Conjuntos, Aplicaciones y Relaciones

Curso 2017-2018

1. Conjuntos

Un **conjunto** será una colección de objetos; a cada uno de estos objetos lo llamaremos **elemento** del conjunto. Si x es un elemento del conjunto X escribimos $x \in X$ y si no es un elemento del conjunto X, entonces $x \notin X$. Llamaremos **conjunto vacío**, y lo escribiremos $\emptyset$, al conjunto que no tiene elementos.

Dos conjunto X e Y son **iguales** si tienen los mismos elementos, esto es, $x \in X \Leftrightarrow x \in Y$. Dados dos conjunto X e Y, decimos que X es un **subconjunto** de Y si se verifica: para cada $x \in X$ se tiene $x \in Y$, y lo escribimos $X \subseteq Y$. Un subconjunto X de Y se llama **propio** si es un subconjunto y no es igual a Y (a veces se escribe $X \subsetneq Y$).

Lema 1.1. *La igualdad de conjuntos verifica las siguientes propiedades:*

1. *Para cada conjunto X se tiene $X = X$. (Propiedad reflexiva).*
2. *Si $X = Y$ entonces $Y = X$. (Propiedad simétrica).*
3. *Si $X = Y$ e $Y = Z$, entonces $X = Z$. (Propiedad transitiva).*

Lema 1.2. *La inclusión de conjuntos verifica las siguientes propiedades:*

1. *Para cada conjunto X se tiene $X \subseteq X$. (Propiedad reflexiva).*
2. *Si $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, entonces $X = Y$. (Propiedad antisimétrica).*
3. *Si $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$, entonces $X \subseteq Z$. (Propiedad transitiva).*

Si X es un conjunto y p es una propiedad que pueden o no pueden verificar los elemento de X, podemos definir un subconjunto Y de X de la siguiente forma: $Y = \{x \in X / p(X)\}$ (esto es, Y es el conjunto de los elementos de X que verifican la propiedad p). Otra forma de definir un conjunto es enumerando todos sus elementos, así el conjunto formado por los elementos a, b, c, d y e lo representaremos por $\{a, b, c, d, e\}$.

A partir de un conjunto X podemos formar un nuevo conjunto $\mathcal{P}(X)$, que es el formado por todos los subconjuntos de X. $\mathcal{P}(X)$lo llamaremos el **conjunto potencia** de X o el **conjunto de las partes** de X.

Lema 1.3. *Para cada conjunto X se tiene $\emptyset \subseteq X$.*

Notemos que si X tiene n elementos entonces $\mathcal{P}(X)$ tiene 2^n elementos (obsérvese que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$)

Dados $A, B \in \mathcal{P}(X)$, definimos

La **unión** de A y B como

$$A \cup B = \{x \in X / x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

La **intersección** de A y B como

$$A \cap B = \{x \in X / x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

El **complementario** de A en X como

$$\overline{A} = C_X(A) = \{x \in X / x \notin A\}.$$

Dos subconjuntos A y B de X se llaman **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$. Evidentemente A y $\overline{A}$ son subconjuntos disjuntos.

El teorema siguiente resume las propiedades principales de la unión, intersección y el complementario:

Teorema 1.4. *Para $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, se verifica:*

1. *Propiedad Conmutativa:*

$$A \cup B = B \cup A \,; \quad A \cap B = B \cap A.$$

2. *Propiedad Asociativa:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \,; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

3. *Propiedad de Idempotencia:*

$$A \cup A = A \,; \quad A \cap A = A.$$

4. *Propiedad de Absorción:*

$$A \cup (A \cap B) = A\ ; \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

5. *Propiedad Distributiva:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\ ; \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

6. *Leyes de Morgan:*

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}\ ; \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

7.
$$A \cup X = X\ ;\ A \cup \emptyset = A\ ;\ A \cap X = A\ ;\ A \cap \emptyset = \emptyset.$$

8.
$$\overline{\overline{A}} = A\ ; \quad \overline{X} = \emptyset\ ; \quad \overline{\emptyset} = X.$$

9.
$$A \cup \overline{A} = X\ ; \quad A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Dados dos conjuntos X e Y, se define el **producto cartesiano** de X e Y como el conjunto siguiente:

$$X \times Y = \{(x, y)/x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

Análogamente podemos definir el producto cartesiano de un número finito de conjunto $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Proposición 1.5. *Dados dos conjunto X e Y y subconjuntos A y B de X y C y D de Y, se verifica:*

1. $A \times Y \subseteq X \times Y$.

2. $(A \cup B) \times Y = (A \times Y) \cup (B \times Y)$.

3. $(A \cap B) \times Y = (A \times Y) \cap (B \times Y)$.

