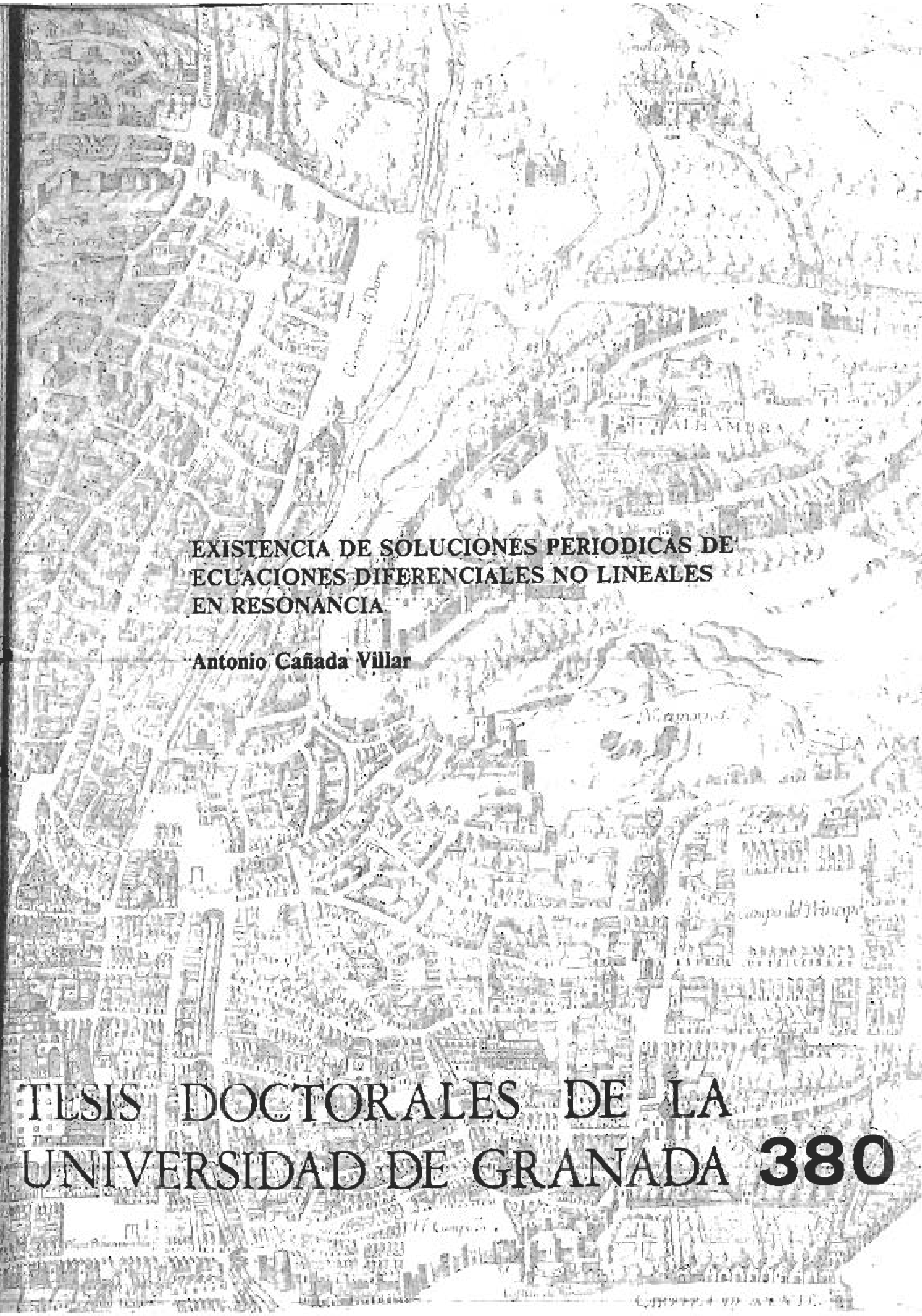
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES FUNCIONALES
FACULTAD DE CIENCIAS

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES - Antonio Cañada



EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES EN RESONANCIA

Antonio Cañada Villar

TESIS DOCTORALES DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA 380

FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento de Ecuaciones Funcionales

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES EN RESONANCIA

ANTONIO CAÑADA VILLAR
Tesis Doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA
1 9 8 2

Im.Un.Gr.151.1982. Depósito legal Gr.582.1982.
Printed in Spain.
Imprenta de la Universidad de Granada. Hospital Real

Tesis doctoral dirigida por el Prof. Dr. D. Pedro Martínez Amores, Adjunto de Análisis Matemático III, *de la Universidad de Granada. Fue leida el 21 de Abril de 1982, ante el tribunal formado por los profesores: Castro Brzeki, Gasca González, Rodríguez López, Guzmán Ozámiz y Martínez Amores. Obtuvo la calificación de Sobresaliente* cum laude.

A mi mujer e hijo
A mis padres

INTRODUCCION

Las ecuaciones diferenciales son un modelo matemático para el estudio de multitud de problemas que surgen de las disciplinas más diversas. Desde sus comienzos en el siglo XVII, la teoría de ecuaciones diferenciales ha contribuído decisivamente a solucionar muchas cuestiones y a interpretar numerosos fenómenos de la naturaleza.En la actualidad, la teoría de ecuaciones diferenciales sigue teniendo un ingente desarrollo, tanto en su aspecto cualitativo (existencia, unicidad y comportamiento de las soluciones), como en su aspecto cuantitativo (aproximación de soluciones).

El ejemplo más sencillo de ecuaciones diferenciales lo constituyen las ecuaciones diferenciales ordinarias. Una ecuación diferencial ordinaria es una relación funcional entre una función desconocida x, de una variable independiente t, y algunas de sus derivadas. Una clase bastante general de estas ecuaciones se escriben de la forma

$$x' = g(t,x) \tag{1}$$

donde $g : R \times R^n \to R^n$, y x' indica la derivada de x respecto de t (R es el conjunto de los números reales). Una solución de (1) es una función x definida en un intervalo real y con valores en R^n, tal que existe su derivada en todo punto del intervalo y verifica (1). Generalmente, las ecuaciones del tipo (1) constituyen un modelo matemático para aquellos sistemas en los que su evolución en el tiempo depende sólo del estado presente.

Una generalización de las ecuaciones diferenciales ordinarias son las ecuaciones diferenciales funcionales con retraso. Estas ecuaciones constituyen un modelo matemático para aquellos sistemas en los que su evolución en el tiempo depende no solamente del estado presente, sino también del estado pasado. En la mayoría de los casos, con este tipo de ecuaciones se logra un modelo más próximo a la realidad que con las ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, a veces, y debido a lo complicado del modelo, es preferible que el modelo obtenido sea una ecuación del tipo (1).

Un ejemplo muy simple de ecuación diferencial funcional con retraso es una ecuación de la forma

$$x'(t) = g(t,x(t),x(t-h)) \qquad (2)$$

siendo h un número real dado no negativo y $g : R\times R^n \times R^n \to R^n$. Observemos que si $h = 0$, tenemos una ecuación diferencial ordinaria. La primera diferencia fundamental que se advierte entre los dos tipos de ecuaciones considerados es el concepto de problema de valores iniciales para (1) y (2). Para (1), este problema, también llamado problema de Cauchy, consiste en hallar una solución x de (1) tal que se tenga $x(t_0) = x_0$. En cambio, para (2), es distinto. En efecto, supongamos que queremos estudiar la existencia de una solución x de (2) definida para $t \geq t_0 \in R$. Si $h > 0$ y $t \in [t_0, t_0 + h)$, entonces $t - h < t_0$, y por tanto x debe estar definida para todo $t \in [t_0 - h, t_0]$. Así, el problema de valores iniciales para (2) consiste en especificar x en el intervalo $[t_0 - h, t_0]$ por una función conocida ψ. Para simplificar la notación tomamos $t_0 = 0$.

Sea C el espacio normado de funciones continuas $\psi: [-h,0] \to R^n$, con la norma uniforme, es decir, $\|\psi\| = \sup_{\theta \in [-h,0]} |\psi(\theta)|$, donde $|\cdot|$ es una norma cualquiera en R^n. Si $A > 0$ y $x : [-h,A) \to R^n$ es continua, para cada $t \in [0,A)$ podemos definir una función $x_t \in C$ por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, para todo $\theta \in [-h,0]$. Sea $g : R\times C \to R^n$, $(t,\psi) \to g(t,\psi)$ una función continua. Una ecuación diferencial funcional con retraso es una relación de la forma

$$x'(t) = g(t,x_t) \qquad (3)$$

Si $h = 0$, x_t se identifica naturalmente con $x(t)$, C con R^n y (3) es por tanto una ecuación diferencial ordinaria.

Una solución de (3) es una función continua $x : [-h,A) \to R^n$, tal que tiene derivada para todo $t \in [0,A)$ y satisface (3). Si $x_0 = \psi$, diremos que x tiene valor inicial ψ.

Hasta hace pocos años, la mayoría de los resultados relacionados con la existencia, unicidad y propiedades de soluciones de ecuaciones diferenciales funcionales con retraso se habían obtenido considerando la variable dependiente como un elemento del espacio euclídeo ordinario R^n. Se desarrolló incluso una teoría de ecuaciones lineales con coeficientes constantes (ver [5]). Sin embargo, este tratamiento dificultó el descubrimiento de algunas propiedades interesantes de tales ecuaciones, tales como algunas propiedades de estabilidad. Fué Krasovskii en 1.959 ([44]) quien sugirió que el estudio natural de estas ecuaciones debe partir de considerar las soluciones como curvas en C y no en R^n. Esta observación dió lugar a un rápido desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales funcionales con retraso, debido principalmente a Hale y sus colaboradores (ver [37]).

Una generalización de las ecuaciones diferenciales funcionales con retraso son las ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro. En éstas, el retraso h puede aparecer también en la derivada de la función incógnita x. Si $D : R\times C \to R^n$, $(t,\psi) \to D(t,\psi)$ es lineal en ψ para cada $t \in R$ y uniformemente no atómico en cero (ver cap. IV), y $g : R\times C \to R^n$, $(t,\psi) \to g(t,\psi)$, una ecuación diferencial funcional de tipo neutro es una relación de la forma

$$\frac{d}{dt}(D(t,x_t)) = g(t,x_t) \qquad (4)$$

Una solución de (4) es una función $x : [-h,A) \to R^n$, continua, tal que $D(t,x_t)$ es derivable para todo $t \in [0,A)$ y su derivada satisface (4). Si $x_0 = \psi \in C$, se dice que x tiene valor inicial ψ. Observemos que cuando $D(t,\psi) = \psi(0)$, entonces $D(t,x_t) = x(t)$ y (4) es entonces una ecuación diferencial funcional con retraso del tipo (3). Una diferencia fundamental entre las ecuaciones del tipo (3) y (4) es que en (4) la solución x no tiene porqué ser derivable, lo cual hace su estudio más difícil (ver [37]).

Dentro de los anteriores tipos de ecuaciones diferenciales destacan las ecuaciones periódicas. Diremos que la ecuación (1) es T-periódica (T un número real mayor que cero), si $g(t + T,x) = g(t,x)$ para todo $(t,x) \in R \times R^n$. (Evidentemente la definición es la misma para las ecuaciones (3) y (4) sustituyendo x por x_t y teniendo en cuenta que en (4) D debe ser también T-periódica).

La importancia de este tipo de ecuaciones se da porque muy frecuentemente el estudio de problemas de diversa índole (físicos, biologicos, económicos, astronómicos, etc.) conduce a un modelo matemático dado por una ecuación diferencial periódica. Por esta misma razón se comprende la importancia que tiene el estudio de existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales periódicas.

Cuando las ecuaciones consideradas son lineales(es decir, g es lineal en x_t), el teorema de la alternativa de Fredholm es un método bastante útil para el estudio de la existencia de soluciones periódicas. Fundamentalmente, este teorema afirma la existencia de soluciones periódicas cuando el término independiente de la ecuación lineal considerada es, con un cierto producto escalar, ortogonal a las soluciones periódicas de la ecuación adjunta. (ver [34] para ecuaciones diferenciales ordinarias, [37] para ecuaciones diferenciales funcionales con retraso y [36] para ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro).

Sin embargo, la mayoría de los problemas que se presentan en el mundo real, y por lo tanto lamayoría de los modelos matemáticos que se construyen para estudiarlos, tienen un carácter no lineal. En este caso, el problema de existencia de soluciones periódicas es en general bastante difícil y está relacionado con otros numerosos problemas de la matemática (ver [7] , [29] , [54] , [58]). La dificultad está relacionada directamente con el tipo de soluciones periódicas que admite

la parte lineal homogénea de la ecuación (casos crítico o no crítico según que existan o no soluciones periódicas distintas de la trivial), el carácter del término no lineal g y el orden y dimensión de la ecuación. Aparte de todo esto, este tipo de problemas llevan implícita la dificultad de que son problemas de tipo global y no local (es decir, las soluciones periódicas deben existir en todo el intervalo $[0,T]$, en contraste con los problemas de valores iniciales, donde las soluciones deben existir en un entorno del tiempo inicial considerado).

El problema de existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales ha dado lugar, numerosas veces, al nacimiento de muchas partes de la matemática. Por ejemplo, este problema en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias fué lo que motivó a Poincaré a estudiar más profundamente la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, de la cual surgió la teoría moderna de sistemas dinámicos (ver [8]) e importantes ramas de la topología diferencial y algebraica. El estudio de los problemas de contorno (el problema periódico es un caso particular de ellos) motivó a Birkhoff, Leray, Schauder y otros matemáticos a extender la teoría de puntos fijos a espacios normados de dimensión infinita.

En la actualidad, un método muy útil y que ha demostrado ser muy potente (en el sentido de que a partir de pocos datos puede proporcionar bastante información) para el estudio de existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales periódicas no lineales, consiste en formular el problema de forma abstracta. Es decir, el problema de encontrar una solución periódica de la ecuación diferencial dada se transforma en el problema de encontrar una solución x de una cierta ecuación de operadores

$$Lx = Nx \tag{5}$$

siendo L una aplicación lineal y N una aplicación no lineal, definidas entre ciertos espacios normados X y Z que dependen de la naturaleza del problema. Generalmente L corresponde a la parte lineal de la ecuación considerada y N es el operador de Nemitski de la parte no lineal.

Si L^{-1} existe, es decir $\ker L$ (núcleo de L) es trivial (lo que corresponde al caso no crítico anteriormente citado), entonces (5) es equivalente a

$$x = L^{-1}Nx \qquad (6)$$

y estamos ante un problema de puntos fijos $x = Tx$, donde T es la composición de una aplicacion lineal y otra no lineal. En este caso, T se llama un operador de Hammerstein y los métodos desarrollados para su estudio son numerosos (ver [68]). Entre ellos destaca el teorema del punto fijo de Leray-Schauder para el caso en que $X = Z$ es un espacio normado y T es compacta (es decir, continua y aplicando conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos). En la actualidad, bién generalizando el espacio X o bién generalizando la clase de la aplicación T, la teoría de Leray-Schauder se ha extendido considerablemente, obteniéndose muchos teoremas del punto fijo que se aplican al estudio de (6). (ver, por ejemplo [11] , [12] , [65]).

Si L^{-1} no existe, es decir $\ker L$ no es trivial (lo cual corresponde al caso crítico), el problema (5) es más complicado y el estudio de este tipo de problemas fué iniciado por Poincaré, Lyapunov y Schmidt a principios de este siglo, siguiendo la línea del llamado método alternativa.

Básicamente, el método alternativa consiste en transformar el problema (5) en un problema alternativa que debe ser más fácil de estudiar. Para ello, bajo determinadas hipótesis sobre L (ver [20]), relacionadas con $\ker L$ y $\operatorname{coker} L = Z/\operatorname{Im} L$ ($\operatorname{Im} L$ es la imagen de L), se transforma el problema (5) en un problema equivalente

$$x - Px = K_{P,Q}Nx, \qquad QNx = 0 \qquad (7)$$

donde P y Q son proyecciones (operadores lineales idempotentes) continuas en X y Z respectivamente, tales que $\ker L = \operatorname{Im} P$, $\ker Q = \operatorname{Im} L$ y $K_{P,Q}$ es la inversa generalizada de L (ver cap. I). Las ecuaciones en (7) se conocen con los nombres de ecuación auxiliar y de bifurcación, respectivamente.

Si llamamos $y = Px$, $x - Px = z$, (7) es

$$z = K_{P,Q}N(y + z), \quad QN(y + z) = 0 \qquad (8)$$

Existen dos métodos fundamentales de resolver el sistema (8). El primero se conoce con el nombre de método de Lyapunov-Schmidt (ver [20] , [35]) y consiste en lo siguiente : imponiendo ciertas condiciones a N (tales como que $\|Nx\|$ es "pequeño" para $x \in X$ o alguna condicion de carácter Lipschitziano), se puede conseguir resolver la primera ecuación en (8) en la forma $z(y)$. (Esto se hace utilizando, por ejemplo, el teorema de la función implícita o el teorema del punto fijo de Banach). Por consiguiente, el sistema (8) es ahora equivalente a la ecuación

$$QN(y + z(y)) = 0 \qquad (9)$$

Este es el problema alternativa a (5). ¿Qué ventajas tiene este método?. Observando la ecuación (9) vemos que se trata de encontrar los ceros de una función cuyo dominio es $\operatorname{Im} P$ y cuya imagen es $\operatorname{Im} Q$. Si $\operatorname{Im} P$ e $\operatorname{Im} Q$ son de dimensión finita se logra una gran ventaja, pues los métodos para estudiar ecuaciones en espacios vectoriales de dimensión finita están mucho más desarrollados que cuando la dimensión es infinita.

