Lógica Proposicional
y
Teoría de Conjuntos

1. Rudimentos de Lógica

1.1. El método axiomático

Matemáticas es el estudio de las relaciones entre ciertos objetos ideales como números, funciones y figuras geométricas. Estos objetos no existen en el mundo real sino que son modelos abstractos de situaciones físicas.

Para que un sistema matemático sirva como modelo de la realidad debemos tener en principio un método para reconocer enunciados verdaderos, aunque en la práctica alguno puede ser difícil de demostrar. Cuando los objetos de estudio nos son intuitivamente familiares (como los números enteros), tomamos como axiomas ciertas propiedades intuitivamente verdaderas e intentamos deducir a partir de ellas todas las restantes propiedades del sistema. Una vez elegidos los axiomas, podemos olvidar la interpretación intuitiva y vemos a nuestros objetos como entidades abstractas sujetas a los axiomas dados. Cuando vayamos a aplicar nuestro sistema a un caso concreto, debemos buscar una interpretación para cada noción introducida y verificar que en esta interpretación todos los axiomas son verdad. Entonces podemos concluir que todos los enunciados derivados de los axiomas también son ciertos. Esta consideración subraya la necesidad de mantener el sistema de axiomas lo mas pequeño posible.

Dos ventajas de este método axiomático es que podemos examinar el efecto sobre nuestro sistema de variar los axiomas y que las demostraciones son mas trasparentes cuanto mas abstracto es el sistema. Por otra parte cuesta algún tiempo familiarizarse con las nociones abstractas. En esto puede ayudar el modelo mas o menos concreto en que se basa nuestro sistema, aunque no es estrictamente necesario y ciertamente no forma parte de la teoría.

Estudiar estas nociones abstractas es como aprender un idioma nuevo. Pero hay un aspecto en el que este proceso difiere de aprender un lenguaje: Debemos razonar sobre los nuevos conceptos y esto requiere atención cuidadosa a la interrelación lógica de los enunciados. Naturalmente es cierto que aún en la vida cotidiana podemos despreciar la lógica sólo bajo nuestra responsabilidad, pero la evidencia patente de lo absurdo de las conclusiones normalmente nos fuerza a abandonar una línea falsa de razonamiento. Por contra cuando seguimos una línea abstracta de pensamiento sobre conceptos no familiares, podemos alcanzar por razonamiento lógico conclusiones que no podemos tamizar por el sentido común. Por tanto es importante estar totalmente familiarizado con las reglas lógicas que necesitamos y ser conscientes de que estas reglas pueden aplicarse sin mirar el significado actual de los enunciados a los que las aplicamos. Por esta razón empezamos describiendo brevemente algunos conceptos y notaciones de la lógica.

1.2. Proposiciones

Para nuestro propósito podemos suponer que cada proposición es o verdadera o falsa. Usamos "V" para verdadero y "F" para falso. El correspondiente valor V o F se llama el *valor de verdad* de la proposición.

La Lógica Proposicional describe las formas en que podemos combinar enunciados (también llamados *proposiciones*) verdaderos para producir otros enunciados verdaderos. Usualmente se consideran cinco operaciones principales de ese tipo (llamados *conectivos lógicos*), aunque técnicamente podemos derivarlas todas de una o dos de ellas. Estas operaciones son:

Sean A y B dos enunciados (no necesariamente distintos). Definimos la expresión "A y B" también escrito $A \wedge B$, y llamada la *conjunción* de A y B mediante una *tabla de verdad*

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \wedge B$	V	F	F	F

Esta tabla muestra que $A \wedge B$ es verdad cuando A y B son ambas verdaderas y es falso en el resto de los casos.

Una segunda forma en que podemos combinar proposiciones es utilizando la *disjunción* "A o B" que también se escribe como "$A \vee B$". Su tabla de verdad es:

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \vee B$	V	V	V	F

Esto quiere decir que $A \vee B$ es verdad si lo es A o B o ambas.

A partir de cualquier proposición podemos formar su opuesta o *negación* insertando "no" en los lugares adecuados. En general si A es una proposición su negación es "no A" denotada también "$\neg A$ que es verdadera precisamente cuando A es falsa. Su tabla de verdad es

A	V	F
$\neg A$	F	V

La noción de *implicación* es especialmente importante y su uso en matemáticas difiere en algo de su uso corriente, aunque naturalmente el significado subyacente es el mismo.Así "A implica B" o "si A entonces B" se denota por "$A \Rightarrow B$ y significa que "A es falsa o B es verdadera". Su tabla de verdad es

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \Rightarrow B$	V	F	V	V

Nótese que si A es falsa, $A \Rightarrow B$ es verdadera para cualquier B, en otras palabras:

Un enunciado falso implica cualquier cosa. Esto puede parecer extraño al principio, pero tiene su análogo en el uso ordinario cuando subrayamos lo absurdo de una afirmación extrayendo un resultado aún mas absurdo.

