C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 505-508, 1987

Algèbre homologique/*Homological Algebra*

La suite fondamentale de Hochschild-Serre pour la cohomologie non abélienne des groupes I

Antonio M. CEGARRA, Pilar C. CARRASCO et Antonio R. GARZON

Résumé — Dans cette Note on montre que si $1 \to N \to E \to G \to 1$ est une suite exacte courte de groupes et si H est un groupe sur lequel G opère, il existe une suite exacte à cinq termes qui mesure l'obstruction de l'image de l'application $\mathrm{Der}(G, H) \to \mathrm{Der}(E, H)$. On remarque que dans le cas où H est abélien cette suite s'identifie à celle obtenue par Hochschild et Serre.

The fundamental exact sequence of Hochschild-Serre in non-abelian cohomology of groups I

Abstract — *We prove that associated to a group extension* $1 \to N \to E \to G \to 1$ *and a* G-*group* H, *there exists a 5-term exact sequence in non-abelian cohomology which measures the obstruction to the image of the map* $\mathrm{Der}(G, H) \to \mathrm{Der}(E, H)$. *This sequence reduces to the one obtained by Hochschild and Serre in the case of* H *being an abelian group.*

Dans la suite $\underline{S} : 1 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$ désigne une suite exacte courte de groupes et H un groupe (non nécessairement abélien) sur lequel G opère à gauche via un homomorphisme $\rho : G \to \mathrm{Aut}(H)$. Nous noterons ${}^{g}h = \rho(g)(h)$ pour tous $g \in G$ et $h \in H$.

On définit $\mathrm{Der}_\rho(G, H)$ comme l'ensemble des ρ-*dérivations* de G dans H, c'est-à-dire, les applications $d : G \to H$ satisfaisant $d(gg') = d(g)^{g} d(g')$ pour tous $g, g' \in G$; cet ensemble $\mathrm{Der}_\rho(G, H)$ est pointé par la dérivation nulle $0 : G \to H$. Remarquons que, si $\rho = 0$, on a $\mathrm{Der}_0(G, H) = \mathrm{Hom}(G, H)$.

Considérant la suite exacte de groupes $H \xrightarrow{c} \mathrm{Aut}(H) \xrightarrow{q} \mathrm{Aut}(H)/\mathrm{Int}(H) = \mathrm{Out}(H) \to 1$, on définit $\mathrm{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ comme l'ensemble des couples (f, t) où $f : N \to H$ et $t : E \to \mathrm{Aut}(H)$ sont des homomorphismes de groupes tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif et que l'égalité $f(ene^{-1}) = t(e)(f(n))$ soit satisfaite pour tout $e \in E$ et tout $n \in N$:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "t"'] & G \arrow[d, "q\rho"] \\ H \arrow[r, "c"] & \mathrm{Aut}(H) \arrow[r, "q"] & \mathrm{Out}(H) \end{tikzcd}$$

Autrement dit, un élément (f, t) de $\mathrm{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ est un morphisme de modules croisés [1], lequel est compatible avec l'augmentation $q\rho$. Cet ensemble $\mathrm{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ est muni d'un sous-ensemble d'éléments privilégiés appelés *neutres* formé des couples $(0, t)$ pour n'importe quel homomorphisme $t : E \to \mathrm{Aut}(H)$.

Dans le cas où H est abélien il est clair qu'un élément de $\mathrm{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ s'identifie avec un homomorphisme $f : N \to H$ satisfaisant l'égalité $f(ene^{-1}) = {}^{p(e)} f(n)$ pour tout $e \in E$ et tout $n \in N$, et on a alors

$$\mathrm{Hom}_\rho(\underline{S}, H) \cong \mathrm{Hom}_E(N_{ab}, H) \cong \mathrm{Hom}_G(N_{ab}, H)$$

où N_{ab} est le G-module $N/[N, N]$ avec l'action ${}^{p(e)}(n[N, N]) = ene^{-1}[N, N]$.

Note présentée par André LICHNEROWICZ.

0249-6291/87/03050505 $ 2.00

Nous définissons un opérateur cobord $\delta^0 : \mathrm{Der}_{\rho p}(\mathrm{E}, \mathrm{H}) \to \mathrm{Hom}_\rho(\underline{\mathrm{S}}, \mathrm{H})$ de la manière suivante : si $d \in \mathrm{Der}_{\rho p}(\mathrm{E}, \mathrm{H})$, soient $f_d = d/\mathrm{N} : \mathrm{N} \to \mathrm{H}$ et $t_d : \mathrm{E} \to \overline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{H})$ le morphisme défini par $t_d(x)(h) = d(x)^{p(x)} h d(x)^{-1}$, pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout $h \in \mathrm{H}$. Nous posons alors $\delta^0(d) = (f_d, t_d)$.

