V_{P_i}^{P_{i-1}} + \alpha_i$$

$$V_{P_n}^{Ref2} = V_{P_n}^{P_{n-1}} + \alpha_n$$

3. Se calculan las distancias reducidas al horizonte (D_R)

$$D_R = D_m \cdot \operatorname{sen} \xi$$



$$D_{R\,P_0}^{P_1} = D_{P_0}^{P_1} \cdot \operatorname{sen} \xi_{P_0}^{P_1}$$

$$D_{R\,P_i}^{P_{i+1}} = D_{P_i}^{P_{i+1}} \cdot \operatorname{sen} \xi_{P_i}^{P_{i+1}}$$

4. Se calculan los incrementos de coord. en los vértices

$$\left(\Delta X_{P_0}^{P_1}\right)' = D_{R\,P_0}^{P_1} \cdot \operatorname{sen} V_{P_0}^{P_1}$$

$$\left(\Delta Y_{P_0}^{P_1}\right)' = D_{R\,P_0}^{P_1} \cdot \cos V_{P_0}^{P_1}$$

$$\vdots$$

$$\left(\Delta X_{P_{n-1}}^{P_n}\right)' = D_{R\,P_{n-1}}^{P_n} \cdot \operatorname{sen} V_{P_{n-1}}^{P_n}$$

$$\left(\Delta Y_{P_{n-1}}^{P_n}\right)' = D_{R\,P_{n-1}}^{P_n} \cdot \cos V_{P_{n-1}}^{P_n}$$

Se denotan con prima para indicar que adolecen de errores observacionales

COMPENSACIÓN DE LA POLIGONAL

El error de cierre en coordenadas es

$$\Sigma\left(\Delta X_{P_i}^{P_{i+1}}\right)' - \underbrace{\Delta X_{P_0}^{P_1}}_{\text{Dato de partida}} = \mathcal{E}_x$$

$$\Sigma\left(\Delta Y_{P_i}^{P_{i+1}}\right)' - \overline{\Delta Y_{P_0}^{P_1}} = \mathcal{E}_y$$

$\mathcal{E}_T = \sqrt{\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2}$ (error total)

- Se procede a la compensación sólo si el error es menor que el valor de tolerancia preestablecido

- método de compensación de Bowditch

Las correcciones totales son $C_x = -\mathcal{E}_x$

$C_y = -\mathcal{E}_y$

Los incrementos corregidos son:

$$\overline{\Delta X}_{P_i}^{P_{i+1}} = \Delta X_{P_i}^{P_{i+1}} + C_{x_{P_i}}^{P_{i+1}}$$

$$\overline{\Delta Y}_{P_i}^{P_{i+1}} = \Delta Y_{P_i}^{P_{i+1}} + C_{y_{P_i}}^{P_{i+1}}$$

El gorro indica corregida

donde $C_{x_{P_i}}^{P_{i+1}} = C_x \cdot \dfrac{D_{R_{P_i}}^{P_{i+1}}}{L}$

$C_{y_{P_i}}^{P_{i+1}} = C_y \cdot \dfrac{D_{R_{P_i}}^{P_{i+1}}}{L}$

L es la longitud total de la poligonal

Las coord. corregidas son:

$$\overline{X}_{P_1} = X_{P_0} + \overline{\Delta X}_{P_0}^{P_1} \quad ; \quad \overline{Y}_{P_1} = Y_{P_0} + \overline{\Delta Y}_{P_0}^{P_1}$$

$$\overline{X}_{P_2} = \overline{X}_{P_1} + \overline{\Delta X}_{P_1}^{P_2} \quad ; \quad \overline{Y}_{P_2} = \overline{Y}_{P_1} + \overline{\Delta Y}_{P_1}^{P_2}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\overline{X}_{P_n} = \overline{X}_{P_{n-1}} + \overline{\Delta X}_{P_{n-1}}^{P_n} \quad ; \quad \overline{Y}_{P_n} = \overline{Y}_{P_{n-1}} + \overline{\Delta Y}_{P_{n-1}}^{P_n}$$

IMPORTANTE: comprobar que las últimas igualdades se cumplen

INTERSECCIONES

Mediante las intersecciones se determinan las coord. de un pto. incógnita. Existen 2 tipos

DIRECTA (se estaciona en 2 ptos de coord. conocidas)

INVERSA (" " " el pto. incógnita y se observa a 3 ptos. de coord. conocidas).

