

Académie des sciences (France). Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1987/10/20.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici](#) pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

La suite fondamentale de Hochschild-Serre pour la cohomologie non abélienne des groupes I

Antonio M. CEGARRA, Pilar C. CARRASCO et Antonio R. GARZON

Résumé — Dans cette Note on montre que si $1 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$ est une suite exacte courte de groupes et si H est un groupe sur lequel G opère, il existe une suite exacte à cinq termes qui mesure l'obstruction de l'image de l'application $\text{Der}(G, H) \rightarrow \text{Der}(E, H)$. On remarque que dans le cas où H est abélien cette suite s'identifie à celle obtenue par Hochschild et Serre.

The fundamental exact sequence of Hochschild-Serre in non-abelian cohomology of groups I

Abstract — We prove that associated to a group extension $1 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$ and a G -group H , there exists a 5-term exact sequence in non-abelian cohomology which measures the obstruction to the image of the map $\text{Der}(G, H) \rightarrow \text{Der}(E, H)$. This sequence reduces to the one obtained by Hochschild and Serre in the case of H being an abelian group.

Dans la suite $\underline{S} : 1 \rightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$ désigne une suite exacte courte de groupes et H un groupe (non nécessairement abélien) sur lequel G opère à gauche via un homomorphisme $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(H)$. Nous noterons ${}^g h = \rho(g)(h)$ pour tous $g \in G$ et $h \in H$.

On définit $\text{Der}_\rho(G, H)$ comme l'ensemble des ρ -dérivations de G dans H , c'est-à-dire, les applications $d : G \rightarrow H$ satisfaisant $d(gg') = d(g) {}^g d(g')$ pour tous $g, g' \in G$; cet ensemble $\text{Der}_\rho(G, H)$ est pointé par la dérivation nulle $0 : G \rightarrow H$. Remarquons que, si $\rho = 0$, on a $\text{Der}_0(G, H) = \text{Hom}(G, H)$.

Considérant la suite exacte de groupes $H \xrightarrow{c} \text{Aut}(H) \xrightarrow{q} \text{Aut}(H)/\text{Int}(H) = \text{Out}(H) \rightarrow 1$, on définit $\text{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ comme l'ensemble des couples (f, t) où $f : N \rightarrow H$ et $t : E \rightarrow \text{Aut}(H)$ sont des homomorphismes de groupes tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif et que l'égalité $f(ene^{-1}) = t(e)(f(n))$ soit satisfaite pour tout $e \in E$ et tout $n \in N$:

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & G \\
 f \downarrow & & t \downarrow & & \downarrow q\rho \\
 H & \xrightarrow{c} & \text{Aut}(H) & \xrightarrow{q} & \text{Out}(H)
 \end{array}$$

Autrement dit, un élément (f, t) de $\text{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ est un morphisme de modules croisés [1], lequel est compatible avec l'augmentation $q\rho$. Cet ensemble $\text{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ est muni d'un sous-ensemble d'éléments privilégiés appelés *neutres* formé des couples $(0, t)$ pour n'importe quel homomorphisme $t : E \rightarrow \text{Aut}(H)$.

Dans le cas où H est abélien il est clair qu'un élément de $\text{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ s'identifie avec un homomorphisme $f : N \rightarrow H$ satisfaisant l'égalité $f(ene^{-1}) = {}^{p(e)} f(n)$ pour tout $e \in E$ et tout $n \in N$, et on a alors

$$\text{Hom}_\rho(\underline{S}, H) \cong \text{Hom}_E(N_{ab}, H) \cong \text{Hom}_G(N_{ab}, H)$$

où N_{ab} est le G -module $N/[N, N]$ avec l'action ${}^{p(e)}(n[N, N]) = ene^{-1}[N, N]$.

Note présentée par André LICHNEROWICZ.

Nous définissons un opérateur cobord $\delta^0 : \text{Der}_{\rho\rho}(E, H) \rightarrow \text{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ de la manière suivante : si $d \in \text{Der}_{\rho\rho}(E, H)$, soient $f_d = d/N : N \rightarrow H$ et $t_d : E \rightarrow \text{Aut}(H)$ le morphisme défini par $t_d(x)(h) = d(x)^{\rho(x)} h d(x)^{-1}$, pour tout $x \in E$ et tout $h \in H$. Nous posons alors $\delta^0(d) = (f_d, t_d)$.