4. $\overline{A} \times Y = \overline{(A \times Y)}$.

5. $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

2. Aplicaciones

Dados dos conjuntos X e Y, una relación de X en Y es un subconjunto de $X \times Y$.

Una **aplicación** $f : X \to Y$ (representada en la forma $X \xrightarrow{f} Y$) es una relación $f \subseteq X \times Y$ que verifica que $\forall x \in X$ existe un único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.

De manera mas informal, una **aplicación** $f : X \to Y$ es por tanto una regla que asocia a cada elemento x de X un único elemento de Y, al que llamamos $f(x)$. En una aplicación distinguimos los siguientes elementos y conceptos:

Dominio de f: es el conjunto X.

Codominio de f: es el conjunto Y.

Imagen del elemento $x \in X$: es el elemento $f(x) \in X$

Dos **aplicaciones** $f, g : X \to Y$ son iguales si lo son como subconjuntos de $X \times Y$ y, por tanto, si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Si $f : X \to Y$ es una aplicación y A es un subconjunto de X, llamamos **imagen ó imagen directa** de A por f al siguiente subconjunto de Y:

$$f_*(A) = \{f(a)/a \in A\} \subseteq Y.$$

En particular si $A = X$, el conjunto $f_*(X)$ se denota $Img(f) = \{f(x)/x \in X\} \subseteq Y$ y lo llamamos **imagen de la aplicación** f.

Se tiene así definida una aplicación (imagen directa) $f_* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$.

Si B es un subconjunto de Y, llamamos **preimagen ó imagen inversa** de B por f al subconjunto de X

$$f^*(B) = \{x \in X/f(x) \in B\}.$$

Se tiene así definida una aplicación (imagen inversa) $f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$.

Los dos lemas siguientes nos dicen el comportamiento de las aplicaciones f_* y f^* respecto a la unión y la intersección de subconjuntos.

Lema 2.1. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación y sean A, B subconjuntos de X. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$.

2. $f_*(A \cap B) \subseteq f_*(A) \cap f_*(B)$.

3. $A \subseteq f^*(f_*(A))$.

Lema 2.2. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación y sean C, D subconjuntos de Y. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $f^*(C \cup D) = f^*(C) \cup f^*(D)$.
2. $f^*(C \cap D) = f^*(C) \cap f^*(D)$.
3. $f_*(f^*(C)) \subseteq C$.

Dos aplicaciones $f, g : X \to Y$ son **iguales** si para cada $x \in X$ se verifica $f(x) = g(x)$. Es importante destacar que para que dos aplicaciones sean iguales han de tener el mismo dominio y el mismo codominio.

Destacamos a continuación algunos ejemplos de aplicaciones que nos aparecerán con frecuencia a lo largo del curso:

Ejemplo 2.3. 1. Para cualquier conjunto X, la aplicación **identidad** es definida como sigue:

$$1_X : X \to X \, ; \quad 1_X(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

2. Sea A un subconjunto de un conjunto X, la aplicación **inclusión** de A en X se define por:

$$i_A : A \hookrightarrow X \, ; \quad i_A(a) = a, \quad \forall a \in A.$$

3. Sea $f : X \to Y$ una aplicación y sea $A \subseteq X$ un subconjunto de X. Se puede entonces definir entonces una nueva aplicación de A en Y por

$$f|_A : A \to Y \, ; \quad f|_A(a) = f(a), \quad \forall a \in A,$$

que llamaremos la **restricción** de f a A.

4. Sean X, Y y consideremos el producto cartesiano $X \times Y = \{(x, y)/x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Se tiene entonces las dos siguientes aplicaciones, llamadas las **proyecciones canónicas**:

$$p_X : X \times Y \to X \, ; \quad p_X(x, y) = x, \quad \forall (x, y) \in X \times Y,$$

$$p_Y : X \times Y \to Y \, ; \quad p_Y(x, y) = y, \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

A lo largo del curso nos aparecerán numerosos ejemplos de aplicaciones.

Dada una aplicación $f : X \to Y$, diremos que

- f es **inyectiva** si siempre que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$, es decir, si dos elementos tienen la misma imagen, entonces necesariamente son el mismo elemento.
- f es **sobreyectiva** si $Img(f) = Y$, o equivalentemente, si para cada $y \in Y$ existe, al menos un $x \in X$ con $f(x) = y$.
- f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Supongamos dadas dos aplicaciones

$$f : X \to Y \text{ y } \quad g : Y \to Z,$$

donde el codominio de f coincide con el dominio de g. Podemos definir entonces una nueva aplicación, llamada la **composición** de f y g, como sigue:

$$g \circ f : X \to Z\,; \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in X.$$

Usualmente y por comodidad, omitiremos el símbolo de composición, escribiendo gf en lugar de $g \circ f$.