Remarquons maintenant que le morphisme $q\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{Out}(\mathrm{H})$ est une *crête* sur le module croisé $\mathrm{H} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{H})$ [1]. Nous notons $\mathbf{H}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H}, \rho)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des extensions de G par le module croisé $\mathrm{H} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{H})$ dont la crête est $q\rho$ c'est-à-dire des extensions de groupes $\mathscr{F} : 1 \to \mathrm{H} \xrightarrow{j} \mathrm{F} \xrightarrow{\Pi} \mathrm{G} \to 1$ telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "q\rho"] \\
\mathrm{Aut}(\mathrm{H}) \arrow[r, "q"] & \mathrm{Out}(\mathrm{H})
\end{tikzcd}$$

soit commutatif, où λ est le morphisme donné par la conjugaison, i. e., $\lambda(x)(h) = xhx^{-1}$ pour tout $x \in \mathrm{F}$ et tout $h \in \mathrm{H}$. Autrement dit, le triplet $(\mathrm{G}, \mathrm{H}, q\rho)$ est un G-*noyau abstrait* au sens de Eilenberg-MacLane [2] ou un *lien* au sens de Giraud [3], et $\mathbf{H}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H}, \rho)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme des réalisations de ce G-noyau abstrait. L'extension $\mathscr{F}$ et sa classe $|\mathscr{F}|$ sont dites *inessentielles* s'il existe un homomorphisme section $s : \mathrm{G} \to \mathrm{F}$ tel que $\Pi s = 1_\mathrm{G}$. Lorsque l'extension $\mathscr{F}$ est inessentielle il existe une extension $\mathscr{F}_\varphi$, équivalente à $\mathscr{F}$, dans laquelle F est le produit φ-croisé $\mathrm{H} \times_\varphi \mathrm{G}$ de H par G, où $\varphi = \lambda s$. La classe de l'extension inessentielle $\mathscr{F}_\rho : 1 \to \mathrm{H} \to \mathrm{H} \times_\rho \mathrm{G} \to \mathrm{G} \to 1$ est dite *nulle*.

Observons que le morphisme $p : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ induit une application $p_2^* :$ $\mathbf{H}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H}, \rho) \to \mathbf{H}^2(\mathrm{E}, \mathrm{H}, \rho p)$ donnée par pull-back :

$$p_2^*(|1 \to \mathrm{H} \xrightarrow{j} \mathrm{F} \xrightarrow{\Pi} \mathrm{G} \to 1|) = |1 \to \mathrm{H} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{F} \times_\mathrm{G} \mathrm{E} \xrightarrow{\beta} \mathrm{E} \to 1|$$

où $\mathrm{F} \times_\mathrm{G} \mathrm{E}$ est le sous-groupe de $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$ formé des couples (x, e) tels que $\Pi(x) = p(e)$ avec des applications α et β évidentes : $\alpha(h) = (j(h), 1)$, $\beta(x, e) = e$.

On va maintenant définir un autre opérateur cobord $\Delta^0 : \mathrm{Hom}_\rho(\underline{\mathrm{S}}, \mathrm{H}) \to \mathbf{H}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H}, \rho)$. A cet effet supposons $\xi = (f, t) \in \mathrm{Hom}_\rho(\underline{\mathrm{S}}, \mathrm{H})$ et considérons F_ξ, quotient du groupe produit t-croisé $\mathrm{H} \times_t \mathrm{E}$ par le sous-groupe distingué formé des éléments $(f(n), n^{-1})$ pour tout $n \in \mathrm{N}$; soit $\overline{(h, x)}$ l'image de $(h, x) \in \mathrm{H} \times_t \mathrm{E}$ dans le groupe quotient. On a alors une extension $\mathscr{F}_\xi : 1 \to \mathrm{H} \xrightarrow{j_\xi} \mathrm{F}_\xi \xrightarrow{\Pi_\xi} \mathrm{G} \to 1$ où $j_\xi(h) = \overline{(h, 1)}$ et $\Pi_\xi(\overline{(h, x)}) = p(x)$, et on voit aisément que c'est une extension de G par le module croisé $\mathrm{H} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{H})$ dont la crête est $q\rho$. Nous définissons $\Delta^0(f, t) = |\mathscr{F}_\xi|$ et remarquons qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{S}}: & \mathrm{N} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{E} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g_\xi"'] \arrow[dd, bend left, "t"] & \mathrm{G} \arrow[d, equal] \\
\mathscr{F}_\xi: & \mathrm{H} \arrow[r, "j_\xi"] \arrow[d, equal] & \mathrm{F}_\xi \arrow[r, "\Pi_\xi"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "q\rho"] \\
& \mathrm{H} \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\mathrm{H}) \arrow[r] & \mathrm{Out}(\mathrm{H})
\end{tikzcd}$$