Remarquons maintenant que le morphisme $q\rho : G \rightarrow \text{Out}(H)$ est une crête sur le module croisé $H \rightarrow \text{Aut}(H)$ [1]. Nous notons $H^2(G, H, \rho)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des extensions de G par le module croisé $H \rightarrow \text{Aut}(H)$ dont la crête est $q\rho$ c'est-à-dire des extensions de groupes $\mathcal{F} : 1 \rightarrow H \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\Pi} G \rightarrow 1$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\Pi} & G \\ \lambda \downarrow & & \downarrow q\rho \\ \text{Aut}(H) & \xrightarrow{q} & \text{Out}(H) \end{array}$$

soit commutatif, où λ est le morphisme donné par la conjugaison, i. e., $\lambda(x)(h) = xhx^{-1}$ pour tout $x \in F$ et tout $h \in H$. Autrement dit, le triplet $(G, H, q\rho)$ est un G -noyau abstrait au sens de Eilenberg-MacLane [2] ou un lien au sens de Giraud [3], et $H^2(G, H, \rho)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme des réalisations de ce G -noyau abstrait. L'extension \mathcal{F} et sa classe $|\mathcal{F}|$ sont dites *inessentielles* s'il existe un homomorphisme section $s : G \rightarrow F$ tel que $\Pi s = 1_G$. Lorsque l'extension \mathcal{F} est inessentielle il existe une extension \mathcal{F}_φ , équivalente à \mathcal{F} , dans laquelle F est le produit φ -croisé $H \times_\varphi G$ de H par G , où $\varphi = \lambda s$. La classe de l'extension inessentielle $\mathcal{F}_\rho : 1 \rightarrow H \rightarrow H \times_\rho G \rightarrow G \rightarrow 1$ est dite *nulle*.

Observons que le morphisme $p : E \rightarrow G$ induit une application $p_2^* : H^2(G, H, \rho) \rightarrow H^2(E, H, \rho p)$ donnée par pull-back :

$$p_2^*(|1 \rightarrow H \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\Pi} G \rightarrow 1|) = |1 \rightarrow H \xrightarrow{\alpha} F \times_G E \xrightarrow{\beta} E \rightarrow 1|$$

où $F \times_G E$ est le sous-groupe de $F \times E$ formé des couples (x, e) tels que $\Pi(x) = p(e)$ avec des applications α et β évidentes : $\alpha(h) = (j(h), 1)$, $\beta(x, e) = e$.

On va maintenant définir un autre opérateur cobord $\Delta^0 : \text{Hom}_\rho(\underline{S}, H) \rightarrow H^2(G, H, \rho)$. A cet effet supposons $\xi = (f, t) \in \text{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ et considérons F_ξ , quotient du groupe produit t -croisé $H \times_t E$ par le sous-groupe distingué formé des éléments $(f(n), n^{-1})$ pour tout $n \in N$; soit $\overline{(h, x)}$ l'image de $(h, x) \in H \times_t E$ dans le groupe quotient. On a alors une

extension $\mathcal{F}_\xi : 1 \rightarrow H \xrightarrow{j_\xi} F_\xi \xrightarrow{\Pi_\xi} G \rightarrow 1$ où $j_\xi(h) = \overline{(h, 1)}$ et $\Pi_\xi(\overline{(h, x)}) = p(x)$, et on voit aisément que c'est une extension de G par le module croisé $H \rightarrow \text{Aut}(H)$ dont la crête est $q\rho$. Nous définissons $\Delta^0(f, t) = |\mathcal{F}_\xi|$ et remarquons qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \underline{S}: & N & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & G \\ & f \downarrow & & g_\xi \downarrow & & \parallel \\ F_\xi: & H & \xrightarrow{j_\xi} & F_\xi & \xrightarrow{\Pi_\xi} & G \\ & \parallel & & \lambda \downarrow & & \downarrow q\rho \\ & H & \longrightarrow & \text{Aut}(H) & \longrightarrow & \text{Out}(H) \end{array}$$

où $g_\xi(x) = \overline{(1, x)}$.

LEMME. — Soit $\mathcal{F} : 1 \rightarrow H \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\Pi} G \rightarrow 1$ une extension de G par le module croisé $H \rightarrow \text{Aut}(H)$ dont la crête est $q\rho$ et telle qu'on ait le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{S} : & N & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & G \\
 & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow \parallel \\
 F : & H & \xrightarrow{j} & F & \xrightarrow{\Pi} & G \\
 & \parallel & & \downarrow \lambda & & \downarrow q\rho \\
 & H & \longrightarrow & \text{Aut}(H) & \longrightarrow & \text{Out}(H)
 \end{array}$$

Alors $\Delta^0(f, t) = |\mathcal{F}|$.