(Nótese que se puede definir la implicación en función de los otros conectivos: "$A \Rightarrow B$ es igual a $(\neg A) \vee B$". Mas generalmente, cualquier proposición compuesta a partir de dos dadas A y B se puede definir usando sólo $\neg$ y $\vee$).

El último conectivo de uso frecuente es la *biimplicación* o *equivalencia lógica* "$A \Leftrightarrow B$" que se define como "$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$". Su tabla de verdad es

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \Leftrightarrow B$	V	F	F	V

Algunas proposiciones compuestas son verdaderas para todos los valores de verdad de la proposiciones elementales que aparecen. (Por ejemplo siempre es verdadera $A \vee (\neg A)$). Tales proposiciones se llaman *tautologías*. Para comprobar si una proposición dada es una tautología podemos usar tablas de verdad.

Por ejemplo consideremos $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$:

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \Rightarrow B$	V	F	V	V
$A \wedge (A \Rightarrow B)$	V	F	F	F
$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$	V	V	V	V

Así que $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ es una tautología porque en la última fila sólo aparecen V.

1.3. Predicados

Usualmente los enunciados simples discutidos hasta ahora no son suficientes para tratar las situaciones matemáticas.

Además de las proposiciones necesitamos *funciones proposicionales* o *predicados*. Por ejemplo "x es un número impar" (x recorre los números naturales) o "x es mayor que y" (x, y son números naturales). En contraste con las proposiciones, un predicado ya no es verdadero o falso sino que sólo llega a serlo cuando se sustituyen valores particulares para las variables: "2 es un número impar", "3 es mayor que 2".

En la práctica con frecuencia queremos decir que alguna afirmación $P(x)$ sobre x es verdadera para *todo* x (en el universo de discurso). Denotamos esto por

$$(\forall x)P(x)$$

que se lee "Para todo x se verifica $P(x)$". Decimos que la variable x está acotada por el *cuantificador universal* $\forall$.

Para expresar que $P(x)$ se verifica para *algún* x escribimos

$$(\exists x)P(x)$$

que leemos "Existe un x tal que $P(x)$". Aquí x está acotado por el *cuantificador existencial* $\exists$.

Finalmente para expresar que $P(x)$ se verifica exactamente para *un sólo valor* de x escribimos

$$(\exists_1 x)P(x)$$

que leemos "Existe un único x tal que $P(x)$". Ahora x está acotado por el *cuantificador existencial especial* $\exists_1$.

Cuando todas las variables que aparecen en un predicado están acotadas por cuantificadores, tenemos una proposición. Por ejemplo en el dominio de los números naturales $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$ significa que para cualesquiera x, y la suma $x + y$ es independiente del orden de los términos. De la misma manera $(\forall x)(\exists y)(x < y)$ dice que para todo x existe un y mayor que x, es decir que no existe un número máximo. Nótese que si aplicamos los cuantificadores en orden inverso obtenemos la proposición $(\exists y)(\forall x)(x < y)$ que dice que existe un y mayor que todo x. Evidentemente esto es falso mientras que lo anteriores verdad, así que se debe prestar atención al orden en que se aplican los cuantificadores.

Nótese también que una variable acotada puede siempre renombrarse sin cambiar el significado. Así $(\forall x)P(x)$ significa exactamente lo mismo que $(\forall y)P(y)$; por esta razón una variable acotada se llama también "variable muda". Con frecuencia usamos esta libertad para evitar conflictos de notación.

Por ejemplo en lugar de $(a = x + y) \wedge (\forall x)(a \neq 2x)$ es preferible $(a = x + y) \wedge (\forall z)(a \neq 2z)$. Ambas formas significan lo mismo, pero la segunda es menos propicia a las malas interpretaciones.