El otro método consiste en resolver primero la segunda ecuación en (8) en la forma $y(z)$. Una vez hecho esto, el sistema (8) es equivalente a la ecuación

$$z = K_{P,Q}N(y(z) + z)$$

que es un problema de puntos fijos (ver [31] para bibliografía sobre este método).

En el caso de que exista una aplicación lineal biyectiva Γ : coker L $\rightarrow$ ker L, existe un tercer camino para estudiar la ecuación (5). En este caso, la ecuación (5) es equivalente a la ecuación

$$x = Px + (\Gamma\Pi + K_{P,Q})Nx \tag{10}$$

donde Π : Z $\rightarrow$ coker L es la sobreyección canónica. Este camino se diferencia fundamentalmente de los dos anteriores en que la ecuación (5) no se transforma en un sistema como (7), sino en un problema de puntos fijos. Utilizando (10) y la teoría del grado topológico de Leray-Schauder, Mawhin ([53]) desarrolla una teoría de existencia de soluciones para ecuaciones del tipo (5), llamada teoría del grado de coincidencia, en el caso en que L es una aplicación lineal de Fredholm de índice cero y N satisface ciertas condiciones de compacidad. La teoría del grado de coincidencia generaliza las clásica teoría del grado de Brouwer (para aplicaciones continuas definidas entre espacios de dimensión finita) y la teoría del grado de Leray-Schauder (para perturbaciones compactas de la aplicación identidad en un espacio normado real cualquiera).

En esta memoria aplicamos la teoría del grado de coincidencia al estudio de existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales funcionales con retraso y ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro. Así, en el capítulo I exponemos de forma resumida los principales hechos relativos a la teoría del grado de coincidencia. Para ello seguimos las líneas marcadas por Mawhin en [58]. En primer lugar se definen los conceptos de aplicación lineal de Fredholm de índice cero y L-compacidad de aplicaciones no lineales (este concepto es una generalización del concepto de aplicación compacta). A continuación exponemos de forma axiomática la teoría del grado para las perturbaciones L-compactas de

aplicaciones lineales de Fredholm de índice cero. Damos también algunas indicaciones sobre la construcción del grado de coincidencia, comenzando con los grados de Brouwer y Leray-Schauder. A continuación, y utilizando las propiedades de L y N, es posible transformar la ecuación Lx = Nx en una ecuación de puntos fijos x = Mx tal que M es compacta. Esto, junto con el grado de Leray-Schauder ya definido, nos permite definir el grado de coincidencia de L y N. Seguidamente presentamos algunas propiedades sobre el cálculo del grado que serán utilizadas en las aplicaciones.

El segundo apartado del capítulo I está dedicado a la exposición de dos teoremas de existencia para ecuaciones del tipo (5), los cuales generalizan el teorema clásico de existencia de Leray-Schauder para L = I, y que serán aplicados en los capítulos siguientes.

En el capítulo II estudiamos la existencia de soluciones T-periódicas ($T>0$) de ecuaciones diferenciales ordinarias vectoriales y de orden arbitrario de la forma

$$x^{(m)} + A_{m-1}x^{(m-1)} + \ldots + A_1 x' = g(t,x,\ldots,x^{(m-1)}) + f(t) \tag{11}$$

donde $m \geq 1$, A_i, $i = 1,\ldots,m-1$, son matrices reales cuadradas de orden n y

$$g : R\times(R^n)^m \rightarrow R^n,\ (t,x_1,\ldots,x_m) \rightarrow g(t,x_1,\ldots,x_m)$$

$$f : R \rightarrow R^n,\ t \rightarrow f(t)$$

son funciones continuas y T-periódicas en t.

Para ello, transformaremos la ecuación (11) en una ecuación abstracta del tipo (5), a la que aplicaremos los teoremas de existencia dados en el capítulo anterior. La aplicación de estos teoremas lleva consigo dos grandes dificultades : demostrar que las soluciones de una cierta familia de ecuaciones están acotadas a priori y demostrar que el grado de una cierta aplicación no es cero. La dificultad para solucionar estas dos cuestiones está relacionada de forma muy directa, como dijimos anteriormente, con la forma que tenga ker L (es decir, con la clase de soluciones T-periódicas que admite la parte lineal de la ecuación (11)) y con el carácter del término no lineal N (esto depende por supuesto de la clase del término no lineal g). Además, estas dificultades se ven acrecentadas con el orden, m, y la dimensión, n, de la ecuación. Nosotros estudiamos el caso en que la parte lineal de la ecuación (11) admite sólo como soluciones T-periódicas a las aplicaciones constantes, es decir, un caso crítico (resonancia). Las principales hipótesis impuestas a g son de dos clases : una condición de "crecimiento" y una condición "asintótica". Nuestros resultados constituyen una generalización de los de Mawhin [57], Lazer [50], Reissig [70] y Villari [78] en cuanto que el tipo de términos no lineales permitidos por nuestra condición de crecimiento incluye de forma estricta a los considerados por ellos; en particular, nosotros incluímos términos no lineales acotados, asintóticos a cero y de tipo exponencial. También se generalizan los resultados de Ward [80], en cuanto que extendemos su condición al caso vectorial. Además nuestra condición asintótica generaliza la de los autores citados, y en el caso escalar ($n = 1$), generaliza las clásicas condiciones del tipo Landesman-Lazer [49], ya que este tipo de condiciones vienen impuestas mediante desigualdades estrictas, mientras que nuestra condición asintótica viene impuesta mediante desigualdades no estrictas.

Para poder aplicar los teoremas del cap. I, demostramos que L es una aplicación lineal de Fredholm de índice cero y que N es L-compacta. Utilizamos para ello el teorema de la alternativa de Fredholm (ver [34]) y el teorema de Ascolí-Arzelá, así como algunas nociones sobre la topología de los espacios $C^k(R,R^n)$ de funciones periódicas. En el apartado segundo deducimos el teorema principal de este capítulo, utilizando la fórmula de variación de constantes para ecuaciones diferenciales ordinarias con objeto de solucionar el problema de la existencia de cotas a priori. Después estudiamos el caso escalar y por último damos algunos ejemplos para demostrar que nuestros resultados

constituyen efectivamente una generalización de los de los autores citados. Los resultados de este capítulo han sido aceptados para su publicación en "Nonlinear analysis" (ver [16]).

Si nos planteamos la generalización de los anteriores resultados a ecuaciones diferenciales funcionales, puede ocurrir que el método utilizado en el capítulo II sea inviable, debido a que allí se utilizaban algunos hechos concretos de ecuaciones diferenciales ordinarias no generalizables fácilmente a otro tipo de ecuaciones. Sin embargo, los problemas de existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales funcionales con retraso y ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro considerados aquí, se pueden reducir al estudio de ecuaciones del tipo $Lx = Nx$. Es pues muy importante el obtener un teorema abstracto de existencia de soluciones para ecuaciones del tipo $Lx = Nx$, donde L y N están definidos entre ciertos espacios normados X y Z. Esto lo hacemos en el capítulo III, cuando L es una aplicación lineal de Fredholm de índice cero y N es L-compacta. Nuestros resultados son una generalización de los obtenidos por Mawhin [55], el cual consideró el caso en que N es cuasiacotada, y generalizan el conocido teorema del punto fijo de Granas. En la segunda parte de este capítulo se estudia el caso en que X y Z son espacios de funciones, obteniéndose en este caso resultados más concretos y fáciles de comprobar en la práctica. Los resultados obtenidos en este capítulo son de una gran importancia en relación con su aplicación, no sólo a los tipos de problemas considerados en el capítulo siguiente, sino a otros muchos tipos de problemas los cuales se pueden reducir al estudio de ecuaciones del tipo $Lx = Nx$, tales como algunas ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales en espacios de Banach, etc. Los resultados de este capítulo junto con algunos del capítulo siguiente, han sido aceptados para su publicación en "Journal of Differential Equations" (ver [19])

En el capítulo IV aplicamos los resultados obtenidos en el capítulo anterior al problema de existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales funcionales con retraso y de tipo neutro.

En la primera parte, estudiamos este tipo de problemas para ecuaciones del tipo

$$x^{(m)}(t)+A_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\ldots+A_1x'(t)=g(t,x_t,\ldots,x_t^{(m-1)}) \qquad (12)$$

donde A_i son como antes y

$$g : R\times(C)^m \to R^n,\ (t,\psi_1,\ldots,\psi_m)\to g(t,\psi_1,\ldots,\psi_m)$$

es continua, T-periódica en t y aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Nuestros resultados en este capítulo, constituyen una extensión a ecuaciones del tipo (12) de los obtenidos en el capítulo II para ecuaciones diferenciales ordinarias y una generalización de los obtenidos por Fennell [27], Hale [37] y Mawhin [56], ya que ellos consideran no linealidades cuasiacotadas o asintóticas a cero. También generalizamos los resultados de Fucik [28], ya que él consideró el caso escalar y g de la forma $g(t,x(t-h))$, $h\geq 0$. En la segunda parte de este capítulo estudiamos la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales funcionales neutras del tipo

$$\frac{d}{dt}(D(t,x_t)) = \mathcal{L}(t,x_t) + g(t,x_t) \qquad (13)$$

siendo $D : R\times C \to R^n$, $(t,\psi)\to D(t,\psi)$, continua, lineal en ψ, uniformemente no atómica en cero y uniformemente estable; $\mathcal{L} : R\times C \to R^n$, $(t,\psi)\to \mathcal{L}(t,\psi)$ es continua, y lineal en ψ y $g : R\times C\to R^n$, $(t,\psi)\to g(t,\psi)$ es continua y aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados. Además suponemos naturalmente que D, $\mathcal{L}$ y g son T-periódicas en t.

Estudiamos el caso resonante y el caso no resonante. Los resultados obtenidos aquí son una extensión a este tipo de ecuaciones de los obtenidos anteriormente para ecuaciones diferenciales funcionales con retraso y ecuaciones diferenciales ordinarias. Además nuestros resulta-

dos generalizan los obtenidos por Hale y Mawhin [39], ya que ellos consideraron el caso en que g es asintótica a cero. En este capítulo damos también algunos ejemplo para mostrar las generalizaciones obtenidas.

En el capítulo V estudiamos la existencia de soluciones periódicas para ecuaciones diferenciales funcionales con retraso de primer orden; concretamente para ecuaciones del tipo

$$x'(t) = g(t,x(t),x_t) \qquad (14)$$

Para este tipo de ecuaciones son por supuesto válidos los resultados obtenidos en el capítulo IV. Sin embargo, el hecho de que las ecuaciones consideradas sean de primer orden hace que podamos obtener otros resultados en una línea distinta. La diferencia con los capítulos anteriores estriba fundamentalmente en que se impone a g una condición de tipo geométrico, mediante el producto por la derivada de una cierta función V, semejante a las funciones de Liapunov en teoría de estabilidad. Los resultados de este capítulo extienden los de Gossez [32], el cuál ha considerado el caso ordinario, y generalizan los de Mawhin y Walter [59] a un tipo más amplio de no linealidades. También suponen una generalización del clásico método de las funciones guía introducido por Krasnosels'kii [43]. Las cotas a priori las deducimos en este caso de inecuaciones diferenciales semejantes a aquellas que aparecen en el método directo de Liapunov sobre estabilidad en ecuaciones no lineales.

En las notas finales exponemos algunas posibles líneas de continuación de la investigación, relacionadas con la extensión a otro tipo de ecuaciones, tales como algunas ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico y ecuaciones diferenciales en espacios de Hilbert, así como otros tipos de problemas de contorno distintos del problema periódico considerado aquí.

Quiero manifestar mi más sincero agradecimiento al Director de esta memoria, Dr. D. Pedro Martínez Amores. Sus constantes orientaciones y enseñanzas han hecho posible este trabajo y han contribuído considerablemente a mi formación matemática. También deseo expresar mi gratitud al profesor J. Mawhin del Instituto de Matemática Pura y Aplicada de Louvain-La-Neuve, Bélgica, por varias sesiones de trabajo mantenidas con él acerca del tema. Al Director del Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad de Granada, Dr. D. Mariano Gasca González, por las facilidades que siempre he tenido de él y a los demás compañeros del Departamento de Ecuaciones Funcionales de esta Universidad.

ANTONIO CAÑADA VILLAR.

Capítulo I

TEORIA DEL GRADO DE COINCIDENCIA APLICACION A LA RESOLUCION DE ECUACIONES DE OPERADORES

1.1. Aplicaciones lineales de Fredholm de índice cero y resultados básicos sobre teoría del grado de coincidencia para aplicaciones L-compactas.

Sean X y Z espacios normados reales y $L : \mathrm{dom}\, L \subset X \to Z$, una aplicación lineal.

Definición I.1. Diremos que L es una aplicación (lineal) de Fredholm de índice cero si se cumplen las dos siguientes condiciones

i) $\mathrm{Im}\, L$ es cerrado en Z.

ii) $\dim \ker L = \mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, L < +\infty$.

Entendemos que $\ker L$ e $\mathrm{Im}\, L$ son el núcleo y la imagen de L respectivamente, y que $\mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, L = \dim (Z/\mathrm{Im}\, L)$.

De la anterior definición y de resultados básicos de análisis funcional (ver [6]), se sigue que existen proyecciones continuas

$$P : X \to X\ ,\ Q : Z \to Z$$

tales que $\mathrm{Im}\, P = \ker L$, $\mathrm{Im}\, L = \ker Q$. Además, $X = \ker L \oplus \ker P$, $Z = \mathrm{Im}\, L \oplus \mathrm{Im}\, Q$, como sumas directas topológicas. Si L_P es la restricción de L a $\mathrm{dom}\, L \cap \ker P$, entonces $L_P : \mathrm{dom}\, L \cap \ker P \to \mathrm{Im}\, L$ es biyectiva. Sea $K_P : \mathrm{Im}\, L \to \mathrm{dom}\, L \cap \ker P$ su inversa. Entonces $K_P L(x) = x - Px$, $\forall x \in \mathrm{dom}\, L$, $LK_P(z) = z$, $\forall z \in \mathrm{Im}\, L$.

Notaremos por $K_{P,Q} : Z \to \mathrm{dom}\, L \cap \ker P$ tal que $K_{P,Q} = K_P(I - Q)$. $K_{P,Q}$ es llamada la inversa generalizada de L.

Sea Y un espacio métrico y $N : Y \to Z$ una aplicación (no necesariamente lineal).

Definición I.2. Diremos que N es L-compacta en Y si las aplicaciones $QN : Y \to Z$, $K_{P,Q}N : Y \to X$ son compactas, es decir, continuas y tales que para todo subconjunto acotado A de Y, $QN(A)$ y $K_{P,Q}N(A)$ son relativamente compactos.

Se puede ver en [31] que esta definición no depende, por supuesto, ni de P ni de Q.

En el caso en que Ω sea un abierto acotado de X tal que $\mathrm{dom}\, L \cap \Omega \neq \phi$ y $N : \bar{\Omega} \to Z$ ($\bar{\Omega}$ es la clausura de Ω en X), entonces, N es L-compacta en $\bar{\Omega}$ si y solo si $QN : \bar{\Omega} \to Z$, $K_{P,Q}N : \bar{\Omega} \to X$ son continuas y $QN(\bar{\Omega})$, $K_{P,Q}N(\bar{\Omega})$ son relativamente compactos.

Ejemplos.

1.- Si X y Z son ambos de la misma dimensión finita y $L = 0$, entonces $0 : X \to Z$ es una aplicación de Fredholm de índice cero. Tomando $P = I$ (identidad en X) y $Q = I$ (identidad en Z), entonces trivialmente P y Q son proyecciones continuas tales que $\mathrm{Im}\, P = \ker L$, $\mathrm{Im}\, L = \ker Q$ y $K_{I,I} = 0$. En este caso, N es 0-compacta en $\bar{\Omega}$ si y solamente si N es continua en $\bar{\Omega}$.

2.- Si $X = Z$ y $L = I : X \to X$, entonces I es una aplicación de Fredholm de índice cero. Tomando $P = Q = 0$ en X, P y Q son proyecciones continuas verificando que $\mathrm{Im}\, P = \ker I$, $\mathrm{Im} I = \ker Q$ y $K_{0,0} = I$. Además, N es I-compacta en $\bar{\Omega}$ si y solamente si N es compacta en $\bar{\Omega}$.