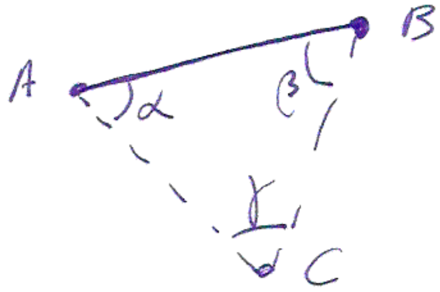
INTERSECCIÓN DIRECTA

Puede ser angular o lineal dependiendo del observable.

ANGULAR: Datos: A y B conocidos

Incógnita C

Observables: $L_A^B, L_A^C, L_B^A, L_B^C$



$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha = L_A^C - L_A^B \\ \beta = L_B^A - L_B^C\end{array}}$$

considerando graduación RETRÓGRADO

$$\overline{AB} = \sqrt{(\Delta X_A^B)^2 + (\Delta Y_A^B)^2}$$

$$V_A^B = \operatorname{arctg} \frac{\Delta X_A^B}{\Delta Y_A^B} + \begin{matrix}200\\0\\400\end{matrix}$$ según cuadrante.

$$\gamma = 200 - (\alpha + \beta)$$

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\gamma} \Rightarrow$$ Se calcula $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$

$$V_A^C = V_A^B + \alpha \quad \text{y} \quad V_B^C = V_B^A - \beta$$

$$X_C = X_A + \overline{AC} \cdot \operatorname{sen} V_A^C \qquad \text{ó} \qquad X_C = X_B + \overline{BC} \cdot \operatorname{sen} V_B^C$$

$$Y_C = Y_A + \overline{AC} \cdot \cos V_A^C \qquad\qquad Y_C = Y_B + \overline{BC} \cdot \cos V_B^C$$

El caso de la lineal es ligeramente diferente

Observables: distancias $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$

Sólo hay que calcular α y β, ~~el resto~~ ~~sería~~ a partir de ahí queda reducido al caso angular. Por la formula del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}}$$

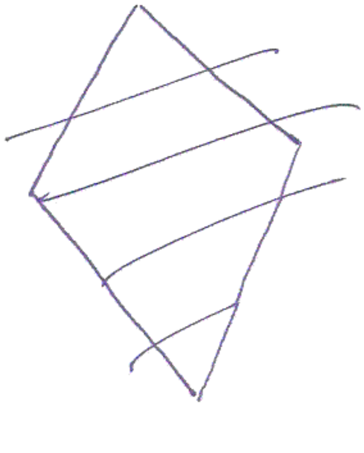
$$\cos\beta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\,\overline{AB}\cdot\overline{BC}}$$

El resto igual que en el caso angular.

ELIPSE DE TOLERANCIA

Permite calcular el error cometido en la Int. Directa ~~El error~~ La incertidumbre del pto. incógnita se puede calcular para cada distancia como $D\cdot e''$ siendo e'' el error angular propio del aparato y $D = \overline{AC}$ ó $D = \overline{BC}$.

El cuadrilátero de indeterminación se podrá aproximar por un paralelogramo de indeterminación.