Los cuantificadores universal y existencial están relacionados por las equivalencias siguientes, que nos permiten definir uno de ellos en términos del otro:

$$\neg(\exists x)\neg P(x) \Leftrightarrow (\forall x)P(x)$$
$$\neg(\forall x)\neg P(x) \Leftrightarrow (\exists x)P(x)$$

Con ayuda de estas fórmulas (y notando que $\neg\neg A \Leftrightarrow A$) es fácil escribir la negación de cualquier fórmula con cuantificadores. Por ejemplo

$$\neg((\forall x)(\exists y)(\forall z)F(x, y, z)) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\exists z)(\neg F(x, y, z))$$

1.4. Demostraciones

En cualquier teoría matemática hay *axiomas* de los que se derivan los *teoremas* mediante deducciones lógicas (*demostraciones*) usando también los teoremas lógicos (*tautologías*). No es necesario ni apropiado describir en detalle la forma que tendría una tal demostración. La presentación usual de las demostraciones, lógicamente informal pero matemáticamente rigurosa, se asimila mejor estudiando diversos ejemplos. Pero puede ser útil exponer rápidamente los principales métodos de demostración.

Una demostración directa usualmente tiene la forma: "A es verdad y $A \Rightarrow B$ es verdad, luego B es verdad". En la lógica escolástica este proceso se llama *modus ponens*.

Es importante distinguir entre "$A \Rightarrow B$" por un lado y "A, de donde B" por otro. La distinción puede parecer pedante cuando A es verdad, pero ignorarla puede llevar a confusión.

A partir del enunciado $A \Rightarrow B$ podemos formar otros tres:

- El *recíproco* o *inverso* $B \Rightarrow A$.
- El *contrario* $\neg A \Rightarrow \neg B$.
- El *contrarrecíproco*$\neg B \Rightarrow \neg A$.

El contrarrecíproco es lógicamente equivalente al enunciado original (compruébense las tablas de verdad correspondientes). Por ello otra forma de demostración es el *modus tolens*: "A es verdad y $\neg B \Rightarrow \neg A$ es verdad, luego B es verdad".

Hay que observar que el recíproco no es equivalente al enunciado dado (comprobar también las tablas de verdad), por lo que un razonamiento del tipo "A es verdad y $B \Rightarrow A$ es verdad, luego B es verdad" no es correcto. Por ejemplo, supongamos que queremos demostrar "$(\forall x)(x^2$ par $\Rightarrow x$ es par)". No es correcto argumentar "Si x es par, x^2 es par, de donde el resultado", pero sí es correcto decir "Si x es impar, x^2 es impar, de donde el resultado".

Otra forma de prueba indirecta es *por contradicción* también llamado *reductio ad absurdum*: Para demostrar A mostramos que "$(\neg A) \Rightarrow F$", es decir demostramos que (no A) lleva a una contradicción.

También existe la demostración *por contraejemplo*. Muchos enunciados tienen la forma $(\forall x)P(x)$. Si queremos demostrar que un tal enunciado es falso, debemos demostrar su negación, es decir $(\exists x)\neg P(x)$ y esto se hace hallando un c tal que $\neg P(c)$ sea cierto.

Finalmente, en matemáticas hay demostraciones de existencia no constructivas. Esto puede sonar raro, pero es un tipo de razonamiento que también se da en la vida diaria: En un grupo de 400 personas debe haber dos que tengan el mismo cumpleaños, aunque para hallar un tal par es preciso un examen mas detallado del grupo.

Con frecuencia un teorema tiene la forma de una implicación o una equivalencia. Citamos unas cuantas formas de expresarlo:

$A \Rightarrow B$: Se verifica A sólo si se verifica B; A es suficiente para B.

$A \Leftarrow B$: Se verifica A si se verifica B; A es cierto siempre que B sea cierto; A es necesario para B.

$A \Leftrightarrow B$: Se verifica A si y sólo si se verifica B; A es necesario y suficiente para B.

En la práctica aparece con frecuencia la frase "si y sólo si". Muchas veces se abrevia por *sii* (en inglés *iff*).

También es útil tener un signo para indicar el final de una demostración. Tradicionalmente se utilizaban las abreviaturas *QED* ("quod erat demostrandum") o *CQD* ("como queríamos demostrar"). Pero en la literatura matemática mas moderna se usa $\blacksquare$ o $\square$.

2. Conjuntos, Aplicaciones, Relaciones

2.1. Conjuntos

Un **conjunto** será una colección de objetos; a cada uno de estos objetos lo llamaremos **elemento** del conjunto. Si x es un elemento del conjunto X escribimos $x \in X$ y si no es un elemento del conjunto X, entonces $x \notin X$. Llamaremos **conjunto vacío**, y lo escribiremos $\emptyset$, al conjunto que no tiene elementos.