Sean L y Ω como antes. Vamos a notar por $C_L(\Omega)$ el conjunto de aplicaciones $F : \mathrm{dom}\, L \cap \bar{\Omega} \to Z$ las cuales son de la forma $F = L - N$, con $N : \bar{\Omega} \to Z$, L-compacta en $\bar{\Omega}$ y las cuales satisfacen la condición $0 \notin F(\mathrm{dom} L \cap \partial\Omega)$. ($\partial\Omega$ es la frontera de Ω). Bajo estas condiciones se puede definir (ver [58]) una aplicación

$$D_L(\cdot, \Omega) : C_L(\Omega) \to \mathbb{Z}, \; F \to D_L(F,\Omega)$$

($\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros) no idénticamente cero y que satisface los siguientes axiomas:

1) *Axioma de aditividad.* Si Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos abiertos y disjuntos de Ω tales que

$$0 \notin F(\mathrm{dom}\, L \cap \bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)), \text{ entonces}$$

$$D_L(F,\Omega) = D_L(F,\Omega_1) + D_L(F,\Omega_2)$$

2) *Axioma de invarianza por homotopía.* Si $F:(\mathrm{dom}\, L \cap \bar{\Omega}) \times [0,1] \to Z$ es de la forma $F(x,\lambda) = Lx - N(x,\lambda)$, con $N: \bar{\Omega} \times [0,1] \to Z$ L-compacta en $\bar{\Omega} \times [0,1]$ y si $0 \notin F((\mathrm{dom}\, L \cap \partial\Omega) \times [0,1])$, entonces la aplicación de $[0,1]$ en $\mathbb{Z}$ tal que $\lambda \to D_L(F(\cdot,\lambda),\Omega)$ es constante.

En este caso, el número entero $D_L(F,\Omega)$ se llama el grado topológico de F en Ω relativo a L.

Una propiedad importantísima del grado topológico viene dada por la siguiente proposición, la cual se puede ver en [58].

Proposición I.1. Si $F \in C_L(\Omega)$ y $D_L(F,\Omega) \neq 0$, entonces la ecuación

$$Lx = Nx \tag{1.1}$$

tiene al menos una solución en $\mathrm{dom}\, L \cap \Omega$.

Demostración. Si $0 \notin F(\mathrm{dom}\, L \cap \Omega)$, entonces $0 \notin F(\mathrm{dom}\, L \cap \bar{\Omega})$, pues $F \in C_L(\Omega)$, y así, por el axioma 1), tomando $\Omega_1 = \Omega_2 = \phi$, tendremos

$$D_L(F,\Omega) = 2\, D_L(F,\phi)$$

Ahora bién, usando nuevamente el axioma 1), con $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = \phi$, entonces $D_L(F,\phi) = 0$, con lo cual $D_L(F,\Omega) = 0$, lo cual es una contradicción.

Hay diferentes formas de construir una teoría del grado satisfaciendo los axiomas 1) y 2). Vamos a indicar una de ellas que es interesante porque aparecen conceptos que vamos a necesitar después.

Grado de Brouwer.

Sean X y Z de la misma dimensión finita y tomemos unas orientaciones fijas en ellos. Como vimos en el ejemplo 1, $C_0(\Omega)$ es el conjunto de aplicaciones $F:\bar{\Omega}\to Z$, continuas y tales que $0\notin F(\partial\Omega)$. Si suponemos que F es de clase $C^1(\Omega)$ y que $F'(x)$ es un isomorfismo de X en Z para todo $x\in\Omega$ tal que $Fx=0$, se sigue por el teorema de la función inversa que los ceros de F son aislados. Por tanto, por ser $F^{-1}\{0\}$ compacto, $F^{-1}\{0\}$ es un subconjunto finito de Ω. Podemos pues definir

$$D_0(F,\Omega) = \sum_{x\in F^{-1}\{0\}} \operatorname{sign} \det F'(x)$$

donde sign det $F'(x)$ es $+1$ si $\det F'(x)$ es positivo y -1 si $\det F'(x)$ es negativo ($\det F'(x)$ es el determinante de la matriz que representa a la aplicación lineal $F'(x)$ respecto de unas bases en X y Z compatibles con las orientaciones tomadas).

Utilizando el lema de Sard (ver [21]) y el teorema de aproximación de Weirstrass (ver [25]), podemos aproximar, de manera uniforme en $\bar{\Omega}$, cualquier función $F\in C_0(\Omega)$ por funciones $F_n:\bar{\Omega}\to Z$, del tipo anterior. Se puede ver en [76] que existe el $\lim_{n\to+\infty} D_0(F_n,\Omega)$ y que este límite es independiente de la sucesión tomada. Por tanto, podemos definir

$$D_0(F,\Omega) = \lim_{n\to+\infty} D_0(F_n,\Omega)$$

para toda función $F\in C_0(\Omega)$. $D_0(F,\Omega)$ se llama generalmente grado de Brouwer de F en Ω y 0 y se nota también por $d_B(F,\Omega,0)$.

Si $\dim X = \dim Z = 0$, entonces definimos

$$d_B(I,\{0\},0) = 1$$

Grado de Leray-Schauder.

Sea ahora $X = Z$ un espacio normado real arbitrario y $L = I$. Entonces, tal como vimos en el ejemplo 2, $C_I(\Omega)$ es el conjunto de aplicaciones de la forma $F = I - N$, con $N:\bar{\Omega}\to X$, compacta en $\bar{\Omega}$ y tales que $0\notin (I-N)(\partial\Omega)$.

Tal como se puede ver en [76], se puede encontrar una sucesión de aplicaciones continuas $N_n:\bar{\Omega}\to X$, $n\in\mathbb{N}$, tales que (N_n) tiende a N uniformemente en $\bar{\Omega}$ y para cada $n\in\mathbb{N}$, la imagen de N_n está contenida en un subespacio de X de dimensión finita. Como $0\notin(I-N)(\partial\Omega)$, $0\notin(I-N_n)(\partial\Omega)$ para n suficientemente grande, y así, utilizando el grado de Brouwer, podemos definir $d_B(F_n,\Omega\cap X_n,0)$, donde X_n es un subespacio de dimensión finita de X tal que $\operatorname{Im}(N_n)\subset X_n$ y F_n es la restricción a $\Omega\cap X_n$ de $I-N_n$. Se puede ver en [76] que existe el $\lim_{n\to+\infty} d_B(F_n,\Omega\cap X_n,0)$ y que este límite es independiente de la sucesión (N_n) tomada. Podemos pues definir para cada $F\in C_I(\Omega)$,

$$D_I(F,\Omega) = \lim_{n\to+\infty} d_B(F_n,\Omega\cap X_n,0)$$

$D_I(F,\Omega)$ se llama generalmente grado de Leray-Schauder de F en Ω y 0 y se nota por $d_{LS}(I-N,\Omega,0)$.

Se puede demostrar fácilmente que si X es de dimensión finita, entonces $C_0(\Omega) = C_I(\Omega)$ y para toda $F\in C_0(\Omega)$, $D_I(F,\Omega) = D_0(F,\Omega)$.

Grado de coincidencia.

Vamos a considerar ahora el caso en que $F\in C_L(\Omega)$, siendo L una aplicación de Fredholm de índice cero. Con las notaciones expuestas al comienzo del capítulo, tenemos el siguiente resultado ([31]).

Proposición I.2. Sea $x\in \operatorname{dom} L\cap\bar{\Omega}$. Entonces, x es una solución de la ecuación (1.1) si y solamente si

$$x = Px + JQNx + K_{P,Q}Nx \qquad (1.2)$$

donde J es cualquier isomorfismo entre $\operatorname{Im} Q$ y $\ker L$.

Demostración. Supongamos que x es una solución de (1.1). Entonces $QNx = 0$ y así $JQNx = 0$. Por tanto, $Lx = (I - Q)Nx$ y así $K_P Lx = K_P(I - Q)Nx$. O sea $x - Px = K_{P,Q}Nx$, lo cual, juntamente con $JQNx = 0$, nos dará (1.2).

Recíprocamente, si x es una solución de (1.2), entonces $Lx = LPx + LJQNx + LK_P(I - Q)Nx$. O sea, $Lx = (I - Q)Nx$. Ahora bién, aplicando P a ambos miembros de (1.2), tendremos $QNx = 0$ y así $Lx = Nx$. .

La importancia de la anterior proposición se pone de manifiesto en la siguiente observación : El conjunto de puntos de coincidencia de L y N en $\bar{\Omega}$, es decir, el conjunto de puntos $x \in \operatorname{dom} L \cap \bar{\Omega}$ tales que $Lx = Nx$, es igual al conjunto de puntos fijos del operador $M:\bar{\Omega} \to X$, definido por $M = P + JQN + K_{P,Q}N$. Ahora bién, como N es L-compacta en $\bar{\Omega}$ y P tiene una imagen de dimensión finita, M es compacta en $\bar{\Omega}$ y como además $0 \notin (L - N)(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega)$, entonces $0 \notin (I - M)(\partial\Omega)$. Así pues, $I - M \in C_I(\Omega)$ y por lo tanto podemos definir $d_{LS}(I - M,\Omega ,0)$.

Se puede demostrar fácilmente que $d_{LS}(I - M,\Omega ,0)$ no depende de P ni de Q. Además, si $J' : \operatorname{Im} Q \to \ker L$ es cualquier otro isomorfismo y $M' : \bar{\Omega} \to X$ está definida por $M' = P + J'QN + K_{P,Q}N$, entonces

$$d_{LS}(I - M',\Omega ,0) = \operatorname{sign} \det (J'J^{-1}) d_{LS}(I - M,\Omega ,0)$$

Por lo tanto, si fijamos orientaciones en $\ker L$ e $\operatorname{Im} Q$ y cogemos sólo aquellos isomorfismos J que conserven las orientaciones tomadas, $d_{LS}(I - M, \Omega ,0)$ está determinado de forma única por L,N y Ω. Teniendo en cuenta esto, Mawhin [53] define el grado de coincidencia de L y N en Ω, que se nota por $D_L[(L,N),\Omega]$, de la siguiente forma

$$D_L[(L,N),\Omega] = D_L(F,\Omega) = d_{LS}(I - M, \Omega ,0)$$

Trivialmente, si $L = 0$, entonces $D_0[(0,N),\Omega] = d_B(N, \Omega ,0)$ y si $L = I$, entonces $D_I[(I,N),\Omega] = d_{LS}(I - N,\Omega ,0)$. Esto muestra la compatibilidad existente entre las tres definiciones hechas de grado topológico. Es fácil ver, a partir de las correspondientes propiedades del grado de Brouwer, que la aplicación $D_L(\cdot, \Omega)$ satisface los axiomas 1) y 2) antes mencionados (ver [31]).

Vamos a exponer a continuación algunas de las propiedades básicas sobre $D_L(F,\Omega)$ y $D_0(F,\Omega)$. Las demostraciones se pueden encontrar en [31] y [58] .

Proposición I.3. Sea $F = L - N \in C_L(\Omega)$, con $N(\bar{\Omega}) \subset Z_1$, siendo Z_1 un subespacio vectorial de Z de dimensión finita tal que $Z = \operatorname{Im} L \oplus Z_1$, algebraicamente. Entonces, si $N_{\ker L}$ es la restricción de N a $\ker L \cap \bar{\Omega}$, se tiene que $N_{\ker L} \in C_0(\Omega \cap \ker L)$ y

$$|D_L(F,\Omega)| = |D_0(N_{\ker L}, \Omega \cap \ker L)| = |d_B(N_{\ker L},\Omega \cap \ker L,0)|$$

Teorema de Borsuk. Si $F \in C_L(\Omega)$ con Ω simétrico respecto de cero (es decir, si $x \in \Omega$, entonces $-x \in \Omega$), $0 \in \Omega$ y $F(-x) = -F(x)$ para todo $x \in \operatorname{dom} L \cap \partial\Omega$, entonces $D_L(F,\Omega)$ es un número impar (y por lo tanto distinto de cero).

Teorema de Krasnosels' kii. Sea $V : R^n \to R$ de clase C^1 tal que:

i) $\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = +\infty$ ($|\cdot|$ es una norma cualquiera en R^n).

ii) Existe $r_1 > 0$ tal que $V'(x) = \operatorname{grad} V(x) \neq 0$ para todo x tal que $|x| \geq r_1$.

Entonces, si $r \geq r_1$, se tiene que

$$D_0(\operatorname{grad} V,B(r)) \neq 0$$

donde $B(r)$ es la bola abierta en R^n de centro cero y radio r.

NOTA.- El teorema anterior es trivialmente cierto si i) se sustituye por $\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = -\infty$

Teorema de Poincaré-Bohl. Sea Ω un abierto acotado de R^n y $F : \overline{\Omega} \to R^n$, $G : \overline{\Omega} \to R^n$ dos aplicaciones continuas tales que para todo $x \in \partial\Omega$, el segmento que une $F(x)$ y $G(x)$, (es decir, el conjunto de puntos de R^n de la forma $(1-\lambda)F(x) + \lambda G(x), \lambda \in [0,1]$), no contiene al origen. Entonces

$$D_0(F,\Omega) = D_0(G,\Omega).$$

La proposición y los teoremas anteriores, junto con la propiedad de invarianza por homotopía, permiten demostrar que el grado de un gran número de aplicaciones es distinto de cero.

I.2. Teoremas de existencia del tipo de Leray-Schauder para ciertas ecuaciones no lineales en espacios normados.

Vamos a terminar este capítulo con dos teoremas de existencia del tipo Leray-Schauder para ecuaciones de operadores en espacios normados de la forma (1.1). Ambos se pueden ver en [58].

Teorema I.4. Sea Ω un abierto acotado de X, $L - \Phi = H \in C_L(\Omega)$ y $F = L - N$ con $N : \overline{\Omega} \to Z$, L-compacta en $\overline{\Omega}$ tal que

i) $\lambda Fx + (1-\lambda)Hx \neq 0$ para todo $(x,\lambda) \in (\mathrm{dom}\, L \cap \partial\Omega) \times]0,1[$.

ii) $D_L[(L,\Phi),\Omega] \neq 0$.

Entonces, la ecuación (1.1) tiene al menos una solución en $\mathrm{dom}\, L \cap \overline{\Omega}$.

Demostración. Si existe algún $x \in \mathrm{dom}\, L \cap \partial\Omega$ tal que $Lx = Nx$, el teorema es obvio. Si no es así, definamos la aplicación $\mathcal{N} : \overline{\Omega} \times [0,1] \to Z$, $(x,\lambda) \to \lambda Nx + (1-\lambda)\Phi x$. Como N y Φ son L-compactas en $\overline{\Omega}$, $\mathcal{N}$ es L-compacta en $\overline{\Omega} \times [0,1]$. Sea la aplicación $\mathcal{F} : (\mathrm{dom}\, L \cap \overline{\Omega}) \times [0,1] \to Z$, $(x,\lambda) \to Lx - \mathcal{N}(x,\lambda)$; entonces, por la hipótesis i), $0 \notin \mathcal{F}((\mathrm{dom}\, L \cap \partial\Omega) \times [0,1])$ y por la propiedad de invarianza por homotopía, tendremos que

$$D_L(\mathcal{F}(\cdot,1),\Omega) = D_L(\mathcal{F}(\cdot,0),\Omega).$$

Es decir, $D_L[(L,N),\Omega] = D_L[(L,\Phi),\Omega] \neq 0$, por ii). Por lo tanto, por la proposición I.1, existe al menos una solución de $Lx = Nx$ en $\mathrm{dom}\, L \cap \Omega$.

El siguiente teorema es de un especial interés, porque en él aparece el grado de Brouwer. Se obtiene combinando el teorema anterior con la proposición I.3.

Teorema I.5. Sea $F = L - N$, con N L-compacta en $\overline{\Omega}$, y supongamos que se cumplen las siguientes condiciones :

i) $Lx \neq \lambda Nx$ para todo $(x,\lambda) \in (\mathrm{dom}\, L \cap \partial\Omega) \times]0,1[$.

ii) $QNx \neq 0$ para todo $x \in \ker L \cap \partial\Omega$

iii) $D_0(QN_{\ker L}, \Omega \cap \ker L) \neq 0$

Entonces, la ecuación (1.1) tiene al menos una solución en $\mathrm{dom}\, L \cap \overline{\Omega}$.

Demostración. Si existe algún $x \in \mathrm{dom}\, L \cap \partial\Omega$ tal que $Lx = Nx$, el teorema es obvio. Si no es así, tomemos $\Phi = QN$ en el teorema anterior. Trivialmente Φ es L-compacta en $\overline{\Omega}$ y si $Lx = \Phi x$, entonces, $QNx = 0$. Por tanto $Lx = 0$ y así $x \in \ker L$. Luego por ii) del teorema I.5., $x \notin \partial\Omega$ y por tanto, $L - \Phi \in C_L(\Omega)$. Por otra parte, si $L - \Phi = H$,

$$\lambda Fx + (1-\lambda)Hx = \lambda(Lx - Nx) + (1-\lambda)(Lx - QNx) = Lx - \lambda Nx - (1-\lambda)QNx.$$

Así pues, si existe $(x,\lambda) \in (\mathrm{dom}\, L \cap \partial\Omega) \times]0,1[$ tal que $\lambda Fx + (1-\lambda)Hx = 0$, tendremos

$$Lx = \lambda Nx + (1-\lambda)QNx$$

Ahora, aplicando Q a ambos miembros de la anterior igualdad, se tendrá $QNx = 0$. Luego $Lx = \lambda Nx$, lo cual contradice i) del teorema I.5.

Por otra parte, teniendo en cuenta la proposición I.3, con $Z_1 = \mathrm{Im}\, Q$, tendremos

$$|D_L(H,\Omega)| = |D_L[(L,QN),\Omega]| = |D_0(QN_{\ker L}, \Omega \cap \ker L)| \neq 0$$

por iii) del teorema I.5.

Así pues, se cumplen todas las hipótesis del teorema I.4. y por tanto se tiene la conclusión del teorema I.5.