où $g_\xi(x) = \overline{(1, x)}$.

LEMME. — *Soit* $\mathscr{F} : 1 \to H \overset{j}{\to} F \overset{\Pi}{\to} G \to 1$ *une extension de* G *par le module croisé* $H \to \mathrm{Aut}(H)$ *dont la crête est* $q\rho$ *et telle qu'on ait le diagramme commutatif ci-dessous*

$$\begin{tikzcd}
\underline{S}: & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dd, bend left, "t"] & G \arrow[d, equal] \\
\mathscr{F}: & H \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\lambda"'] & G \arrow[d, "q\rho"] \\
& H \arrow[r] & \mathrm{Aut}(H) \arrow[r] & \mathrm{Out}(H)
\end{tikzcd}$$

Alors $\Delta^0(f, t) = |\mathscr{F}|$.

Démonstration. — L'application $\mu : H \times_t E \to F$ donnée par $\mu(h, x) = j(h)g(x)$ est un homomorphisme vérifiant $\mu(f(n), n^{-1}) = 1$ pour tout $n \in N$. Par conséquent cela définit un morphisme $\bar{\mu} : F_\xi \to F$ satisfaisant $\Pi\bar{\mu} = \Pi_\xi$ et $\bar{\mu}j_\xi = j$; donc $\bar{\mu}$ est un isomorphisme et $|\mathscr{F}_\xi| = |\mathscr{F}|$.

C.Q.F.D.

THÉORÈME. — *La suite d'ensembles avec éléments privilégiés ci-dessous*

$$1 \to \mathrm{Der}_\rho(G, H) \overset{p^*}{\to} \mathrm{Der}_{\rho p}(E, H) \overset{\delta^0}{\to} \mathrm{Hom}_\rho(\underline{S}, H) \overset{\Delta^0}{\to} H^2(G, H, \rho) \overset{p^*}{\to} H^2(E, H, \rho, p)$$

est exacte dans le sens suivant : p^* est une application injective; un élément $d \in \mathrm{Der}_{\rho p}(E, H)$ est dans l'image de l'application p^* si et seulement si $\delta^0(d)$ est neutre; un élément $(f, t) \in \mathrm{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ est dans l'image de l'application δ^0 si et seulement si $\Delta^0(f, t)$ est la classe de l'extension nulle; un élément $|\mathscr{F}| \in H^2(G, H, \rho)$ est dans l'image de l'application Δ^0 si et seulement si $p_2^*(|\mathscr{F}|)$ est la classe d'une extension inessentielle.

Démonstration. — La démonstration consiste en une série de vérifications :

1. Exactitude en $\mathrm{Der}_\rho(G, H)$. Vérification triviale.

2. Exactitude en $\mathrm{Der}_{\rho p}(E, H)$. Si $d \in \mathrm{Der}_\rho(G, H)$ alors on a $(\delta^0 p^*)(d) = \delta^0(dp) = (0, t_{dp})$. Inversement, si $d \in \mathrm{Der}_{\rho p}(E, H)$ est tel que $\delta^0(d)$ soit neutre on a $d/N = 0$ et par conséquent $d = d'p$ pour une dérivation $d' \in \mathrm{Der}_\rho(G, H)$.

3. Exactitude en $\mathrm{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$. Soit $d \in \mathrm{Der}_{\rho p}(E, H)$; on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, "i"] \arrow[dr] \arrow[dd, "f_d"'] & & E \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "t_d"'] & & G \arrow[dr, equal] & \\
& H \arrow[rr] \arrow[dl, equal] & & H \times_\rho G \arrow[rr] \arrow[dl, "\lambda"] & & G \\
H \arrow[rr] & & \mathrm{Aut}(H) & & &
\end{tikzcd}$$

où $g(x) = (d(x), p(x))$ pour tout $x \in E$, et alors, en vertu du lemme, $\Delta^0\delta^0(d)$ est la classe de l'extension nulle.