Dos conjunto X e Y son **iguales** si tienen los mismos elementos, esto es, $x \in X \Leftrightarrow x \in Y$. Dados dos conjunto X e Y, decimos que X es un **subconjunto** de Y si se verifica: para cada $x \in X$ se tiene $x \in Y$, y lo escribimos $X \subseteq Y$. Un subconjunto X de Y se llama **propio** si es un subconjunto y no es igual a Y (a veces se escribe $X \subsetneq Y$).

Lema 2.1. *La igualdad de conjuntos verifica las siguientes propiedades:*

1. *Para cada conjunto X se tiene $X = X$. (Propiedad reflexiva).*
2. *Si $X = Y$ entonces $Y = X$. (Propiedad simétrica).*
3. *Si $X = Y$ e $Y = Z$, entonces $X = Z$. (Propiedad transitiva).*

Lema 2.2. *La inclusión de conjuntos verifica las siguientes propiedades:*

1. *Para cada conjunto X se tiene $X \subseteq X$. (Propiedad reflexiva).*
2. *Si $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, entonces $X = Y$. (Propiedad antisimétrica).*
3. *Si $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$, entonces $X \subseteq Z$. (Propiedad transitiva).*

Si X es un conjunto y p es una propiedad que pueden o no pueden verificar los elemento de X, podemos definir un subconjunto Y de X de la siguiente forma: $Y = \{x \in X/p(X)\}$ (esto es, Y es el conjunto de los elementos de X que verifican la propiedad p). Otra forma de definir un conjunto es enumerando todos sus elementos, así el conjunto formado por los elementos a, b, c, d y e lo representaremos por $\{a, b, c, d, e\}$.

A partir de un conjunto X podemos formar un nuevo conjunto $\mathcal{P}(X)$, que es el formado por todos los subconjuntos de X. $\mathcal{P}(X)$lo llamaremos el **conjunto potencia** de X o el **conjunto de las partes** de X.

Lema 2.3. *Para cada conjunto X se tiene $\emptyset \subseteq X$.*

Dados $A, B \in \mathcal{P}(X)$, definimos

La **unión** de A y B como

$$A \cup B = \{x \in X / x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

La **intersección** de A y B como

$$A \cap B = \{x \in X / x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

El **complementario** de A en X como

$$\overline{A} = C_X(A) = \{x \in X / x \notin A\}.$$

Dos subconjuntos A y B de X se llaman **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$. Evidentemente A y $\overline{A}$ son subconjuntos disjuntos.

El teorema siguiente resume las propiedades principales de la unión, intersección y el complementario:

Teorema 2.4. *Para $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, se verifica:*

1. <u>*Propiedad Conmutativa:*</u>

$$A \cup B = B \cup A \,; \quad A \cap B = B \cap A.$$

2. <u>*Propiedad Asociativa:*</u>

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \,; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

3. <u>*Propiedad de Idempotencia:*</u>

$$A \cup A = A \,; \quad A \cap A = A.$$

4. <u>*Propiedad de Absorción:*</u>

$$A \cup (A \cap B) = A \,; \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

5. *Propiedad Distributiva:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\ ; \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

6. *Leyes de Morgan:*

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}\ ; \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

7. $$A \cup X = X\ ;\ A \cup \emptyset = A\ ;\ A \cap X = A\ ;\ A \cap \emptyset = \emptyset.$$

8. $$\overline{\overline{A}} = A\ ; \quad \overline{X} = \emptyset\ ; \quad \overline{\emptyset} = X.$$

9. $$A \cup \overline{A} = X\ ; \quad A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

2.2. Producto Cartesiano

Dados dos conjuntos X e Y, se define el **producto cartesiano** de X e Y como el conjunto siguiente:

$$X \times Y = \{(x, y)/x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

Análogamente podemos definir el producto cartesiano de un número finito de conjunto $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Proposición 2.5. *Dados dos conjunto X e Y y subconjuntos A y B de X y C y D de Y, se verifica:*

1. $A \times Y \subseteq X \times Y$.

2. $(A \cup B) \times Y = (A \times Y) \cup (B \times Y)$.

3. $(A \cap B) \times Y = (A \times Y) \cap (B \times Y)$.

4. $\overline{A} \times Y = \overline{(A \times Y)}$.

5. $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

2.3. Aplicaciones

Dados dos conjuntos X e Y, una *relación* de X en Y es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$.