Los teoremas I.4 y I.5 son muy generales, pero precisamente esta generalidad les confiere algunas limitaciones para llevarlos a la práctica. Observemos, por ejemplo, la hipótesis i) del teorema I.4. Una forma clásica de resolver esta cuestión es hallar una cota a priori para las soluciones de la familia de ecuaciones

$$\lambda Fx + (1-\lambda)Hx = 0, \ \lambda \in]0,1[$$

Es decir, si demostramos que existe $r_1 > 0$ tal que $|x| < r_1$ para toda solución x de la ecuación anterior, entonces $\Omega = B_X(r_1)$, cumple i) del teorema I.4. Al aplicar estos teoremas en los capítulos siguientes, la obtención de cotas a priori se hará utilizando diferentes métodos adaptados a la teoría de las ecuaciones que se tratan. Ahora bién, la obtención de cotas a priori no es una cuestión fácil. Esto depende de ker L y de la clase de no linealidad debida a N.
La hipótesis ii) se estudiará combinando la propiedad de homotopía del grado con las propiedades aquí expuestas (teoremas de Poincaré-Bohl, Borsuk y Krasnosels'kii).

Capítulo II

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES VECTORIALES DE ORDEN SUPERIOR EN RESONANCIA

II.1. Resultados previos sobre operadores diferenciales L con coeficientes constantes y L-compacidad de algunos operadores no lineales.

Sean $g : R\times(R^n)^m \to R^n$, $(t,x_1,\dots,x_m) \to g(t,x_1,\dots,x_m)$ y
$f : R \to R^n$, $t \to f(t)$

funciones continuas y T-periódicas $(T>0)$ respecto de t, es decir, $g(t+T,x_1,\dots,x_m) = g(t,x_1,\dots,x_m)$ para todo $(t,x_1,\dots x_m) \in R\times(R^n)^m$ y $f(t+T) = f(t)$, para todo $t \in R$.

Vamos a estudiar la existencia de soluciones T-periódicas de la ecuación diferencial ordinaria

$$x^{(m)} + A_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + A_1x' = g(t,x,\dots,x^{(m-1)}) + f(t), \ m \geq 1, \qquad (2.1)$$

donde A_i, $i = 1,\dots,m-1$, son matrices reales constantes de orden $n\times n$.

Notaremos por Z el espacio de Banach de aplicaciones $z : R \to R^n$, las cuales son continuas y T-periódicas con la norma

$$\|z\|_0 = \max_{t\in R} |z(t)| = \max_{t\in[0,T]} |z(t)| \quad , \quad z \in Z$$

donde $|x| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ para $x = (x_1,\dots,x_n) \in R^n$.

Por X notamos al espacio de Banach de aplicaciones $x : R \to R^n$, las cuales son continuas y T-periódicas junto con sus primeras $m-1$

derivadas, con la norma

$$\| x \|_{m-1} = \text{máx} \{ \| x^{(i)} \|_0 : 0 \leq i \leq m-1 \}$$

donde $x^{(i)}$ es la i-ésima derivada de $x \in X$.

Consideremos el operador diferencial con coeficientes constantes $L : \text{dom}\, L \subset X \to Z$ definido por

$$Lx = x^{(m)} + A_{m-1}x^{(m-1)} + \ldots + A_1 x' \quad \text{donde}$$

$$\text{dom}\, L = \{ x \in X : x \text{ es de clase } C^m \}.$$

Proposición II.1. Supongamos que se cumple la hipótesis:

i) La ecuación

$$\det(\lambda^m I_n + \lambda^{m-1} A_{m-1} + \ldots + \lambda A_1) = 0 \tag{2.2}$$

(I_n es la matriz identidad de orden n), no tiene raíces de la forma $\lambda = \frac{2k\pi i}{T}$, con k un entero no nulo.

Entonces, L es una aplicación de Fredholm de índice cero.

Demostración. Al ser L un operador lineal con coeficientes constantes, ker L es no trivial si y sólo si la ecuación (2.2) tiene raíces de la forma $\lambda = \frac{2k\pi i}{T}$, con k un número entero ([34]).

En este caso, ker L está formado por los elementos de dom L que se obtienen tomando las partes real e imaginaria de las aplicaciones complejas

$$t \in R \to e^{\frac{2k\pi i}{T}} c$$

donde c es un vector formado por las primeras n componentes del vector propio correspondiente al valor propio $\frac{2k\pi i}{T}$ de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n & \ldots & 0_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_n & 0_n & \ldots & 0_n & I_n \\ 0_n & -A_1 & \ldots & \ldots & -A_{m-1} \end{pmatrix}$$

donde 0_n es la matriz cuadrada nula de orden n.

En nuestro caso, sólo tenemos una raiz de este tipo con $k = 0$ y por tanto ker $L = \{ x \in \text{dom}\, L : x$ es una aplicación constante $\}$.

Si identificamos una aplicación constante $x : R \to R^n$, con el elemento de R^n dado por su valor constante, entonces ker $L = R^n$ y dim ker $L = n$.

Para ver quién es Im L, necesitamos el operador adjunto L^* de L definido por

$$L^* u = u^{(m)} - u^{(m-1)} A_{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1} u' A_1$$

donde $u : R \to (R^n)^*$ es T-periódica y tiene m derivadas continuas. ($(R^n)^*$ es el espacio vectorial de vectores fila reales de dimensión n). Como ker $L = R^n$, ker $L^* = (R^n)^*$ y entonces, por el teorema de la alternativa de Fredholm(ver[34]).

$$\text{Im}\, L = \{ z \in Z : \int_0^T z(t)\, dt = 0 \}$$

Im L es cerrado en Z. En efecto, si $z \in \overline{\text{Im}\, L}$, entonces existe una sucesión (z_n), $z_n \in \text{Im}\, L$, tal que $z_n \to z$ en Z; es decir, $z_n(t) \to z(t)$ de manera uniforme en $[0,T]$. Como $z_n \in \text{Im}\, L$, tendremos que $\int_0^T z_n(t)\, dt = 0$, para todo $n \in N$, y por tanto $\int_0^T z(t)\, dt = 0$.

Luego $z \in \text{Im}\, L$. Ahora bién, para todo $z \in Z$, se tiene $z = z_1 + z_2$, donde

$$z_1 = z - \frac{1}{T}\int_0^T z(t)\,dt \quad , \quad z_2 = \frac{1}{T}\int_0^T z(t)\,dt \; .$$

Como $\int_0^T z_1(t)\,dt = 0$, $z_1 \in \operatorname{Im} L$ y $z_2 \in R^n$. Además, $\operatorname{Im} L \cap R^n = \{0\}$ y por tanto $Z = \operatorname{Im} L \oplus R^n$ algebraicamente. Así pues, codim $\operatorname{Im} L = n$, y teniendo en cuenta la definición I.1., L es una aplicación de Fredholm de índice cero.

El hecho de que $\ker L$ esté formado por las aplicaciones constantes, nos permite obtener proyecciones P y Q asociadas a L muy simples y adecuadas para los problemas que trataremos a continuación. En efecto, si definimos los operadores

$$P : X \to X,\ x \to Px = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \ ,\ Q : Z \to Z,\ z \to Qz = \frac{1}{T}\int_0^T z(t)\,dt$$

entonces tendremos que ambos son proyecciones continuas verificando $\operatorname{Im} P = \ker L$, $\operatorname{Im} L = \ker Q$ y $X = \ker L \oplus \ker P$, $Z = \operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Im} Q$, como sumas directas topológicas.

Tal como vimos al comienzo del capítulo I, la aplicación L_p, restricción de L a $\operatorname{dom} L \cap \ker P$, es biyectiva sobre $\operatorname{Im} L$. Además, su inversa K_p es continua (ver [34]). La forma que tiene el operador L y las normas consideradas en X y Z nos permiten demostrar la siguiente proposición.

Proposición II.2. K_p es compacta.

Demostración. Sea B un subconjunto cualquiera acotado de $\operatorname{Im} L$. Existe pues $M_1 > 0$ tal que $\|z\|_0 \leq M_1$ para todo $z \in B$. Entonces, como K_p es lineal y continua, existe $M_2 > 0$, tal que $\|K_p z\|_{m-1} \leq M_2$ para todo $z \in B$. Como $LK_p = I$, $(LK_p)(z) = z$ para todo $z \in B$. Es decir,

$$(K_p z)^{(m)} + A_{m-1}(K_p z)^{(m-1)} + \dots + A_1(K_p z)' = z \quad \text{para todo } z \in B$$

Esto implica que $\|(K_p z)^{(m)}\|_0 \leq M_2 \sum_{i=1}^{m-1} |A_i| + M_1$, y así, el conjunto

$\{(K_p z)' : z \in B\}$ es acotado en X. Por tanto, por el teorema de Ascoli-Arzelá, $K_p(B)$ es relativamente compacto en X, y entonces, K_p es una aplicación compacta.

Consideremos ahora la aplicación

$$N : X \to Z,\ (Nx)(t) = g(t, x(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) + f(t)$$

Proposición II.3. Si Ω es un subconjunto cualquiera abierto y acotado de X con $\operatorname{dom} L \cap \Omega \neq \phi$, entonces N es L-compacta en $\overline{\Omega}$.

Demostración. Basta demostrar que N es continua y que $N(\overline{\Omega})$ es acotado. En efecto, si esto es cierto, al ser $Q : Z \to Z$ lineal, continua y con imagen de dimensión finita, Q es una aplicación compacta, y por tanto, teniendo en cuenta la proposición anterior $QN : \overline{\Omega} \to Z$, y $K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \to X$ serán compactas.

Ver que N es continua es trivial a partir de la continuidad de f y g. Para ver que $N(\overline{\Omega})$ es acotado, sea $x \in \overline{\Omega}$ cualquiera. Entonces, como $\overline{\Omega}$ es acotado en X, existirá $k_1 >$ tal que $\|x\|_{m-1} \leq k_1$. O sea, $|x^{(i)}(t)| \leq k_1$, $0 \leq i \leq m-1$, $t \in [0,T]$. Como f y g son continuas y definidas entre espacios de dimensión finita, aplican conjuntos acotados en conjuntos acotados, y así, existe $k_2 > 0$ tal que

$$|(Nx)(t)| = |g(t, x(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) + f(t)| \leq k_2 . \text{ Es decir,}$$

$$\|Nx\|_0 \leq k_2 \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega} \; .$$

Así pues, el problema de existencia de soluciones T-periódicas de la ecuación (2.1) es equivalente a resolver la ecuación de operadores $Lx = Nx$, donde L y N están definidas como antes. Al ser L una aplicación de Fredholm de índice cero y N L-compacta en subconjuntos acotados de X, podemos aplicar la teoría desarrollada en el capítulo anterior.

II.2. Algunos teoremas y consecuencias sobre la existencia de soluciones periódicas.

Teorema II.4. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

i) $\ker L = \{ x \in \text{dom } L : x$ es una aplicación constante $\}$.

ii) Existen $a \in R^n$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,\dots,m$ y una aplicación continua $\beta: R \to R$, $t \to \beta(t)$, tal que

$$|g(t,x_1,\dots,x_m)| \leq \langle a, g(t,x_1,\dots,x_m)\rangle + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i |x_i| + \beta(t)$$

para todo $(t,x_1,\dots,x_m) \in R\times(R^n)^m$.

($\langle\ ,\ \rangle$ indica el producto escalar ordinario en R^n).

iii) Existe una aplicación continua $\phi: X \to Z$, aplicando conjuntos acotados en conjuntos acotados, $\alpha_i' \geq 0$, $i = 1,\dots,m$, y una aplicación continua $\gamma : R \to R$, $t \to \gamma(t)$, tal que

$$|(\phi x)(t)| \leq \langle a,(\phi x)(t)\rangle + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i' \|x^{(i-1)}\|_0 + \gamma(t)$$

para todo $x \in X$, $t \in R$.

iv) Existe $r > 0$, tal que para todo $x = (x_1,\dots,x_n) \in \text{dom } L$, con $\min_t |x_j(t)| \geq r$, para algún j, $1 \leq j \leq n$, se tiene

$$\left\langle \int_0^T (\phi x)(t)dt, \int_0^T (g(t,x(t),\dots,x^{(m-1)}(t)) + f(t))dt \right\rangle \geq 0,$$

donde ambas integrales no son simultáneamente nulas.

v) $L - \phi = H \in C_L(B_X(s))$ y $D_L[(L,\phi),B_X(s)] \neq 0$, para todo $s \geq r$. ($B_X(s)$ es la bola abierta en X de centro cero y radio s).

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$, tal que si $\alpha = \max\{\alpha_i, \alpha_i', i=1,\dots,m\} \leq \alpha_0$, la ecuación (2.1) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Vamos a aplicar el teorema I.4., con $F = L - N$ y $H = L - \phi$. Basta demostrar la hipótesis i) de dicho teorema, pues v) del teorema II.4. es ii) del teorema I.4. Para ello es suficiente que las posibles soluciones de la familia de ecuaciones

$$\lambda Fx + (1-\lambda)Hx = Lx - \lambda Nx - (1-\lambda)\phi x = 0, \quad \lambda \in]0,1[$$

estén acotadas a priori. Esto es equivalente a demostrar que las posibles soluciones T-periódicas de la familia de ecuaciones

$$x^{(m)} + A_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + A_1x' = \lambda g(t,x,\dots,x^{(m-1)}) + \lambda f(t) + (1-\lambda)(\phi x)(t), \quad (2.3)$$

para $\lambda \in]0,1[$, están acotadas en X.

Sea $x(t)$ una solución T-periódica de (2.3). Definimos $b : R \to R^n$, $t \to \lambda g(t,x(t),\dots,x^{(m-1)}(t)) + \lambda f(t) + (1-\lambda)(\phi x)(t)$.

Como $x(t)$ es T-periódica, $Qb = 0$, y por tanto, la ecuación

$$y^{(m)} + A_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + A_1y' = b(t) \quad (2.4)$$

tiene soluciones T-periódicas. Además, si $y(t)$ es una solución T-periódica de (2.4), entonces $L(x - y) = 0$, y por tanto $x - y \in \ker L$; es decir, $x^{(i)}(t) = y^{(i)}(t)$ para $t \in R$, $1 \leq i \leq m$.

La ecuación (2.4) es equivalente a

$$Y' = AY + B(t) \quad (2.5)$$

donde $y = y_1$, $y' = y_2, \dots, y^{(m-1)} = y_m$.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n & \dots & 0_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_n & 0_n & \dots & 0_n & I_n \\ 0_n & -A_1 & \dots & \dots & -A_{m-1} \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Como la ecuación (2.5) es lineal, cualquier solución T-periódica, $Y(t)$, de (2.5) es de la forma

$$Y(t) = \Psi(t)Y_0 + \Psi(t)\int_0^t \Psi^{-1}(s)B(s)\,ds$$

donde $\Psi(t)$ es la matriz solución principal en $t = 0$ de $Y' = AY$ e Y_0 satisface la ecuación $EY_0 = C$, donde $E = I - \Psi(T)$ y

$$C = \int_0^T \Psi(T)\Psi^{-1}(s)B(s)\,ds$$

E viene representado por una matriz $nm\times nm$ y por lo tanto define una aplicación lineal y continua $E : R^{nm} \to R^{nm}$. Sea E^* una aplicación lineal, inversa a la derecha de E, o sea, $EE^* = I$. Tomemos $Y_0 = E^*C$. Entonces, $EY_0 = C$ y por lo tanto

$$Y(t) = \Psi(t)E^*\int_0^T \Psi(T)\,\Psi^{-1}(s)B(s)ds + \Psi(t)\int_0^t \Psi^{-1}(s)B(s)ds$$

es una solución T-periódica de (2.5).