Démonstration. — L'application $\mu : H \times_t E \rightarrow F$ donnée par $\mu(h, x) = j(h)g(x)$ est un homomorphisme vérifiant $\mu(f(n), n^{-1}) = 1$ pour tout $n \in N$. Par conséquent cela définit un morphisme $\bar{\mu} : F_\xi \rightarrow F$ satisfaisant $\Pi \bar{\mu} = \Pi_\xi$ et $\bar{\mu}j_\xi = j$; donc $\bar{\mu}$ est un isomorphisme et $|\mathcal{F}_\xi| = |\mathcal{F}|$.

C.Q.F.D.

THÉORÈME. — La suite d'ensembles avec éléments privilégiés ci-dessous

$$1 \rightarrow \text{Der}_\rho(G, H) \xrightarrow{p^*} \text{Der}_{\rho\rho}(E, H) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_\rho(\underline{S}, H) \xrightarrow{\Delta^0} \mathbf{H}^2(G, H, \rho) \xrightarrow{p^*} \mathbf{H}^2(E, H, \rho, p)$$

est exacte dans le sens suivant : p^* est une application injective; un élément $d \in \text{Der}_{\rho\rho}(E, H)$ est dans l'image de l'application p^* si et seulement si $\delta^0(d)$ est neutre; un élément $(f, t) \in \text{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ est dans l'image de l'application δ^0 si et seulement si $\Delta^0(f, t)$ est la classe de l'extension nulle; un élément $|\mathcal{F}| \in \mathbf{H}^2(G, H, \rho)$ est dans l'image de l'application Δ^0 si et seulement si $p_2^*(|\mathcal{F}|)$ est la classe d'une extension inessentielle.

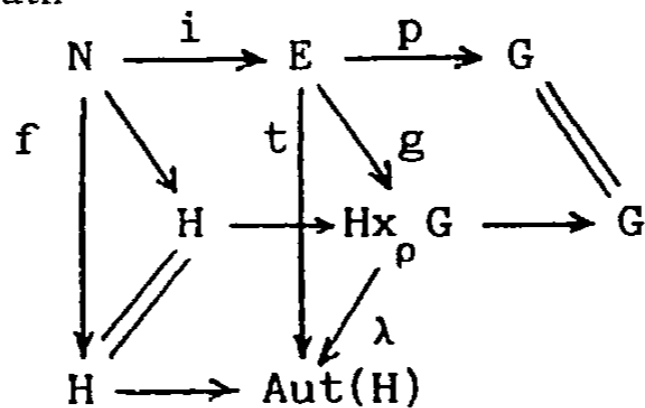
Démonstration. — La démonstration consiste en une série de vérifications :

1. Exactitude en $\text{Der}_\rho(G, H)$. Vérification triviale.
2. Exactitude en $\text{Der}_{\rho\rho}(E, H)$. Si $d \in \text{Der}_\rho(G, H)$ alors on a $(\delta^0 p^*)(d) = \delta^0(dp) = (0, t_{dp})$. Inversement, si $d \in \text{Der}_{\rho\rho}(E, H)$ est tel que $\delta^0(d)$ soit neutre on a $d/N = 0$ et par conséquent $d = d'p$ pour une dérivation $d' \in \text{Der}_\rho(G, H)$.
3. Exactitude en $\text{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$. Soit $d \in \text{Der}_{\rho\rho}(E, H)$; on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & G \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow g & & \downarrow \parallel \\
 H & \xrightarrow{\quad} & H \times G & \xrightarrow{\quad} & G \\
 \downarrow f_d & \parallel & \downarrow t_d & \searrow \rho & \downarrow \parallel \\
 H & \longrightarrow & \text{Aut}(H) & &
 \end{array}$$

où $g(x) = (d(x), p(x))$ pour tout $x \in E$, et alors, en vertu du lemme, $\Delta^0 \delta^0(d)$ est la classe de l'extension nulle.