Réciproquement, si $(f, t) \in \mathrm{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ et si $\Delta^0(f, t)$ est la classe de l'extension nulle, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, "i"] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"'] & & E \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "t"] & & G \arrow[dr, equal] & \\
& H \arrow[rr] \arrow[dl, equal] & & H\times_\rho G \arrow[rr] \arrow[dl, "\lambda"] & & G \\
H \arrow[rr] & & \mathrm{Aut}(H) & & &
\end{tikzcd}$$

Alors l'application donnée par la composition $d = E \xrightarrow{g} H \times_\rho G \xrightarrow{pr} H$ est une ρp-dérivation satisfaisant $\delta^0(d) = (f, t)$, i. e., (f, t) est dans l'image de δ^0.

4. Exactitude en $\mathbf{H}^2(G, H, \rho)$. Soit $(f, t) \in \mathrm{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$; alors $p_2^* \Delta^0(f, t)$ est la classe de l'extension de E avec crête $q\rho p$: $1 \to H \xrightarrow{\alpha} F_\xi \times_G E \xrightarrow{\beta} E \to 1$, et celle-ci est inessentielle puisqu'on a le morphisme section $s : E \to F_\xi \times_G E$ donné par $s(x) = (g_\xi(x), x)$ pour tout $x \in E$.

Inversement, soit $\mathscr{F} : 1 \to H \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\Pi} G \to 1$ une extension de G avec crête $q\rho$ telle que $p_2^* |\mathscr{F}| = |1 \to H \xrightarrow{\alpha} F \times_G E \xrightarrow{\beta} E \to 1|$ soit inessentielle. Soit donc $s : E \to F \times_G E$ un morphisme section de la projection β et considérons le couple (f, t) où $f: N \to H$ est le morphisme obtenu par restriction de la composée $E \xrightarrow{s} F \times_G E \xrightarrow{pr} F$ et $t : E \to \mathrm{Aut}(H)$ est le morphisme défini par la composition $E \xrightarrow{s} F \times_G E \xrightarrow{pr} F \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Aut}(H)$. Il est facile de voir que $(f, t) \in \mathrm{Hom}_\rho(\underline{S}, H)$ et, en plus, puisque le diagramme ci-dessous est commutatif,

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, "i"] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"'] & & E \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "pr\, s"] \arrow[dd, "t"] & & G \arrow[dr, equal] & \\
& H' \arrow[rr, "j"] \arrow[dl, equal] & & F \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dl, "\lambda"] & & G \arrow[dl, "q\rho"] \\
H \arrow[rr] & & \mathrm{Aut}(H) \arrow[rr] & & \mathrm{Out}(H) &
\end{tikzcd}$$

on a $\Delta^0(f, t) = |\mathscr{F}|$ d'après le lemme.

Remarquons que dans le cas abélien, c'est-à-dire, si H est un groupe abélien, $\mathbf{H}^2(G, H, \rho)$ est précisément l'ensemble des classes d'isomorphisme des extensions singulières de G par le G-module H, i. e., le groupe de cohomologie d'Eilenberg-MacLane $\mathbf{H}^2(G, H)$. De plus, en utilisant que dans ce cas on a $\mathrm{Hom}_\rho(\underline{S}, H) \cong \mathrm{Hom}_G(N_{ab}, H)$, on démontre aisément que les opérateurs cobords δ^0 et Δ^0 coïncident avec les opérateurs cobords de la suite obtenue par Hochschild-Serre dans [4], i. e.

$$0 \to \mathrm{Der}(G, H) \to \mathrm{Der}(E, H) \to \mathrm{Hom}_G(N_{ab}, H) \to \mathbf{H}^2(G, H) \to \mathbf{H}^2(E, H).$$

Note reçue le 16 février 1987, acceptée le 17 juillet 1987.

Références bibliographiques

[1] P. Dedecker, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 258, 1964, p. 4891-4894.
[2] S. Eilenberg et S. MacLane, *Ann. of Math.*, 48, 1947, p. 326-341.
[3] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Grundlehren d. Math. Wiss., n° 179, Springer, 1971.
[4] G. Hochschild et J.-P. Serre, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74, 1953, p. 110-143.

Département d'Algèbre, Université de Grenade, Grenade, Espagne.