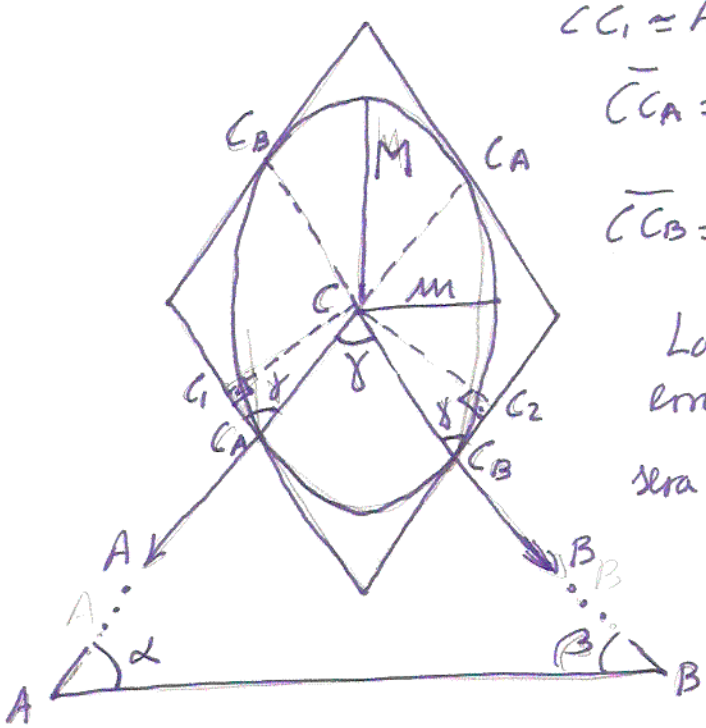


Consideramos $AC \simeq BC$ como la incertidumbre es $\overline{CC_1}$ y $\overline{CC_2}$

$$\overline{CC_1} \simeq \overline{AC}\cdot e^r \text{ y } \overline{CC_2} \simeq \overline{BC}\cdot e^r$$

$$\overline{CC_A} = \frac{\overline{CC_1}}{\operatorname{sen}\gamma} \simeq \frac{\overline{AC}\cdot e^r}{\operatorname{sen}\gamma}$$

$$\overline{CC_B} = \frac{\overline{CC_2}}{\operatorname{sen}\gamma} \simeq \frac{\overline{BC}\cdot e^r}{\operatorname{sen}\gamma}$$



La composición de ambos errores considerando $D = \frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{2}$ será:

$$\mathcal{E} = \frac{D\cdot e^r\cdot\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\gamma}$$

como $\gamma = 180 - (\alpha+\beta)$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{D\cdot e^r\cdot\sqrt{2}}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}}$$

El error suele encontrarse en el interior de la elipse inscrita en dicho paralelogramo (rombo) con lo que el error máximo será el correspondiente a su semieje mayor M.

Por los teoremas de Apolonio

$$M\cdot m = \mathcal{E}^2\operatorname{sen}\gamma \quad (1)$$

$$M^2+m^2 = 2\mathcal{E}^2 \quad (2)$$

$$(1)\times 2 + (2) \Rightarrow M^2+m^2+2Mm = (M+m)^2 = 2\mathcal{E}^2(1+\operatorname{sen}\gamma)$$

$$(1)\times 2 - (2) \Rightarrow M^2+m^2-2Mm = (M-m)^2 = 2\mathcal{E}^2(1-\operatorname{sen}\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{l} M+m = \mathcal{E}\sqrt{2(1+\operatorname{sen}\gamma)} \\ M-m = \mathcal{E}\sqrt{2(1-\operatorname{sen}\gamma)} \end{array}\right\} \Rightarrow M = \frac{\mathcal{E}}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}\gamma}+\sqrt{1-\operatorname{sen}\gamma}\right)$$

Como $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}\gamma}+\sqrt{1-\operatorname{sen}\gamma}\right) \Rightarrow M = \mathcal{E}\sqrt{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

$M = \frac{2De\cos\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}}$ como $\operatorname{sen}\gamma = 2\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \Rightarrow \boxed{M = \frac{De^r}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}}}$