Una **aplicación** de X en Y, representada por $f : X \to Y$ (o también en la forma $X \xrightarrow{f} Y$) es una relación $f \subseteq X \times Y$ que verifica que $\forall x \in X \; \exists! y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.

De manera mas informal, se tiene entonces que una aplicación de X en Y es una <u>regla</u> que asocia a <u>cada</u> elemento x de X un <u>único</u> elemento de Y, al que llamamos $f(x)$. En una aplicación distinguimos los siguientes elementos y conceptos:

Dominio de f: es el conjunto X.

Codominio de f: es el conjunto Y.

Imagen del elemento $x \in X$: es el elemento $f(x) \in X$

Si $f : X \to Y$ es una aplicación y A es un subconjunto de X, llamamos **imagen ó imagen directa** de A por f al siguiente subconjunto de Y:

$$f_*(A) = \{f(a)/a \in A\} \subseteq Y.$$

En particular si $A = X$, el conjunto $f_*(X)$ se denota $Img(f) = \{f(x)/x \in X\} \subseteq Y$ y lo llamamos **imagen de la aplicación** f.

Si B es un subconjunto de Y, llamamos **preimagen ó imagen inversa** de B por f al subconjunto de X

$$f^*(B) = \{x \in X/f(x) \in B\}.$$

Los dos lemas siguientes nos dicen el comportamiento de las funciones f_* y f^* respecto a la unión y la intersección de subconjuntos.

Lema 2.6. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación y sean A, B subconjuntos de X. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$.
2. $f_*(A \cap B) \subseteq f_*(A) \cap f_*(B)$.
3. $A \subseteq f^*(f_*(A))$.

Lema 2.7. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación y sean C, D subconjuntos de Y. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $f^*(C \cup D) = f^*(C) \cup f^*(D)$.
2. $f^*(C \cap D) = f^*(C) \cap f^*(D)$.
3. $f_*(f^*(C)) \subseteq C$.

Dos aplicaciones $f, g : X \to Y$ son **iguales** si para cada $x \in X$ se verifica $f(x) = g(x)$. Es importante destacar que para que dos aplicaciones sean iguales han de tener el mismo dominio y el mismo codominio.

Destacamos a continuación algunos ejemplos de aplicaciones que nos aparecerán con frecuencia a lo largo del curso:

Ejemplo 2.8.

1. Para cualquier conjunto X, la aplicación **identidad** es definida como sigue:

$$1_X : X \to X\,; \quad 1_X(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

2. Sea A un subconjunto de un conjunto X, la aplicación **inclusión** de A en X se define por:

$$i_A : A \hookrightarrow X\,; \quad i_A(a) = a, \quad \forall a \in A.$$

3. Sea $f : X \to Y$ una aplicación y sea $A \subseteq X$ un subconjunto de X. Se puede entonces definir entonces una nueva aplicación de A en Y por

$$f|_A : A \to Y\,; \quad f|_A(a) = f(a), \quad \forall a \in A,$$

que llamaremos la **restricción** de f a A.

4. Sean X, Y y consideremos el producto cartesiano $X \times Y = \{(x, y)/x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Se tiene entonces las dos siguientes aplicaciones, llamadas las **proyecciones canónicas**:

$$p_X : X \times Y \to X\,; \quad p_X(x, y) = x, \quad \forall (x, y) \in X \times Y,$$

$$p_Y : X \times Y \to Y\,; \quad p_Y(x, y) = y, \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

A lo largo del curso nos aparecerán numerosos ejemplos de aplicaciones.

Dada una aplicación $f : X \to Y$, diremos que

- f es **inyectiva** si siempre que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$, es decir, si dos elementos tienen la misma imagen, entonces necesariamente son el mismo elemento.
- f es **sobreyectiva** si $Img(f) = Y$, o equivalentemente, si para cada $y \in Y$ existe, al menos un $x \in X$ con $f(x) = y$.
- f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Supongamos dadas dos aplicaciones

$$f : X \to Y \text{ y } \quad g : Y \to Z,$$

donde el codominio de f coincide con el dominio de g. Podemos definir entonces una nueva aplicación, llamada la **composición** de f y g, como sigue:

$$g \circ f : X \to Z\,; \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in X.$$

Usualmente y por comodidad, omitiremos el símbolo de composición, escribiendo gf en lugar de $g \circ f$.