Ahora bién, teniendo en cuenta que $\Psi(t)$ y E^* son continuas, existirá $k_1 > 0$, independiente de $B(t)$ (y por lo tanto, independiente de $x(t)$ y de λ) tal que

$$\max_{t\in[0,T]}|Y(t)| \leq k_1\int_0^T |B(s)|\,ds = k_1\int_0^T |b(s)|\,ds$$

Ahora bién, teniendo en cuenta la definición de $b(t)$, y las hipótesis ii) y iii), tendremos

$$\max_{t\in[0,T]}|Y(t)| \leq k_1\int_0^T |\lambda g(s,x(s),\ldots,x^{(m-1)}(s)) + \lambda f(s) + (1-\lambda)(\phi x)(s)|\,ds$$

$$\leq k_1\left[\lambda\int_0^T |f(s)|ds + \lambda\int_0^T |g(s,x(s),\ldots,x^{(m-1)}(s))|\,ds + (1-\lambda)\int_0^T |(\phi x)(s)|\,ds\right]$$

$$\leq k_1\left[\lambda\int_0^T |f(s)|\,ds + \lambda\int_0^T \left(\langle a, g(s,x(s),\ldots,x^{(m-1)}(s))\rangle + \sum_{i=1}^m \alpha_i' |x^{(i-1)}(s)|\right)ds\right.$$

$$\left. + \lambda\int_0^T \beta(s)ds + (1-\lambda)\int_0^T \left(\langle a,(\phi x)(s)\rangle + \sum_{i=1}^m \alpha_i' |x^{(i-1)}|_0 + \gamma(s)\right) ds\right]$$

$$\leq k_1\left[\int_0^T \langle a,\lambda\, g(s,x(s),\ldots,x^{(m-1)}(s)) + (1-\lambda)(\phi x)(s)\rangle\, ds + 2m\alpha\, T\,\|x\|_{m-1} + k_2\right],$$

donde $k_2 > 0$, es tal que

$$k_2 > \lambda\int_0^T |f(s)|ds + \lambda\int_0^T \beta(s)\,ds + (1-\lambda)\int_0^T \gamma(s)\,ds \quad ,\lambda\in]0,1[$$

Ahora bién, integrando ambos miembros de (2.3) entre 0 y T, se tiene

$$\int_0^T (\lambda g(s,x(s),\ldots,x^{(m-1)}(s)) + (1-\lambda)(\phi x)(s))ds = -\lambda\int_0^T f(s)\,ds$$

y por tanto,

$$\max_{t\in[0,T]}|Y(t)| \leq k_1\left[\langle a,-\lambda\int_0^T f(s)ds\rangle + 2m\alpha\, T\,\|x\|_{m-1} + k_2\right]$$

$\leq k_3 + k_1 2m\alpha T\|x\|_{m-1}$, donde k_3 es una constante tal que

$$k_3 > k_1\langle a, -\lambda\int_0^T f(s)ds\rangle + k_1k_2, \lambda \in]0,1[$$

Si $k = \text{máx}\ \{k_3, k_1 2mT\}$, entonces

$$\max_{t\in[0,T]}|Y(t)| \leq k + k\alpha\|x\|_{m-1}.$$

Como $Y(t) = \text{col}\ (y_1(t),\ldots,y_m(t))$, tendremos que

$$\|y_i\|_0 = \|y^{(i-1)}\|_0 \le k + k\alpha\|x\|_{m-1}, \quad i = 1,\dots,m$$

Como $x^{(i)} = y^{(i)}$, para $1 \le i \le m$, se tiene

$$\|x^{(i-1)}\|_0 \le k + k\alpha\|x\|_{m-1}, \quad i = 2,\dots,m \qquad (2.6)$$

Además, para cada solución T-periódica $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ de (2.3) existen números $t_j \in [0,T]$ con $|x_j(t_j)| < r$, $j = 1,\dots,n$. En efecto, si no fuese así, entonces para algún j, $1 \le j \le n$, se tendría que $|x_j(t)| \ge r$ para todo $t \in [0,T]$. Por tanto, $\min_t |x_j(t)| \ge r$. Entonces, integrando (2.3) entre 0 y T, se tiene

$$\lambda\int_0^T (f(t) + g(t,x(t),\dots,x^{(m-1)}(t)))dt = -(1-\lambda)\int_0^T (\phi x)(t)\, dt .$$

Si representamos esta ecuación por $\lambda v = -(1-\lambda)w$, entonces $\langle v,w\rangle = -\langle \frac{1-\lambda}{\lambda} w,w\rangle \le 0$. Por la hipótesis iv), $\langle v,w\rangle \gg 0$; luego $\langle w,w\rangle = 0$ y así $w = v = 0$, lo cual es una contradicción.

Así pues, si $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ es una solución T-periódica de (2.3), para cada j, $1 \le j \le n$, existe $t_j \in [0,T]$ tal que $|x_j(t_j)| < r$. Como

$$x_j(t) = x_j(t_j) + \int_{t_j}^{t} x_j'(s)\, ds, \quad t \in [0,T]$$, obtenemos

de (2.6), con $i = 2$ que $|x_j(t)| \le r + \int_0^T |x_j'(s)|\, ds$. Es decir,

$$|x_j(t)| \le r + kT + kT\alpha\|x\|_{m-1} \qquad \text{para todo } t \in [0,T],$$

y para todo j con $1 \le j \le n$. Por lo tanto,

$$\|x\|_0 \le r + kT + kT\alpha\|x\|_{m-1} .$$

Pero por (2.6), $\|x^{(i-1)}\|_0 \le k + k\alpha\|x\|_{m-1}$, $i = 2,\dots,m$. Luego si

$k_0 = \max\{k, r + kT\}$, $\|x\|_{m-1} \le k_0 + \alpha k_0\|x\|_{m-1}$. Así, si α_0 es un número positivo cualquiera tal que $\alpha_0 < k_0^{-1}$ y $\alpha \le \alpha_0$, tendremos

$$\|x\|_{m-1} \le \frac{k_0}{1-\alpha k_0} = r_1$$

Es decir, las posibles soluciones T-periódicas de (2.3) están acotadas a priori en X por r_1.

Tomando $\Omega = B_X(r_2)$, $r_2 > \max\{r, r_1\}$, se cumplirán todas las hipótesis del teorema I.4. y la demostración está acabada.

NOTAS.

1.- La relación que existe entre la hipótesis ii) y las condiciones impuestas sobre las componentes de g queda de manifiesto en esta nota.

La hipótesis ii) se satisface si existen $a_j \in R$, $\alpha_{ij} \ge 0$, $j = 1,\dots,n$, $i = 1,\dots,m$ y una función continua $\beta: R \to R$ tal que

$$|g_j(t,x_1,\dots,x_m)| \le a_j g_j(t,x_1,\dots,x_m) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}|x_i| + \beta(t), \quad j = 1,\dots,n$$

para todo $(t,x_1,\dots,x_m) \in R\times(R^n)^m$.

En efecto, bastaría sumar en j, $1 \le j \le n$, y tener en cuenta que todas las normas en R^n son equivalentes.

Observemos que si $a_j = 1$ y $g_j(t,x_1,\dots,x_m)$ es no negativa, la anterior desigualdad no supone ninguna restricción para g_j.

2.- La hipótesis iv) es más general que la siguiente : Existe $r > 0$, tal que para todo $x \in \mathrm{dom}\, L$, con $\min_t |x(t)| \ge r$, se tiene

$$\left\langle \int_0^T (\phi x)(t)\, dt, \int_0^T (g(t,x(t),\dots,x^{(m-1)}(t)) + f(t))\, dt \right\rangle \gg 0 ,$$

donde ambas integrales no son simultáneamente nulas.

Esto es trivial, pues si para algún j, $1 \le j \le n$, $\min_t |x_j(t)| \ge r$, entonces $\min_t |x(t)| \ge r$.

3.- Se podrían obtener resultados similares suponiendo que g satisface las condiciones de Caratheodory ([34]) y tomando $Z = L^1([0,T],R^n)$.

Como iremos viendo en lo que sigue, el teorema II.4. unifica y generaliza muchos resultados debidos a diversos autores.

El siguiente teorema nos permite reducir el estudio de la hipótesis v) del teorema II.4. al estudio de otra hipótesis donde aparece el grado de Brouwer, más fácil de calcular en la práctica. Este teorema se puede demostrar utilizando el mismo método de demostración que el teorema anterior pero aplicando el teorema I.5. (ver [15]). Aquí vamos a obtenerlo del teorema anterior.

Teorema II.5. Supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis:

a) $\ker L = \{x \in \operatorname{dom} L : x$ es una aplicación constante $\}$.

b) Existen $a \in R^n$, $\alpha_i > 0$, $i = 1,\dots,m$, y una aplicación continua $\beta : R \to R$, tal que

$$|g(t,x_1,\dots,x_m)| \leq \langle a, g(t,x_1,\dots,x_m)\rangle + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i |x_i| + \beta(t)$$

para todo $(t,x_1,\dots,x_m) \in R\times(R^n)^m$.

c) Existe $r > 0$, tal que, para todo $x = (x_1,\dots,x_n) \in \operatorname{dom} L$, con $\min_t |x_j(t)| \geq r$, para algún j, $1 \leq j \leq n$, se tiene

$$\int_0^T (g(t,x(t),\dots,x^{(m-1)}(t)) + f(t))\, dt \neq 0$$

d) El grado de Brouwer $d_B(\phi_{\ker L}, B_X(s) \cap \ker L, 0) \neq 0$, para todo $s \geq r$, donde $\phi_{\ker L}$ está definida por

$$\phi_{\ker L} : R^n \to R^n,\ c \to \frac{1}{T}\int_0^T (g(s,c,0,\dots,0) + f(s))\, ds$$

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$, tal que si $\alpha = \max\{\alpha_i,\ i = 1,\dots,m\} \leq \alpha_0$, la ecuación (2.1) tiene al menos una solución T-periódica.

<u>Demostración</u>. Tomamos en el teorema II.4., la aplicación

$$\phi : X \to Z, \text{ donde } (\phi x)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T (g(s,x(s),\dots,x^{(m-1)}(s)) + f(s))\, ds$$

Entonces, trivialmente, y debido a la continuidad de g y f, ϕ es continua y aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados. Además

$$|(\phi x)(t)| \leq \frac{1}{T}\int_0^T |g(s,x(s),\dots,x^{(m-1)}(s))|\, ds + \frac{1}{T}\int_0^T |f(s)|\, ds$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T \langle a, g(s,x(s),\dots,x^{(m-1)}(s))\rangle\, ds + \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=1}^{m} \alpha_i |x^{(i-1)}(s)|\, ds +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_0^T \beta(s)\, ds + \frac{1}{T}\int_0^T |f(s)|\, ds$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T \langle a, g(s,x(s),\dots,x^{(m-1)}(s)) + f(s)\rangle\, ds + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|x^{(i-1)}\|_0 +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_0^T (\beta(s) + |f(s)| - \langle a, f(s)\rangle)\, ds =$$

$$= \langle a, (\phi x)(t)\rangle + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|x^{(i-1)}\|_0 + \gamma \text{ , donde}$$

$$\gamma = \frac{1}{T}\int_0^T (\beta(s) + |f(s)| - \langle a, f(s)\rangle)\, ds$$

Así pues, se verifica la condición iii) del teorema II.4, con $\alpha_i = \alpha_i'$, $i = 1,\dots,m$ y $\gamma(t) = \gamma$.

La hipótesis iv) del teorema II.4 es ahora

$$\left\langle \int_0^T \frac{1}{T}\int_0^T (g(s,x(s),\dots,x^{(m-1)}(s)) + f(s))\, ds\, dt, \int_0^T (g(s,x(s),\dots,x^{(m-1)}(s)) + f(s))\, ds \right\rangle =$$

$$\left\langle \int_0^T (g(s,x(s),\dots,x^{(m-1)}(s)) + f(s))\, ds, \int_0^T (g(s,x(s),\dots,x^{(m-1)}(s)) + f(s))\, ds \right\rangle > 0$$

y como ambas integrales no deben ser simultáneamente nulas, esta condición es la hipótesis c).

Por otra parte, tal como se hizo con N al comienzo del capítulo, Φ es L-compacta en subconjuntos acotados de X. Para ver que $L-\Phi \in C_L(B_X(s))$, para s suficientemente grande, consideremos la ecuación $Lx = \Phi x$. Es decir,

$$x^{(m)}+A_{m-1}x^{(m-1)}+\dots+A_1x' = \frac{1}{T}\int_0^T (g(s,x(s),\dots,x^{(m-1)}(s))+f(s))\,ds \qquad (2.7)$$

Integrando entre 0 y T ambos miembros de esta igualdad, se tendría que

$$\int_0^T (g(s,x(s),\dots,x^{(m-1)}(s))+f(s))\,ds = 0 ,$$

con lo cual $x \in \ker L$ y así x es constante. Por lo tanto, la ecuación (2.7) queda reducida a

$$\int_0^T (g(s,x,0,\dots,0) + f(s))\,ds = 0$$

Por consiguiente, por la hipótesis c), $|x_j| < r$, para todo j tal que $1 \leq j \leq n$ y así $|x| < r$. Con esto tenemos que las posibles soluciones periódicas de la ecuación (2.7) están acotadas a priori en X por r y por tanto $L-\Phi \in C_L(B_X(s))$ para $s \geq r$. Puesto que $\Phi(B_X(s)) \subset Z_1$, donde $Z_1 = \{z \in Z : z$ es una aplicación constante$\}$ y $Z = \operatorname{Im} L \oplus Z_1$, aplicando la proposición I.3. con $\Omega = B_X(s)$, tendríamos que $\Phi_{\ker L} \in C_0(B_X(s) \cap \ker L)$ y si $H = L-\Phi$

$$|D_L(H,B_X(s))| = |D_L[(L,\Phi),B_X(s)]| = |D_0(\Phi_{\ker L},B_X(s)\cap\ker L)| =$$

$$= |d_B(\Phi_{\ker L},B_X(s)\cap\ker L,0)| \neq 0 \quad , \text{por d).}$$

Por lo tanto, la condición v) del teorema II.4. se satisface y la demostración está acabada.

NOTAS.

1.- El teorema II.5. generaliza, para ecuaciones diferenciales ordinarias, el teorema 6.1. de Mawhin [56], pues la condición b) del teorema es más general que la condición (Q) impuesta por Mawhin. Se dice que g satisface la condición (Q) si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\gamma > 0$, tal que

$$|g(t,x_1,\dots,x_m)| \leq \varepsilon\,(|x_1| + \dots + |x_m|) + \gamma$$

para todo $(t,x_1,\dots,x_m) \in R\times(R^n)^m$.

En particular, si g es acotada o si

$$\lim_{|x_1|+\dots+|x_m|\to\infty} \frac{|g(t,x_1,\dots,x_m)|}{|x_1|+\dots+|x_m|} = 0$$

uniformemente en t, entonces g verifica la condición (Q).

La clase de aplicaciones que verifican la condición b) incluye aquellas que son de tipo exponencial (tomemos, por ejemplo, $a = 1$ en el caso escalar), que evidentemente no son de tipo (Q).

2.- Como dijimos al comenzar este teorema, es más fácil comprobar la hipótesis d) del teorema II.5., que la hipótesis v) del teorema II.4. En efecto, suponiendo que se verifica c), vamos a ver a continuación algunas condiciones bajo las cuales se cumple d).

1) Existen $r_1 > 0$ y una función $V : R^n \to R$, de clase C^1, con $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$ y $V'(x) \neq 0$ para $|x| \geq r_1$ tal que

$$\langle V'(x), \Phi_{\ker L}(x)\rangle > 0$$

para todo x con $|x| \geq r_1$. En efecto, el segmento $(1-\lambda)V'(x)+\lambda\Phi_{\ker L}(x)$ $\lambda \in [0,1]$, no contiene al origen para $|x| \geq r_2$, $r_2 = \max\{r,r_1\}$, pues para $\lambda = 0$, $V'(x) \neq 0$; para $\lambda = 1$, $\Phi_{\ker L}(x) \neq 0$ por la hipótesis c) y si existe $\lambda \in]0,1[$ tal que $(1-\lambda)V'(x) + \lambda\,\Phi_{\ker L}(x) = 0$, entonces

$$\Phi_{\ker L}(x) = \frac{-1+\lambda}{\lambda} V'(x) \quad \text{y por tanto}$$

$$< V'(x), \Phi_{\ker L}(x)> = < V'(x), -\frac{1-\lambda}{\lambda} V'(x)> \geqslant 0$$

Esto es absurdo, pues $V'(x) \neq 0$.

Así pues, por el teorema de Poincaré-Bohl (ver cap. I),

$$d_B(\Phi_{\ker L}(x), B_X(s)\cap \ker L, 0) = d_B(V'(x), B_X(s)\cap \ker L, 0)$$

y por el teorema de Krasnosels'kii, éste último término es distinto de cero si $s \geqslant r_2$.

2) La aplicación $\Phi_{\ker L}$ es impar. Esto es trivial, aplicando el teorema de Borsuk (ver cap. I).

3) Existe $r_1 > 0$, tal que si $\xi = \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$ y $x \in R^n$, entonces

$$< \xi x, \Phi_{\ker L} x > \geqslant 0$$

para todo x con $|x| \geqslant r_1$. La demostración se haría igual que en la nota 1), teniendo en cuenta el teorema de Poincaré-Bohl y la proposición II.17. de Mawhin [58] . (ver también Bates-Ward [3]).

A continuación vamos a obtener un corolario del teorema II.5. que es útil porque en él sólo aparecen tres hipótesis, que se verifican en bastantes situaciones.

Corolario II.6. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones :

1) Las hipótesis a) y b) del teorema II.5.

2) Existe una función $V : R^n \to R$, de clase C^1 con $\lim_{|x| \to \infty} V(x) = +\infty$ y $r > 0$ tal que

$$< \int_0^T V'(x(t))dt, \int_0^T (g(t,x(t),\ldots,x^{(m-1)}(t)) + f(t))\, dt > < 0$$

para todo $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{dom}\, L$, con $\min_t |x_j(t)| \geqslant r$ para algún j tal que $1 \leqslant j \leqslant n$.

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$, tal que si $\alpha = \max\{\alpha_i, i=1,\ldots,m\} \leqslant \alpha_0$, la ecuación (2.1) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. La hipótesis c) se sigue trivialmente de la hipótesis 2). Por otra parte, si $x = (x_1,\ldots,x_n)$ es una función constante con $|x_j| \geqslant r$ para algún j, $1 \leqslant j \leqslant n$, entonces la hipótesis 2) quedaría

$$< \int_0^T V'(x)dt, \int_0^T (g(t,x,0,\ldots,0) + f(t))\, dt > < 0$$

con lo cual, la hipótesis d) se sigue del apartado 1) de la nota 2.- del teorema anterior.

II.3. El caso escalar.

En el caso escalar ($n = 1$), los resultados obtenidos en el apartado anterior se pueden concretar más, y por tanto, se pueden obtener unas condiciones sobre g y f más fáciles de comprobar en la práctica. Comenzamos con una proposición que nos permite pasar de un cierto grado de coincidencia al grado de Brouwer.