La composición de aplicaciones verifica las siguientes propiedades:

Proposición 2.4. 1. *La composición de aplicaciones es asociativa. Esto es dadas aplicaciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to W$ se verifica que $h(gf) = (hg)f$.*

2. *Para cada aplicación $f : X \to Y$ se tiene $1_Y f = f = f 1_X$.*

3. *Dadas aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, si f y g son ambas inyectivas (respectivamente, sobreyectivas, biyectivas), entonces gf es inyectiva (respectivamente, sobreyectiva, biyectiva).*

2.1. Relaciones de Equivalencia

Sea X un conjunto. Una **relación binaria** R sobre el conjunto X es un subconjunto del producto cartesiano $X \times X$.

Una relación binaria $R \subseteq X \times X$ sobre un conjunto X se llama una **relación de equivalencia** si se verifican las tres siguientes propiedades:

- **Propiedad reflexiva**: Para todo $x \in X$ se tiene que $(x, x) \in R$.
- **Propiedad Simétrica**: Si $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \in R$.
- **Propiedad Transitiva**: Si $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ entonces $(x, z) \in R$.

Sea $R \subseteq X \times X$ es una relación de equivalencia sobre X, si el par $(x, y) \in R$, decimos que x es **equivalente** a y, por la relación R y escribimos $x \sim y$ ó xRy. Esto es

$$x \sim y \text{ (ó } xRy) \iff (x, y) \in R.$$

Con esta notación las propiedades anteriores se escriben:

- $x \sim x, \forall x \in X$.
- Si $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$.
- Si $x \sim y$ e $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$.

A lo largo del curso nos aparecerán numerosos ejemplos de relaciones de equivalencia. Destacamos ahora le siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.5. Sea $f : X \to X'$ una aplicación. Entonces f define la siguiente relación de equivalencia sobre el conjunto X

$$R_f = \{(x, y) \in X \times X / f(x) = f(y)$$

o bien, utilizando la notación anterior, R_f es dada por:

$$x\, R_f\, y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

R_f es llamada la relación de equivalencia asociada a la aplicación f.

Sea $R(\sim)$ una relación de equivalencia sobre un conjunto X. Para cada elemento $x \in X$ definimos la **clase de equivalencia** de x (denotada $\bar{x}$) como el subconjunto de X formado por aquellos elementos que son equivalentes a x, esto es:

$$\bar{x} = \{y \in X / y \sim x\}.$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia de equivalencia de los elementos de X es denotado X/R y llamado el **conjunto cociente** de X por la relación de equivalencia R.

Destacamos las siguientes propiedades importantes:

- Ya que R es reflexiva, entonces $x \in \bar{x}$ para cada $x \in X$; por tanto

  $$\bar{x} \neq \emptyset \text{ para todo } x \in X.$$

  Y además

  $$\bigcup_{x \in X} \bar{x} = X = \bigcup_{\bar{x} \in X/R} \bar{x}.$$

- Observamos también que, para $x, y \in X$, se tiene

$$\bar{x} = \bar{y} \Longleftrightarrow x \sim y. \tag{2.1}$$

En efecto, si $\bar{x} = \bar{y}$ entonces $x \in \bar{x} \Longrightarrow x \in \bar{y}$ y por tanto, $x \sim y$. Recíprocamente, supongamos que $x \sim y$ y sea $z \in \bar{x}$, entonces $z \sim x$; puesto que $x \sim y$, por la propiedad transitiva deducimos que $z \sim y$, y por tanto $z \in \bar{y}$. Así $\bar{x} \subseteq \bar{y}$; un argumento simétrico muestra que $\bar{y} \subseteq \bar{x}$ y por tanto $\bar{x} = \bar{y}$.

- Por último, se tiene que

$$\text{dados } x, y \in X \text{ entonces } \begin{cases} \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset \\ \quad \text{ó} \\ \bar{x} = \bar{y} \end{cases}$$

En efecto, si $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$, entonces existe un elemento $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. Entonces $z \sim x$ y $z \sim y$. Usando la propiedad simétrica, la propiedad transitiva se tiene que $x \sim y$, y entonces por (2.1) $\bar{x} = \bar{y}$.

Las tres propiedades anteriores se enuncian diciendo que el conjunto cociente X/R constituye una **partición** del conjunto X.

Finalmente, si $R(\sim)$ es una relación de equivalencia sobre X definimos la aplicación **proyección** de X sobre el conjunto cociente de X por R como

$$p_R : X \longrightarrow X/R\, ; \quad p_R(x) = \bar{x} \quad \forall x \in X.$$

Evidentemente, esta aplicación es sobreyectiva.