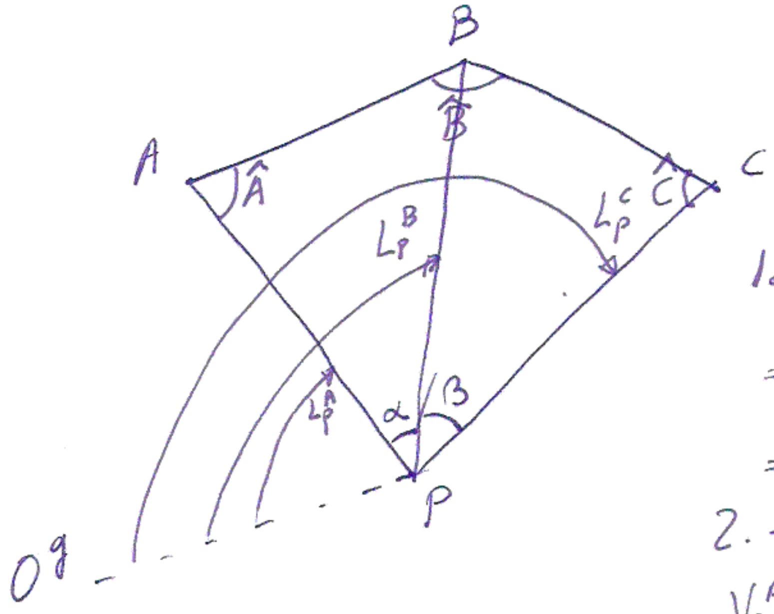
La fórmula indica que el error aumenta al disminuir γ

INTERSECCIÓN INVERSA

Datos: coord. de A, B y C.

~~Observables~~: Incógnita: coord. P.

Observables: L_P^A, L_P^B, L_P^C



1.- Se calculan α y β

$$\underline{\alpha = L_P^B - L_P^A}$$

$$\underline{\beta = L_P^C - L_P^B}$$

2.- Calcular V_B^A y V_B^C

$$V_B^A = \operatorname{arctg} \frac{\Delta X_B^A}{\Delta Y_B^A} \quad \left(\begin{array}{l} +200 \\ \text{o} \\ 400 \end{array} \text{si ha lugar} \right)$$

igual para V_B^C:

$$\overline{AB} = \sqrt{(\Delta X_A^B)^2 + (\Delta Y_A^B)^2} \; ; \; \overline{BC} = \sqrt{(\Delta X_B^C)^2 + (\Delta Y_B^C)^2} \; ; \; \underline{\hat{B} = V_B^A - V_B^C}$$

3. Cálculo de $\hat{A}$ y $\hat{C}$ para obtener los V_A^P y V_C^P además de las distancias $\overline{AP}$ y $\overline{CP}$

Para ello:

$$\hat{A} + \hat{C} = 400^g - (\alpha + \beta + \hat{B}) \quad \text{(Eq. 1)}$$

de $\overset{\triangle}{ABP}$ y $\overset{\triangle}{BPC}$ $\Rightarrow$

$$BP = \overline{AB} \frac{\operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{sen} \alpha} = \overline{BC} \frac{\operatorname{sen} \hat{C}}{\operatorname{sen} \beta} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} \quad \text{(Eq. 2)}$$

Si sustituimos $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = K$ será un valor conocido

De (Eq. 2)

$$\frac{\operatorname{sen} \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{C}}{\operatorname{sen} \hat{A} - \operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{K+1}{K-1} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{C})}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{C})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{C}) = \frac{K-1}{K+1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{C}) \quad (Eq. 3)$$

Como (Eq. 1) $\hat{A}+\hat{C} = 400^g - (\alpha+\beta+\hat{B})$

~~se~~ tiene un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas ($\hat{A}$ y $\hat{C}$) que permite obtener los valores de $\hat{A}$ y $\hat{C}$.

4. Una vez conocidos $\hat{A}$ y $\hat{C}$

$$V_A^P = V_A^B + \hat{A} \quad ; \quad V_C^P = V_C^B - \hat{C}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\operatorname{sen}[180-(\alpha+\hat{A})]} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \overline{AP} = \overline{AB}\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\hat{A})}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\frac{\overline{CP}}{\operatorname{sen}[180-(\hat{C}+\beta)]} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \cancel{\overline{BP} = BC}\ \overline{CP} = \overline{BC}\,\frac{\operatorname{sen}(\hat{C}+\beta)}{\operatorname{sen}\beta}$$

5. Finalmente

$$X_P = X_A + \overline{AP}\cdot\operatorname{sen} V_A^P \quad \text{ó} \quad X_P = X_C + \overline{CP}\cdot\operatorname{sen} V_C^P$$

$$Y_P = Y_A + \overline{AP}\cdot\cos V_A^P \quad \text{ó} \quad Y_P = Y_C + \overline{CP}\cdot\cos V_C^P$$