Proposición II.7. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

1) $\ker L = \{ x \in \mathrm{dom}\, L : x$ es una aplicación constante $\}$

2) Existen $V : R \to R$ de clase C^1, $a \in R$, $\alpha \geqslant 0$ y $\beta \geqslant 0$ tal que

$$|V'(x)| \leqslant aV'(x) + \alpha|x| + \beta$$

para todo $x \in R$.

3) Existe $r > 0$ tal que para todo $x \in \mathrm{dom}\, L$, con $\min_t |x(t)| \geqslant r$, se tiene

$$\int_0^T V'(x(t))\,dt \neq 0$$

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$ y $r_1 > 0$ tal que si $\alpha \leq \alpha_0$ y $s \geq r_1$,

$$|D_L[(L,G),B_X(s)]| = |d_B(V',B_X(s) \cap \ker L,0)|$$

donde $G : X \to Z$, $(Gx)(t) = V'(x(t))$ para toda $x \in X$ y $t \in R$.

Demostración. Consideremos la aplicación

$$F : \operatorname{dom} L \times [0,1] \to Z,\ (x,\lambda) \to Lx - \lambda Gx - (1-\lambda)QGx .$$

Debido a que V' es continua, G es continua y aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados. Así pues, la aplicación

$$N : X \times [0,1] \to Z,\quad (x,\lambda) \to \lambda Gx + (1-\lambda)QGx$$

es L-compacta en subconjuntos acotados de $X \times [0,1]$.

Por otra parte, si $x \in \operatorname{dom} L$ es una solución de la familia de ecuaciones

$$Lx = \lambda Gx + (1-\lambda)QGx \qquad \lambda \in [0,1] \tag{2.8}$$

entonces

$$x^{(m)}(t) + A_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \ldots + A_1x'(t) = \lambda V'(x(t)) + (1-\lambda)\frac{1}{T}\int_0^T V'(x(t))\,dt$$

Integrando entre 0 y T ambos miembros de la ecuación anterior, tendremos

$$\int_0^T V'(x(t))\,dt = 0$$

y así, x cumple la ecuación

$$x^{(m)}(t) + A_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \ldots + A_1x'(t) = \lambda V'(x(t)) \tag{2.9}$$

Sea $b : R \to R$ definido por $b(t) = \lambda V'(x(t))$. Entonces, la ecuación (2.9) es equivalente, tal como hicimos en el teorema II.4, a una ecuación del tipo

$$Y' = AY + B(t)$$

Procediendo como en la demostración de dicho teorema, tendríamos que existe $k_1 > 0$ (independiente de λ y de x), tal que

$$\max_{t \in [0,T]} |Y(t)| \leq k_1 \int_0^T |b(t)|\,dt = k_1\lambda \int_0^T |V'(x(t))|\,dt$$

Ahora, teniendo en cuenta la hipótesis 2),

$$\max_{t \in [0,T]} |Y(t)| \leq k_1\lambda \int_0^T (aV'(x(t)) + \alpha|x(t)| + \beta)\,dt$$

y como $\int_0^T V'(x(t))\,dt = 0$, $\max_{t \in [0,T]} |Y(t)| \leq k_1\lambda(\alpha T \|x\|_0 + \beta T)$

$\leq k_1\alpha T \|x\|_0 + k_2 \leq k_1\alpha T \|x\|_{m-1} + k_2$

donde $k_2 > k_1\lambda\beta T, \lambda \in [0,1]$. Por lo tanto,

$$\|x^{(i)}\|_0 \leq k_1\alpha T \|x\|_{m-1} + k_2,\ i = 1,\ldots,m-1 . \tag{2.10}$$

Ahora bién, si $x \in \operatorname{dom} L$ es una solución de (2.8), entonces, teniendo en cuenta la hipótesis 3), se deduce, igual que se hizo en el teorema II.4. que existe $t_0 \in [0,T]$ tal que $|x(t_0)| < r$. Como

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds$$

$$|x(t)| \leq r + \int_0^T |x'(s)|\, ds \leq r + \int_0^T (k_1 \alpha\, T \|x\|_{m-1} + k_2)\, dt$$

$\leq r + k_1 \alpha T^2 \|x\|_{m-1} + k_2 T$. O sea, $\|x\|_0 \leq r + k_1 \alpha T^2 \|x\|_{m-1} + k_2 T$. Esto, juntamente con (2.10) daría la existencia de cotas a priori para x. Si r_2 es dicha cota, sea $r_1 > \text{máx}\{r, r_1\}$ y $\Omega = B_X(s)$, $s \geq r_1$; entonces $0 \notin F((\text{dom } L \cap \partial\Omega) \times [0,1])$ y por la propiedad de invarianza por homotopía tendremos que

$$D_L[(L,G), B_X(s)] = D_L(F(\cdot,1),\Omega) = D_L(F(\cdot,0),\Omega) = D_L(L - QG,\Omega)$$

Pero $QG \subset Z_1 = R$ y $Z = \text{Im } L \oplus R$. Por lo tanto, por la proposición I.3.,

$$|D_L(L-QG,\Omega)| = |d_B(-QG_{\ker L}, \Omega \cap \ker L, 0)| = |d_B(V', \Omega \cap \ker L, 0)|$$

como se quería demostrar.

La anterior proposición, junto con el teorema II.4. nos permiten demostrar el siguiente teorema, que se puede considerar como un paso intermedio para llegar a condiciones del tipo Landesman-Lazer.

Teorema II.8. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

i) $\ker L = \{x \in \text{dom } L : x$ es una aplicación constante $\}$

ii) Existen $a \in R$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,\dots,m$, y una función continua $\beta : R \to R$, tal que

$$|g(t,x_1,\dots,x_m)| \leq a g(t,x_1,\dots,x_m) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i |x_i| + \beta(t)$$

para todo $(t,x_1,\dots,x_m) \in R \times R^m$.

iii) Existe una función $V : R \to R$ de clase C^1 tal que $\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = \infty$ y $\alpha' \geq 0$, $\beta \geq 0$, tal que

$$|V'(x)| \leq a V'(x) + \alpha' |x| + \beta$$

para todo $x \in R$.

iv) Existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in \text{dom } L$ con $\min_t |x(t)| \geq r$, se tiene

$$\int_0^T V'(x(t))\, dt \neq 0 \qquad \text{y}$$

$$\int_0^T V'(x(t))\, dt \cdot \int_0^T (g(t,x(t),\dots,x^{(m-1)}(t)) + f(t))\, dt \geq 0$$

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$ tal que si $\alpha = \text{máx}\{\alpha', \alpha_i, i=1,\dots,m\} \leq \alpha_0$, la ecuación (2.1) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Tomemos $\phi : X \to Z$, $(\phi x)(t) = V'(x(t))$ en el teorema II.4. Debido a la continuidad de V', ϕ es continua y transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Además, si $x \in X$, entonces, por iii),

$$|(\phi x)(t)| = |V'(x(t))| \leq a V'(x(t)) + \alpha' |x(t)| + \beta$$

$$\leq a(\phi x)(t) + \alpha' \|x\|_0 + \beta.$$

Luego se verifica la hipótesis iii) del teorema II.4., tomando $\alpha_1' = \alpha'$, $\alpha_i' = 0$, $i = 2,\dots,m$, $\gamma(t) = \beta$.

La hipótesis iv) del teorema II.8. es la misma que la hipótesis iv) del teorema II.4. Por último, por la proposición II.7.

$$|D_L[(L,\phi), B_X(s)]| = |d_B(V', B_X(s) \cap \ker L, 0)|$$

que es distinto de cero por el teorema de Krasnosel'skii.

Así pues, se verifican todas las hipótesis del teorema II.4. y por tanto, se sigue la conclusión del teorema II.8.

En el siguiente corolario, damos una condición asintótica muy fácil de comprobar en la práctica.

Corolario II.9. Supongamos que :

a) Se cumplen las condiciones i) y ii) del teorema II.8., con $a = 1$.

b) Existe $r > 0$ tal que

$$\operatorname{sign} x(t) \int_0^T (g(t,x(t),\ldots,x^{(m-1)}(t)) + f(t))\, dt \geq 0$$

para todo $x \in \operatorname{dom} L$ con $\min_t |x(t)| \geq r$.

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$ tal que si $\alpha = \max\{\alpha_i : i = 1,\ldots,m\} \leq \alpha_0$, la ecuación (2.1) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Sea $\varepsilon \in R^+$ y tomemos $V(x) = \frac{\varepsilon x^2}{2}$ en el teorema anterior. Entonces $V'(x) = \varepsilon x$ y si $\alpha' > 2\varepsilon$, se tiene que $|\varepsilon x| \leq \varepsilon x + \alpha' |x| + \beta$. Además, si $x \in \operatorname{dom} L$ y $\min_t |x(t)| \geq r > 0$, entonces trivialmente

$$\int_0^T \varepsilon x(t)\, dt \neq 0$$

pues x debe tener signo constante, y la condición iv) quedaría

$$\int_0^T \varepsilon x(t)dt \cdot \int_0^T (g(t,x(t),\ldots,x^{(m-1)}(t)) + f(t))\, dt \geq 0$$

que evidentemente es la misma que b).

Tomando $2\varepsilon < \alpha_0$ en el teorema II.8, tendremos el corolario demostrado.

El corolario II.9. generaliza para ecuaciones diferenciales ordinarias el teorema 8.1. en Mawhin [56], el cual consideró términos no lineales de tipo (Q). Por lo tanto, el corolario II.9. generaliza los resultados de Villari [78] y Lazer [50].

Vamos a demostrar a continuación una consecuencia del corolario II.9. Para ello, sea $f(t) = -h(t)$, y supongamos que existen constantes $\delta+$ y $\delta-$ tales que

$g(t,x_1,\ldots,x_m) \geq \delta+$ para $x_1 \geq 0$, $g(t,x_1,\ldots,x_m) \leq \delta-$ para $x_1 \leq 0$.

Consideremos las funciones $\mu^{\pm} : R \to R \cup \{-\infty,+\infty\}$ definidas por

$$\mu+(t) = \liminf_{x_1 \to +\infty} g(t,x_1,\ldots,x_m)$$

$$\mu-(t) = \limsup_{x_1 \to -\infty} g(t,x_1,\ldots,x_m)$$

uniformemente en $x_2,\ldots,x_m$.

Corolario II.10. Supongamos que se cumplen :

i) $\ker L = \{x \in \operatorname{dom} L : x$ es una aplicación constante $\}$

ii) Existen $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,m$, $\beta \geq 0$, tales que

$$|g(t,x_1,\ldots,x_m)| \leq g(t,x_1,\ldots,x_m) + \sum_{i=1}^m \alpha_i |x_i| + \beta$$

para todo $(t,x_1,\ldots,x_m) \in R\times R^m$.

iii)

$$\int_0^T \mu-(t)\, dt < \int_0^T h(t)\, dt < \int_0^T \mu+(t)\, dt$$

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$, tal que si $\alpha = \max\{\alpha_i, i=1,\ldots,m\} \leq \alpha_0$, la ecuación (2.1) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Veamos que la hipótesis iii) implica la hipótesis b) del corolario II.9. En efecto, si no fuese así, para todo $n \in N$, debe existir $x_n \in \operatorname{dom} L$, con $\min_t |x_n(t)| \geq n$ y

$$\operatorname{sign} x_n(t) \int_0^T (g(t,x_n(t),\ldots,x_n^{(m-1)}(t)) - h(t))\, dt < 0$$

Como $\min |x_n(t)| \geq n$, x_n debe tener signo constante, y por lo tanto, existe una subsucesión de (x_n), a la que seguimos llamando (x_n) con signo o bién positivo o bién negativo. Supongamos que estamos en el primer caso. Entonces,

$$\int_0^T (g(t,x_n(t),\ldots,x_n^{(m-1)}(t)) - h(t))\, dt < 0$$

y así

$$\int_0^T h(t)\, dt > \int_0^T g(t,x_n(t),\ldots,x_n^{(m-1)}(t))\, dt$$

Aplicando el lema de Fatou, tendremos que (ver [77])

$$\int_0^T h(t)\, dt \geq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^T g(t,x_n(t),\ldots,x_n^{(m-1)}(t))\, dt$$

$$\geq \int_0^T \liminf_{n\to+\infty} g(t,x_n(t),\ldots,x_n^{(m-1)}(t))\, dt$$

$$\geq \int_0^T \liminf_{x_1\to+\infty} g(t,x_1,\ldots,x_m)\, dt = \int_0^T \mu_+(t)\, dt$$

lo cual contradice iii). Si el signo de (x_n) fuese negativo, el razonamiento sería idéntico, teniendo en cuenta, por supuesto, la otra desigualdad de iii).

NOTAS.

1.- El corolario II.10., ha sido probado por Ward [80] , de una forma diferente.

2.- Observemos que si g es no negativa, la hipótesis ii) no es restrictiva.

3.- Este corolario es cierto si la hipótesis ii) se sustituye por

$$|g(t,x_1,\ldots,x_m)| \leq - g(t,x_1,\ldots,x_m) + \sum_{i=1}^m \alpha_i |x_i| + \beta .$$

(Basta tomar $a = -1$ en el teorema II.8.).

4.- Las condiciones asintóticas del tipo iii) son condiciones del tipo Landesman-Lazer, en honor al trabajo pionero de estos autores, los

cuales tomaron condiciones de este tipo en el estudio de existencia de soluciones para problemas de contorno en ecuaciones en derivadas parciales elípticas (ver [49]).

II.4. Ejemplos.

1.- Consideremos la ecuación diferencial ordinaria escalar de segundo orden

$$x'' + cx' = xe^x + \text{sen } t \qquad (2.11)$$

donde c es un número real cualquiera. En este caso,

$$g : R\times R \to R,\ (t,x) \to xe^x$$
$$f : R \to R,\ t \to \text{sen}t$$

Entonces, $X = \{ x : R \to R : x$ es de clase C^1 y 2π -periódica $\}$

$\text{dom } L = \{ x \in X : x$ es de clase $C^2\}$

$Z = \{ z : R \to R : z$ es continua y 2π -periódica $\}$

$L : \text{dom } L \subset X \to Z,\ x \to x'' + cx'$

$N : X \to Z,\ (Nx)(t) = x(t)e^{x(t)} + \text{sent}$

Es trivial que $\ker L$ está formado por las aplicaciones constantes de X y que N es L-compacta en subconjuntos acotados de X. Además, si $x > 0$, entonces

$$|g(x)| = |xe^x| \leq xe^x + \alpha |x| + \beta$$

para cualquier α y β positivos, y si x es negativo, entonces, la función xe^x está acotada; sea β una cota positiva de la función $|xe^x| - xe^x$ cuando x es negativo. Tomando α cualquier número positivo menor que α_0, tendremos que

$$|g(x)| \leq g(x) + \alpha |x| + \beta \qquad \text{para todo } x \in R.$$

Además, si $x \in \mathrm{dom}\, L$ tal que $\min_t |x(t)| \geq r > 0$, entonces x debe tener signo constante, y por lo tanto es trivial que

$$\mathrm{sign}\, x(t) \int_0^{2\pi} (x(t)e^{x(t)} + \mathrm{sen}\, t)dt \geq 0$$

Por lo tanto, se cumplen todas las hipótesis del corolario II.9., y la ecuación (2.11) tiene al menos una solución 2π-periódica.

Es evidente que la función $g(x)$ no satisgace la condición (Q), pues $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$. Por lo tanto, la ecuación (2.11) no se puede estudiar a partir de los resultados de Mawhin (ver [56]).

Además,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\, t \, dt = 0 \quad y \; \mu_-(t) = \limsup_{x \to -\infty} g(x) = 0.$$

Luego tampoco se puede aplicar el teorema de Ward [80] para probar la existencia de soluciones 2π-periódicas de (2.11).

El ejemplo (2.11) ha sido estudiado también por Bebernes y Martelli [4]. Sin embargo, el método empleado por nosotros es distinto.

2.- Sea la ecuación diferencial ordinaria vectorial

$$x_1^{(m)} = x_1 e^{x_1} + \varepsilon x_2' + f_1(t)$$

$$x_2^{(m)} = x_2 e^{-x_1^2 - x_2^2} \mathrm{sen}^2 t + f_2(t)$$

donde $m \geq 1$, y $f_1, f_2 : R \to R$, continuas, 2π-periódicas y tales que

$$\int_0^{2\pi} f_1(t)\, dt = \int_0^{2\pi} f_2(t)\, dt = 0 .$$

En este caso,

$$g : R \times (R^2)^2 \to R^2, (t, x_1, x_2, x_1', x_2') \to \begin{pmatrix} x_1 e^{x_1} + \varepsilon x_2' \\ x_2 e^{-x_1^2 - x_2^2} \mathrm{sen}^2 t \end{pmatrix}$$

es continua y 2π-periódica en t.