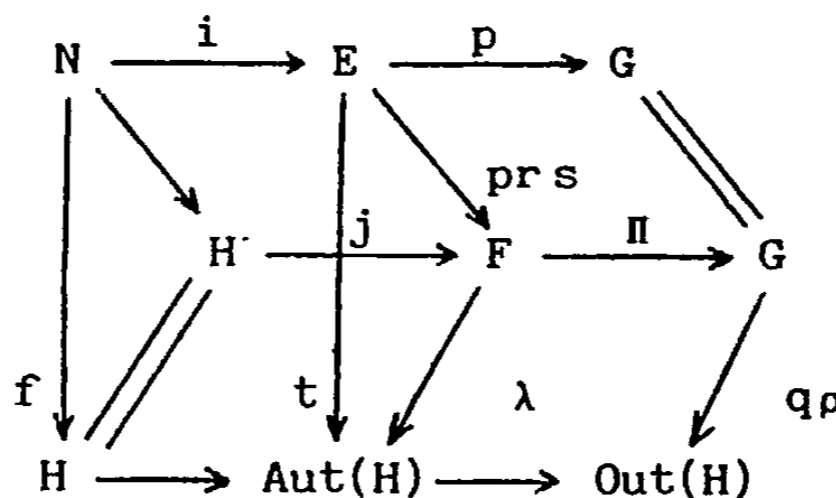
Réciproquement, si $(f, t) \in \text{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ et si $\Delta^0(f, t)$ est la classe de l'extension nulle, on a un diagramme commutatif



Alors l'application donnée par la composition $d = E \xrightarrow{g} H \times_\rho G \xrightarrow{pr} H$ est une ρp -dérivation satisfaisant $\delta^0(d) = (f, t)$, i. e., (f, t) est dans l'image de δ^0 .

4. Exactitude en $H^2(G, H, \rho)$. Soit $(f, t) \in \text{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$; alors $p_2^* \Delta^0(f, t)$ est la classe de l'extension de E avec crête $q\rho p$: $1 \rightarrow H \xrightarrow{\alpha} F_\xi \times_G E \xrightarrow{\beta} E \rightarrow 1$, et celle-ci est inessentielle puisqu'on a le morphisme section $s : E \rightarrow F_\xi \times_G E$ donné par $s(x) = (g_\xi(x), x)$ pour tout $x \in E$.

Inversement, soit $\mathcal{F} : 1 \rightarrow H \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\Pi} G \rightarrow 1$ une extension de G avec crête $q\rho$ telle que $p_2^*|\mathcal{F}| = |1 \rightarrow H \xrightarrow{\alpha} F \times_G E \xrightarrow{\beta} E \rightarrow 1|$ soit inessentielle. Soit donc $s : E \rightarrow F \times_G E$ un morphisme section de la projection β et considérons le couple (f, t) où $f : N \rightarrow H$ est le morphisme obtenu par restriction de la composée $E \xrightarrow{s} F \times_G E \xrightarrow{pr} F$ et $t : E \rightarrow \text{Aut}(H)$ est le morphisme défini par la composition $E \xrightarrow{s} F \times_G E \xrightarrow{pr} F \xrightarrow{\lambda} \text{Aut}(H)$. Il est facile de voir que $(f, t) \in \text{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ et, en plus, puisque le diagramme ci-dessous est commutatif,



on a $\Delta^0(f, t) = |\mathcal{F}|$ d'après le lemme.

Remarquons que dans le cas abélien, c'est-à-dire, si H est un groupe abélien, $H^2(G, H, \rho)$ est précisément l'ensemble des classes d'isomorphisme des extensions singulières de G par le G -module H , i. e., le groupe de cohomologie d'Eilenberg-MacLane $H^2(G, H)$. De plus, en utilisant que dans ce cas on a $\text{Hom}_\rho(\underline{S}, H) \cong \text{Hom}_G(N_{ab}, H)$, on démontre aisément que les opérateurs cobords δ^0 et Δ^0 coïncident avec les opérateurs cobords de la suite obtenue par Hochschild-Serre dans [4], i. e.

$$0 \rightarrow \text{Der}(G, H) \rightarrow \text{Der}(E, H) \rightarrow \text{Hom}_G(N_{ab}, H) \rightarrow H^2(G, H) \rightarrow H^2(E, H).$$

Note reçue le 16 février 1987, acceptée le 17 juillet 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P. DEDECKER, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 258, 1964, p. 4891-4894.
- [2] S. EILENBERG et S. MACLANE, *Ann. of Math.*, 48, 1947, p. 326-341.
- [3] J. GIRAUD, *Cohomologie non abélienne*, Grundlehren d. Math. Wiss., n° 179, Springer, 1971.
- [4] G. HOCHSCHILD et J.-P. SERRE, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74, 1953, p. 110-143.