La composición de aplicaciones verifica las siguientes propiedades:

Proposición 2.9. *1. La composición de aplicaciones es asociativa. Esto es dadas aplicaciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to W$ se verifica que $h(gf) = (hg)f$.*

2. Para cada aplicación $f : X \to Y$ se tiene $1_Y f = f = f 1_X$.

3. Dadas aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, si f y g son ambas inyectivas (respectivamente, sobreyectivas, biyectivas), entonces gf es inyectiva (respectivamente, sobreyectiva, biyectiva).

2.4. Relaciones de Equivalencia

Sea X un conjunto. Una **relación binaria** R sobre el conjunto X es un subconjunto del producto cartesiano $X \times X$.

Una relación binaria $R \subseteq X \times X$ sobre un conjunto X se llama una **relación de equivalencia** si se verifican las tres siguientes propiedades:

- **Propiedad reflexiva**: Para todo $x \in X$ se tiene que $(x, x) \in R$.
- **Propiedad Simétrica**: Si $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \in R$.

- **Propiedad Transitiva**: Si $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$ entonces $(x,z) \in R$.

Sea $R \subseteq X \times X$ es una relación de equivalencia sobre X, si el par $(x,y) \in R$, decimos que x es **equivalente** a y, por la relación R y escribimos $x \sim y$ ó xRy. Esto es

$$x \sim y \text{ (ó } xRy) \iff (x,y) \in R.$$

Con esta notación las propiedades anteriores se escriben:

- $x \sim x, \forall x \in X$.
- Si $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$.
- Si $x \sim y$ e $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$.

A lo largo del curso nos aparecerán numerosos ejemplos de relaciones de equivalencia. Destacamos ahora le siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.10. Sea $f : X \to X'$ una aplicación. Entonces f define la siguiente relación de equivalencia sobre el conjunto X

$$R_f = \{(x,y) \in X \times X / f(x) = f(y)$$

o bien, utilizando la notación anterior, R_f es dada por:

$$x\, R_f\, y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

R_f es llamada la relación de equivalencia asociada a la aplicación f.

Sea $R(\sim)$ una relación de equivalencia sobre un conjunto X. Para cada elemento $x \in X$ definimos la **clase de equivalencia** de x (denotada $\bar{x}$) como el subconjunto de X formado por aquellos elementos que son equivalentes a x, esto es:

$$\bar{x} = \{y \in X / y \sim x\}.$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia de equivalencia de los elementos de X es denotado X/R y llamado el **conjunto cociente** de X por la relación de equivalencia R.

Destacamos las siguientes propiedades importantes:

- Ya que R es reflexiva, entonces $x \in \bar{x}$ para cada $x \in X$; por tanto

  $$\bar{x} \neq \emptyset \text{ para todo } x \in X.$$

  Y además

  $$\bigcup_{x \in X} \bar{x} = X = \bigcup_{\bar{x} \in X/R} \bar{x}.$$

- Observamos también que, para $x, y \in X$, se tiene

$$\bar{x} = \bar{y} \Longleftrightarrow x \sim y. \tag{2.1}$$

  En efecto, si $\bar{x} = \bar{y}$ entonces $x \in \bar{x} \Longrightarrow x \in \bar{y}$ y por tanto, $x \sim y$. Recíprocamente, supongamos que $x \sim y$ y sea $z \in \bar{x}$, entonces $z \sim x$; puesto que $x \sim y$, por la propiedad transitiva deducimos que $z \sim y$, y por tanto $z \in \bar{y}$. Así $\bar{x} \subseteq \bar{y}$; un argumento simétrico muestra que $\bar{y} \subseteq \bar{x}$ y por tanto $\bar{x} = \bar{y}$.

- Por último, se tiene que

$$\text{dados } x, y \in X \text{ entonces } \begin{cases} \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset \\ \quad \text{ó} \\ \bar{x} = \bar{y} \end{cases}$$

  En efecto, si $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$, entonces existe un elemento $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Entonces $z \sim x$ y $z \sim y$. Usando la propiedad simétrica, la propiedad transitiva se tiene que $x \sim y$, y entonces por (2.1) $\bar{x} = \bar{y}$.

Las tres propiedades anteriores se enuncian diciendo que el conjunto cociente X/R constituye una **partición** del conjunto X.

Finalmente, si $R(\sim)$ es una relación de equivalencia sobre X definimos la aplicación **proyección** de X sobre el conjunto cociente de X por R como

$$p_R : X \longrightarrow X/R\,; \quad p_R(x) = \bar{x} \quad \forall x \in X.$$

Evidentemente, esta aplicación es sobreyectiva.