Además, $X = \{x : R \to R^2 : x$ es de clase C^{m-1} y 2π-periódica $\}$

$\mathrm{dom}\, L = \{x \in X : x$ es de clase $C^m \}$

$Z = \{z : R \to R^2 : z$ es continua y 2π-periódica $\}$

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, entonces

$$L : \mathrm{dom}\, L \to Z, \; x \to \begin{pmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \end{pmatrix}$$

$$N : X \to Z, \; (Nx)(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) e^{x_1(t)} + \varepsilon x_2'(t) + f_1(t) \\ x_2(t) e^{-x_1^2(t) - x_2^2(t)} \mathrm{sen}^2 t + f_2(t) \end{pmatrix}$$

Es trivial que $\ker L$ está formado por las aplicaciones constantes de X y que N es L-compacta en subconjuntos acotados de X.

Vamos a ver que se verifican todas las condiciones del teorema II.5.

En efecto, si g_1 y g_2 son las componentes de g, se tiene

$$|g_1(t,x_1,x_2,x_1',x_2')| \leq |x_1| e^{x_1} + \varepsilon |x_2'| \leq x_1 e^{x_1} + \varepsilon x_2' + 2\varepsilon (|x_1'| + |x_2'|) + \beta_1$$

$$= g_1(t,x_1,x_2,x_1',x_2') + 2\varepsilon (|x_1'| + |x_2'|) + \beta_1$$

donde β_1 es una cota de la función $-2x_1 e^{x_1}$ para $x_1 < 0$. También,

$$|g_2(t,x_1,x_2,x_1',x_2')| \leq |x_2| e^{-x_1^2 - x_2^2} \mathrm{sen}^2 t \leq \beta_2 \mathrm{sen}^2 t ,$$

donde $\beta_2 > 0$ es una cota de la función $|x_2| e^{-x_1^2 - x_2^2}$.

Así pues, teniendo en cuenta la nota 1. del teorema II.4., g verifica la condición b) del teorema II.5. con $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $\alpha = \max\{\alpha_i, i = 1, \ldots, m\} = 2\varepsilon$.

Para comprobar la hipótesis c), sea $x \in \mathrm{dom}\, L$, con $\min_t |x_j(t)| \geq r > 0$, para algún j, $1 \leq j \leq 2$. Entonces, si $j = 1$, $\min_t |x_1(t)| \geq r > 0$, y por lo tanto, x_1 debe tener signo constante. Luego

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi}(f_1(t) + x_1(t)e^{x_1(t)} + \varepsilon x_2'(t))\,dt = \int_0^{2\pi} x_1(t)e^{x_1(t)}\,dt \neq 0,$$

y se cumpliría c). Igual se haría si $j = 2$.

Por último, observemos que

$$\phi_{\ker L}: R^2 \to R^2, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{col}\left(\int_0^{2\pi}(f_1(t)+a_1e^{a_1})dt, \int_0^{2\pi}(f_2(t)+a_2e^{-a_1^2-a_2^2})dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{col}(2\pi a_1e^{a_1}, 2\pi a_2e^{-a_1^2-a_2^2}) = \mathrm{col}\,(a_1e^{a_1}, a_2e^{-a_1^2-a_2^2}).$$

Sea $V : R^2 \to R, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2)$, entonces, $V'\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ y

$$< V'\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \phi_{\ker L}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} > = a_1^2e^{a_1} + a_2^2\,e^{-a_1^2-a_2^2} \geq 0$$

Así pues, por el teorema de Poincaré-Bohl y el teorema de Krasnosels'kii, se cumpliría también d).

Tomando $\alpha = 2\varepsilon \leq \alpha_0$, se cumplirían todas las condiciones del teorema II.5. y por lo tanto, la ecuación (2.12) tiene al menos una solución 2π-periódica.

La aplicación g no verifica la condición de tipo (Q), pues $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} \frac{g_1(x)}{x_1} = +\infty$. Así pues, para estudiar la ecuación (2.12), no se puede aplicar el teorema 6.1. de Mawhin[56] .

Capítulo III

TEOREMAS DE EXISTENCIA PARA ALGUNAS ECUACIONES DE OPERADORES NO LINEALES EN ESPACIOS NORMADOS

III.1. Teoremas de existencia.

Sean X y Z espacios normados reales y $L : \mathrm{dom}\, L \subset X \to Z$ una aplicación lineal de Fredholm de índice cero. Sabemos (ver cap. I), que existen proyecciones continuas $P : X \to X$, $Q : Z \to Z$ tales que $\mathrm{Im}\, P = \ker L$, $\mathrm{Im}\, L = \ker Q$ y que la aplicación $L_P : \mathrm{dom}\, L \cap \ker P \to \mathrm{Im}\, L$ es biyectiva. Notemos por $K_P : \mathrm{Im}\, L \to \mathrm{dom}\, L \cap \ker P$, su inversa.

Sea $N : X \to Z$ una aplicación (no necesariamente lineal), L-compacta en subconjuntos acotados de X. Notemos por $|\cdot|$ las normas tanto en X como en Z. Referente a la existencia de soluciones de la ecuación

$$Lx = Nx \qquad (3.1)$$

tenemos el siguiente teorema

Teorema III.1. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

1) Existen un funcional lineal $\gamma_1 : Z \to R$ y constantes $k \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ tales que

$$|K_P(I - Q)Nx| \leq k\,\gamma_1(Nx) + \alpha_1\,|x| + \beta_1 \qquad (3.2)$$

para todo $x \in X$.

2) Existen una aplicación continua $\Phi : X \to Z$, L-compacta en subconjuntos acotados de X; un funcional $\gamma_2 : Z \to R$ y cons

tantes $\alpha_2 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0$ tales que

$$|K_p(I - Q)\phi x| \leqslant k\,\gamma_2(\phi x) + \alpha_2 |x| + \beta_2 \qquad (3.3)$$

para todo $x \in X$.

3) Toda solución x de la familia de ecuaciones

$$\lambda QNx + (1-\lambda)Q\phi x = 0, \ \lambda \in \,]0,1[$$

satisface las relaciones

$$\text{i) } \lambda\,\gamma_1(Nx) + (1-\lambda)\,\gamma_2(\phi x) = 0 \qquad (3.4)$$

$$\text{ii) } |Px| < \mu\,|(I-P)x| + r \qquad (3.5)$$

para algún $r>0$ y $\mu \geqslant 0$, independientes de x y λ.

4) $L - \phi \in C_L(B_X(s))$ y $D_L[(L,\phi),B_X(s)] \neq 0$ para todo $s \geqslant r$.

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$ tal que si $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant \alpha_0$, la ecuación (3.1) tiene al menos una solución.

Demostración. Vamos a demostrar que se verifican todas las condiciones del teorema I.4., para un cierto subconjunto Ω de X. Para ello, si $F = L - N$ y $H = L - \phi$, consideremos la familia de ecuaciones

$$\lambda Fx + (1-\lambda)Hx = Lx - \lambda Nx - (1-\lambda)\phi x = 0, \lambda \in \,]0,1[\qquad (3.6)$$

y sea x una solución de ella. Aplicando Q a ambos miembros de (3.6) y teniendo en cuenta que $\operatorname{Im} L = \ker Q$, tendremos

$$\lambda QNx + (1-\lambda)Q\phi x = 0 \qquad (3.7)$$

También, aplicando $K_p(I - Q)$ a ambos miembros de (3.6), y teniendo en cuenta que $K_pL = I - P$, tendremos

$$x - Px = K_p(I - Q)(\lambda Nx + (1-\lambda)\phi x) \qquad (3.8)$$

Recíprocamente si x satisface (3.7) y (3.8) para algún $\lambda \in \,]0,1[$, entonces $x - Px = K_p(\lambda Nx + (1-\lambda)\phi x)$ y aplicando L a ambos miembros de esta ecuación y teniendo en cuenta que $\operatorname{Im} P = \ker L$ y que $LK_p = I$, se tiene $Lx = \lambda Nx + (1-\lambda)\phi x$.

Así pues, (3.6) es equivalente al sistema (3.7) y (3.8). (Las ecuaciones (3.7) y (3.8) se conocen con el nombre de ecuación de bifurcación y auxiliar respectivamente).

A partir de (3.8), se tiene

$$|x - Px| \leqslant |K_p(I - Q)(\lambda Nx + (1-\lambda)\phi x| \leqslant \lambda\,|K_p(I - Q)Nx| +$$
$$+ (1-\lambda)\,|K_p(I - Q)\phi x| .$$ Luego, por la hipótesis 1) y 2),

$$|x - Px| \leqslant \lambda(k\,\gamma_1(Nx) + \alpha_1 |x| + \beta_1) + (1-\lambda)(k\,\gamma_2(\phi x) + \alpha_2 |x| + \beta_2) =$$
$$= k(\lambda\,\gamma_1(Nx) + (1-\lambda)\,\gamma_2(\phi x)) + \alpha|x| + \beta ,$$

donde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ y $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Pero, por la hipótesis 3), y por cumplir x (3.7), $\lambda\,\gamma_1(Nx) + (1-\lambda)\,\gamma_2(\phi x) = 0$. Luego $|x - Px| \leqslant \alpha|x| + \beta$. Ahora bién, $|x| \leqslant |Px| + |(I - P)x|$. Luego, por la relación anterior y por la hipótesis 3),

$$|x| \leqslant \mu|(I - P)x| + r + |(I - P)x| \leqslant (\mu+1)(\alpha|x| + \beta) + r =$$
$$= (\mu + 1)\alpha|x| + r_1, \text{ donde } r_1 = (\mu+1)\beta + r.$$

Así pues, si tomamos como α_0 cualquier número real positivo tal que $\alpha_0 < \frac{1}{1+\mu}$, se tiene que si $\alpha \leqslant \alpha_0$, entonces $|x|(1 - \alpha(1+\mu)) \leqslant r_1$, es decir,

$$|x| \leqslant \frac{r_1}{1 - \alpha(1+\mu)}$$

Tomando $r_2 > \dfrac{r_1}{1-\alpha(1+\mu)}$, y $\Omega = B_X(r_2)$, se cumplirán todas las hipótesis del teorema I.4.

NOTA.

Dos condiciones suficientes para la L-compacidad de N y ϕ en subconjuntos acotados de X son las siguientes

a) K_p es continua y $N, \phi : X \to Z$ son compactas.

b) K_p es compacta y $N, \phi : X \to Z$ son continuas y aplicando subconjuntos acotados de X en subconjuntos acotados de Z.

En efecto, supongamos que estamos en el caso a); entonces si Ω es un subconjunto acotado de X, $N : \Omega \to Z$ es compacta y como $Q : Z \to Z$, y $K_p(I - Q) : Z \to X$ son continuas, $QN : \Omega \to Z$ y $K_p(I - Q)N : \Omega \to X$ son compactas. Igual se haría para ϕ.

Para el caso b), si Ω es un subconjunto acotado de X, $N : \Omega \to Z$, es continua y acotada. Como $Q : Z \to Z$ y $K_p(I - Q) : Z \to X$ son compactas (Q tiene una imagen de dimensión finita), $QN : \Omega \to Z$ y $K_p(I - Q)N : \Omega \to X$ serían compactas. Lo mismo para ϕ.

El siguiente teorema se puede demostrar siguiendo el mismo método de demostración que el anterior y utilizando el teorema I.4., pero nosotros vamos a obtenerlo como un caso particular del teorema anterior.

Teorema III.2. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

a) K_p es continua y N, ϕ son L-compactas en subconjuntos acotados de X.

b) Existen un funcional lineal $\gamma : Z \to R$ con $\operatorname{Im} L \subset \ker \gamma$ y constantes $\alpha_3 \geq 0$, $\beta_3 \geq 0$, tales que

$$|Nx| \leq \gamma(Nx) + \alpha_3 |x| + \beta_3 \tag{3.9}$$

para todo $x \in X$.

c) Existen constantes $\alpha_4 \geq 0$ y $\beta_4 \geq 0$ tales que

$$|\phi x| \leq \gamma(\phi x) + \alpha_4 |x| + \beta_4$$

para todo $x \in X$.

d) Toda solución x de la familia de ecuaciones

$$\lambda QNx + (1-\lambda)Q\phi x = 0 \qquad \lambda \in]0,1[$$ cumple la relación

$$|Px| < \mu |(I - P)x| + r$$

para algún $r > 0$ y $\mu \geq 0$, independientes de x y de λ.

e) $L - \phi \in C_L(B_X(s))$ y $D_L[(L,\phi), B_X(s)] \neq 0$ para todo $s \geq r$.

Entonces existe $\alpha_0 > 0$ tal que si $\alpha_3 + \alpha_4 \leq \alpha_0$, la ecuación (3.1) tiene al menos una solución.

Demostración. Tomemos $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ en el teorema anterior. Entonces, si k es tal que $|K_p(I - Q)z| \leq k|z|$ para todo $z \in Z$, tendremos, teniendo en cuenta b) y c),

$$|K_p(I - Q)Nx| \leq k|Nx| \leq k\,\gamma(Nx) + k\alpha_3 |x| + k\beta_3.$$

Análogamente,

$$|K_p(I - Q)\phi x| \leq k|\phi x| \leq k\,\gamma(\phi x) + k\alpha_4 |x| + k\beta_4.$$

Por otra parte, si x es una solución de la ecuación $\lambda QNx + (1-\lambda)Q\phi x = Q(\lambda Nx + (1-\lambda)\phi x) = 0$, entonces $\lambda Nx + (1-\lambda)\phi x \in \ker Q = \operatorname{Im} L \subset \ker\gamma$; luego $\gamma(\lambda Nx + (1-\lambda)\phi x) = \lambda\gamma(Nx) + (1-\lambda)\gamma(\phi x) = 0$ y por tanto se cumple la relación (3.4).

Así pues, si $\alpha_1 = k\alpha_3$, $\beta_1 = k\beta_3$, $\alpha_2 = k\alpha_4$, $\beta_2 = k\beta_4$, se cumplen todas las hipótesis del teorema III.1 y por tanto se sigue la conclusión del teorema III.2, con el mismo α_0.

NOTA.

Si γ es continuo con norma menor que uno, entonces N y Φ aplican conjuntos acotados en conjuntos acotados. En efecto , esto es trivial, pues si $|\gamma|$ es la norma de γ , entonces $|Nx| \leq |\gamma||Nx| + \alpha_3 |x| + \beta_3$ y entonces

$$|Nx| \leq \frac{\alpha_3}{1 - |\gamma|} |x| + \frac{\beta_3}{1 - |\gamma|}$$

El siguiente teorema se puede demostrar utilizando el mismo método de demostración que en el teorema III.1. y utilizando el teorema I.5. Sin embargo, vamos a deducirlo a partir del teorema III.1.

Teorema III.3. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones :

i) K_p es continua y N es L-compacta en subconjuntos acotados de X.

ii) Existe un funcional lineal $\gamma: Z \to R$ con $\mathrm{Im}\, L \subset \ker \gamma$ y constantes $\alpha_5 \geq 0$, $\beta_5 \geq 0$, tales que

$$|Nx| \leq \gamma(Nx) + \alpha_5 |x| + \beta_5. \tag{3.10}$$

para todo $x \in X$.

iii) Si x es una solución de la ecuación $QNx = 0$, entonces x satisface la relación

$$|Px| < \mu |(I - P)x| + r \tag{3.11}$$

para algún $r > 0$, $\mu \geq 0$ independientes de x.

iv) $d_B(QN_{\ker L}, B_X(s) \cap \ker L, 0) \neq 0$ para todo $s \geq r$.

Entonces existe $\alpha_0 > 0$ tal que si $\alpha_5 \leq \alpha_0$, la ecuación (3.1) tiene al menos una solución.

Demostración. Tomemos en el teorema III.1., $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = 0$, $\Phi = QN$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. Entonces,

$$|K_p(I - Q)Nx| \leq k\, \gamma(Nx) + k\, \alpha_5 |x| + k\, \beta_5 \quad \text{, que es (3.2).}$$

Por otra parte, al ser Q compacta y N verificando i), $\Phi = QN$ es L-compacta en subconjuntos acotados de X y

$|K_p(I - Q)\Phi x| = |K_p(I - Q)QNx| = 0$, que es (3.3) con $\gamma_2 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$. También, teniendo en cuenta que $Q^2 = Q$, la ecuación $\lambda QNx + (1 - \lambda)Q\Phi x = 0$ es ahora $QNx = 0$. Luego si $QNx = 0$, $Nx \in \ker Q = \mathrm{Im}\, L \subset \ker \gamma$. Así $\gamma(Nx) = 0$, que es ahora la relación (3.4).

Queda pues sólo por ver que se verifica la hipótesis 4) del teorema III.1. Para ver que $L - \Phi \in C_L(B_X(s))$, consideremos la ecuación

$$Lx = \Phi x \tag{3.9}$$

Tal como hicimos en la demostración del teorema III.1., la ecuación (3.9) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$Q\Phi x = 0$$
$$x - Px = K_p(I - Q)\Phi x$$

Teniendo en cuenta que $\Phi = QN$, quedaría $QNx = 0$, $x = Px$; es decir, $QNx = 0$ y $x \in \ker L$. Si $x \in \ker L$ y $QNx = 0$, por iii), y teniendo en cuenta que $(I - P)x = 0$, tenemos que $|x| < r$. Luego, si $|x| \geq r$, $Lx \neq \Phi x$ y por tanto, como Φ es L-compacta en subconjuntos acotados de X, $L - \Phi \in C_L(B_X(s))$. Además, como $\mathrm{Im}\, Q$ es de dimensión finita y $Z = \mathrm{Im}\, L \oplus \mathrm{Im}\, Q$, teniendo en cuenta la proposición I.3., con $\Omega = B_X(s)$,

$$|D_L[(L, \Phi), B_X(s)]| = |d_B(\Phi_{\ker L}, B_X(s) \cap \ker L, 0)| =$$
$$= |d_B(QN_{\ker L}, B_X(s) \cap \ker L, 0)| \neq 0 \quad \text{por iv).}$$

Así pues, la demostración del teorema III.3. está completa.

NOTA.

El teorema III.3. generaliza el teorema 4.1 en Mawhin [55], ya que él consideró términos no lineales N cuasiacotados. Una aplicación $N : X \to Z$ se dice cuasiacotada si el número

$$\inf_{0<\rho<+\infty} \{ \sup_{|x|\geq \rho} \frac{|Nx|}{|x|} \}$$

es finito. En este caso, dicho número se llama la cuasinorma de N y se representa por $|N|$.

La relación que existe entre el concepto de cuasiacotación y la condición ii) del teorema III.3, viene dada por la siguiente proposición

Proposición III.4. Sea $N : X \to Z$ cuasiacotada y aplicando conjuntos acotados en conjuntos acotados. Entonces N verifica la condición ii) del teorema III.3 con $\gamma = 0$.

Demostración. Sea $|N|$ la cuasinorma de N. Entonces si $\varepsilon \in R^+$, debe existir ρ tal que $0 < \rho < +\infty$ y

$$\sup_{|x|\geq \rho} \frac{|Nx|}{|x|} < |N| + \varepsilon .$$

Luego $|N(x)| \leq (|N| + \varepsilon)|x|$ para todo x con $|x|\geq \rho$. Ahora bién, como N aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados existe $\beta>0$, tal que $|N(x)| \leq \beta$ para todo $x \in B_X(\rho)$. Luego $|N(x)| \leq (|N| + \varepsilon)|x| + \beta$ para todo $x \in X$, que es (3.10) con $\alpha_5 = |N| + \varepsilon$, $\gamma = 0$, $\beta_5 = \beta$.

Es trivial que si existen constantes $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ tales que $|Nx| \leq \alpha|x| + \beta$, para todo $x \in X$, entonces N es cuasiacotada y $|N| \leq \alpha$; también, si N es asintótica a cero, es decir,

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{|N(x)|}{|x|} = 0,$$ entonces N es cuasiacotada y $|N| = 0$.

Como veremos en las aplicaciones que se harán de este capítulo, la condición (3.10) se satisface para algunas no linealidades N no cuasiacotadas.

El siguiente corolario es el conocido teorema del punto fijo de Granas.

Corolario III.5. Sea $N : X \to X$ una aplicación compacta, tal que existen dos constantes no negativas $\alpha < 1$ y β tales que

$$|Nx| \leq \alpha |x| + \beta$$

para todo $x \in X$. Entonces la ecuación $x = Nx$ tiene al menos una solución.

Demostración. Tomemos en el teorema III.3. $X = Z$, $\gamma = 0$, $\alpha_5 = \alpha$, $\beta_5 = \beta$, $L = I$. Como $\operatorname{Im} P = \ker I$, $P = 0$ y como $\operatorname{Im} I = \ker Q$, $Q = 0$. También $K_P = I$. Entonces, las hipótesis i) y ii) son triviales. Por otra parte, (3.11) se satisface tomando $\mu = 0$ y r arbitrario y positivo. La hipótesis iv) quedaría $d_B(I_{\{0\}}, \{0\}, 0) = 1$. Luego se cumplen todas las hipótesis del teorema III.3., tomando $\alpha \leq \alpha_0 < 1$.

III.2. El caso de espacios de funciones.

En este apartado vamos a ver que es posible concretar las hipótesis d) del teorema III.2. y la hipótesis iii) del teorema III.3., en el caso en que el espacio X sea un espacio de funciones. Concretamente, sea S un subconjunto de R y tomemos como X un subespacio del espacio de Banach de funciones acotadas $x : S \to R^n$, $(n \geq 1)$, con una norma satisfaciendo $\|x\|_X \geq \sup_{t\in S} |x(t)|$, con igualdad para las funciones constantes.

Sea $L : \operatorname{dom} L \subset X \to Z$, donde Z es un espacio normado real, tal que $\ker L = \{x \in \operatorname{dom} L : x$ es una aplicación constante$\}$, $\operatorname{Im} L$ es cerrado en Z y de codimensión n. En este caso, L es una aplicación de Fredholm de índice cero, y por lo tanto existen proyecciones continuas

$P : X \to X$, $Q : Z \to Z$ verificando que $\operatorname{Im} P = \ker L$, $\operatorname{Im} L = \ker Q$. En este caso, pues, Px es una función constante de S en R^n para cada $x \in X$.

Proposición III.6. Con las notaciones del teorema III.2., supongamos que se cumplen las siguientes condiciones :

1) $\ker L = \{ x \in \operatorname{dom} L : x$ es una aplicación constante$\}$.
2) Existe $r > 0$ tal que $\lambda QNx + (1-\lambda)Q\Phi x \neq 0$ para todo $\lambda \in]0,1[$ y todo $x \in \operatorname{dom} L$, con $\min_t |x(t)| \geq r$.

Entonces, existen $\mu \geq 0$, $r_1 > 0$ tal que

$$\| Px \|_X \leq \mu \, \| (I - P)x \|_X + r$$

para toda $x \in \operatorname{dom} L$ que satisfaga la ecuación

$$\lambda QNx + (1-\lambda)Q\Phi x = 0 \qquad \lambda \in]0,1[$$

Demostración. Sea $x \in \operatorname{dom} L$ y $\lambda \in]0,1[$ tales que $\lambda QNx + (1-\lambda)Q\Phi x = 0$. Entonces, por la hipótesis 2) debe existir $t \in S$ tal que $|x(t)| < r$. Luego, como $\|Px\|_X = |(Px)(t)|$, tendremos

$$\|Px\|_X = |(Px)(t)| = |(Px)(t) + ((I-P)x)(t) - ((I-P)x)(t)|$$

$$\leq |x(t)| + |((I-P)x)(t)| < r + \|(I-P)x\|_X$$

Así pues, tomando $r_1 = r$ y $\mu = 1$, la proposición está demostrada.

NOTAS.

1.- En el caso en que $\Phi = QN$, la hipótesis 2) quedaría así : existe $r > 0$ tal que $QNx \neq 0$ para todo $x \in \operatorname{dom} L$ con $\min_t |x(t)| \geq r$. Así, a partir de esta condición y de 1) se deduciría la hipótesis iii) del teorema III.3.

2.- En el caso en que $X \subset Z$ y $\operatorname{Im} Q = \ker L$, entonces 2) viene implicada por la condición de que $\langle QNx, Q\Phi x \rangle \geq 0$, para todo $x \in \operatorname{dom} L$ con $\min_t |x(t)| \geq r$, siendo $\langle , \rangle$ el producto escalar ordinario en R^n.

Capítulo IV

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES NO LINEALES CON RETRASO Y DE TIPO NEUTRO

IV.1. Resultados previos y transformación de la ecuación diferencial funcional con retraso en una ecuación abstracta.

Sea Z el espacio normado de aplicaciones $z : R \to R^n$, las cuales son continuas y T-periódicas ($T > 0$), con la norma

$$|z|_1 = \int_0^T |z(t)| \, dt$$

donde $|\cdot|$ es la norma en R^n definida por $|x| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, para $x \in R^n$. Notemos por X el espacio de Banach de aplicaciones $x : R \to R^n$ las cuales son de clase C^{m-1} y T-periódicas con la norma

$$\|x\|_{m-1} = \text{máx} \, \{ \|x^{(i)}\|_0 : 0 \leq i \leq m-1 \}$$

donde $\quad \|x^{(i)}\|_0 = \max_{t \in R} |x^{(i)}(t)| = \max_{t \in [0,T]} |x^{(i)}(t)|$

Sea $h \geq 0$ y C el espacio de Banach de aplicaciones continuas $\phi : [-h,0] \to R^n$, con la norma

$$\|\phi\| = \max_{\theta \in [-h,0]} |\phi(\theta)|$$

para todo $\phi \in C$.

Si $x \in X$, $t \in R$, y $0 \leq i \leq m-1$, se define $x_t^{(i)} \in C$ por $x_t^{(i)}(\theta) = x^{(i)}(t+\theta)$, $\forall \theta \in [-h,0]$.

Sea $g : R \times (C)^m \to R^n$, $(t, \phi_1, \dots, \phi_m) \to g(t, \phi_1, \dots, \phi_m)$, continua, T-periódica respecto de t y aplicando conjuntos acotados en conjuntos acotados. Queremos estudiar la existencia de soluciones T-periódicas de la ecuación diferencial funcional con retraso

$$x^{(m)}(t)+A_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\ldots+A_1x'(t) = g(t,x_t,\ldots,x_t^{(m-1)}), m\geq 1, \quad (4.1)$$

donde A_i, $i=1,\ldots,m-1$ son matrices constantes reales de orden $n\times n$. Si definimos los operadores $L : \operatorname{dom} L\subset X\to Z$ por

$$\operatorname{dom} L = \{x\in X : x \text{ es de clase } C^m\}$$
$$Lx = x^{(m)}+A_{m-1}x^{(m-1)}+\ldots+A_1x'$$

y $N : X\to Z$, por $(Nx)(t) = g(t,x_t,\ldots,x_t^{(m-1)})$, para todo $x\in X$, $t\in R$, el problema de estudiar la existencia de soluciones T-periódicas de (4.1) es equivalente al problema de estudiar la existencia de soluciones de la ecuación

$$Lx = Nx \quad (4.2)$$

Sabemos (ver cap. I), que si ker L está formado por las aplicaciones constantes, entonces L es una aplicación de Fredholm de índice cero y que existen proyecciones contínuas

$$P : X\to X,\ x\to Px = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$
$$Q : Z\to Z,\ z\to Qz = \frac{1}{T}\int_0^T z(t)\,dt$$

tales que Im P = ker L, Im L = ker Q. Además, la aplicación L_p : dom $L\cap$ ker P $\to$ Im L es biyectiva y tiene una inversa K_p : Im L $\to$ dom $L\cap$ker P. En este caso, a pesar de que la norma considerada en Z es distinta a la considerada en el cap. II, tenemos la siguiente proposición.

Proposición IV.1. K_p es contínua.

Demostración. Sea $z\in$ Im L. Entonces, como $LK_pz = z$, tenemos

$$(K_pz)^{(m)}(t)+A_{m-1}(K_pz)^{(m-1)}(t)+\ldots+A_1(K_pz)'(t) = z(t)$$

para todo $t\in R$. Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$y^{(m)}(t)+A_{m-1}y^{(m-1)}(t)+\ldots+A_1y'(t) = z(t) \quad (4.3)$$

Entonces, K_pz es la única solución T-periódica de (4.3) tal que $PK_pz = 0$, y si y es cualquier solución T-periódica de (4.3), entonces $K_pz = y - Py$. Realizando ahora con la ecuación (4.3) el mismo proceso que hicimos con la ecuación (2.4), tendríamos que existe una solución $y(t)$ de (4.3) tal que

$$\max_{t\in[0,T]} |y^{(i)}(t)| \leq k_1\int_0^T |z(t)|\,dt = k_1 \|z\|_1,\ i = 0,\ldots,m-1.$$

con k_1 independiente de $z\in$ Im L. Como además $Py\in$ ker L, Py es una aplicación constante y así

$$\|Py\|_{m-1} = \|Py\|_0 = \left|\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{T}\int_0^T |y(t)|\,dt \leq \|y\|_{m-1}.$$

Por lo tanto, $\|K_pz\|_{m-1} \leq \|y\|_{m-1} + \|Py\|_{m-1} \leq 2k_1\|z\|_1$ y así K_p es contínua.

Proposición IV.2. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de X con dom $L\cap\Omega\neq\phi$. Entonces N es L-compacta en $\bar\Omega$.

Demostración. Tenemos que ver que las aplicaciones $QN : \bar\Omega\to Z$ y $K_{P,Q}N : \bar\Omega\to X$ son compactas. Para ello, sea (x_n), $n\in\mathbb{N}$ una sucesión tal que $x_n\in\bar\Omega$ y $x_n\to x$ en X. Entonces el conjunto $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ es acotado en X y por lo tanto el conjunto $\{N(x_n) : n\in\mathbb{N}\}$

es acotado en Z. Como $Q : Z \to Z$ es compacta, el conjunto $\{QN(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ está contenido en algún subconjunto compacto de Z. Luego admite una subsucesión $(QN(x_{n_k}))$ convergente a un punto $z \in Z$. Ahora bién, como g es continua, y $(x_n)_t^{(i)} \to x_t^{(i)}$ en C para todo $t \in R$ y todo i tal que $0 \leq i \leq m-1$, tenemos que

$$g(t,(x_n)_t,\ldots,(x_n)_t^{(m-1)}) \to g(t,x_t,\ldots,x_t^{(m-1)})$$

para todo $t \in R$. Además, existe $k > 0$ tal que

$$|g(t,(x_n)_t,\ldots,(x_n)_t^{(m-1)})| \leq k$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $t \in R$. Así, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$QN(x_{n_k}) = \frac{1}{T}\int_0^T g(t,(x_{n_k})_t,\ldots,(x_{n_k})_t^{(m-1)})dt \to \frac{1}{T}\int_0^T g(t,x_t,\ldots,x_t^{(m-1)})\, dt$$

y por lo tanto

$$z = \frac{1}{T}\int_0^T g(t,x_t,\ldots,x_t^{(m-1)})\, dt = QNx.$$

Por el mismo razonamiento se demuestra que toda subsucesión de (x_n) debe admitir a su vez una subsucesión convergente a QNx, y así, la sucesión $(QN(x_n))$ debe converger a QNx. Esto demuestra que $QN : \overline{\Omega} \to Z$ es continua. Ahora bién, al ser $\overline{\Omega}$ acotado en X, $N(\overline{\Omega})$ es acotado en Z, y por ser Q compacta, $QN(\overline{\Omega})$ es relativamente compacto en Z. En definitiva, QN es compacta.

Para ver que $K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \to X$ es compacta, basta hacerlo en el caso $m = 1$, pues si $m > 1$, mediante un conveniente cambio de variable la ecuación considerada se puede reducir a otra de primer orden. En el caso $m = 1$,

$$(K_{P,Q}Nx)(t) = (K_P(I-Q)Nx)(t) = \int_0^t (g(s,x_s) - \frac{1}{T}\int_0^T g(u,x_u)du)ds + Py,$$

donde $y : R \to R^n$, $t \to \int_0^t (g(s,x_s) - \frac{1}{T}\int_0^T g(u,x_u)du)ds$.

Como $\overline{\Omega}$ es acotado, exite $k_2 > 0$ tal que $|g(s,x_s)| \leq k_2$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, $s \in R$. Luego, al ser $K_{P,Q}Nx$ T-periódica, existirá $k_3 > 0$ tal que $\|K_{P,Q}Nx\|_0 \leq k_3$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Además, si $t_1, t_2 \in [0,T]$ entonces

$$|(K_{P,Q}Nx)(t_1) - (K_{P,Q}Nx)(t_2)| = \left|\int_{t_2}^{t_1} (g(s,x_s) - \frac{1}{T}\int_0^T g(u,x_u)du)ds\right|$$

$$\leq 2k_2\, |t_1 - t_2| \ .$$

Así pues, el conjunto $\{K_{P,Q}Nx : x \in \overline{\Omega}\}$ es equiacotado y equicontinuo en X; por lo tanto, por el teorema de Ascoli-Arzelá, $K_{P,Q}N(\overline{\Omega})$ es relativamente compacto en X.

La demostración de que $K_{P,Q}N$ es continua se realizaría entonces de forma idéntica a como se hizo con Q.

Ahora estamos en condiciones de aplicarle a la ecuación (4.2) los resultados del capítulo III.

IV.2. Algunos teoremas de existencia y consecuencias. El caso escalar.

Teorema IV.3. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones :

1) $\ker L = \{x \in \text{dom } L : x$ es una aplicación constante$\}$.

2) Existen $a \in R^n$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,m$ y una aplicación continua $\beta : R \to R$, tales que

$$|g(t,\psi_1,\ldots,\psi_m)| \leq \langle a, g(t,\psi_1,\ldots,\psi_m)\rangle + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|\psi_i\| + \beta(t)$$

para todo $(t,\psi_1,\ldots,\psi_m) \in R \times (C)^m$.

3) Existen una aplicación continua $\phi: X \to Z$, L-compacta en subconjuntos acotados de X; una aplicación continua $\beta' : R \to R$ y constantes $\alpha_i' \geq 0$, $i = 1,\dots,m$, tales que

$$|(\phi x)(t)| \leq \langle a,(\phi x)(t)\rangle + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i' \|x^{(i-1)}\|_0 + \beta'(t)$$

para todo $t \in R$, $x \in X$.

4) Existe $r > 0$, tal que para todo $x \in \mathrm{dom}\, L$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, con $\min_t |x_j(t)| \geq r$, para algún j, $1 \leq j \leq n$, se tiene

$$\left\langle \int_0^T (\phi x)(t)dt, \int_0^T g(t,x_t,\dots,x_t^{(m-1)})dt \right\rangle \geq 0$$

donde ambas integrales no son simultáneamente nulas.

5) $L - \phi \in C_L(B_X(s))$ y $D_L[(L,\phi),B_X(s)] \neq 0$ para todo $s \geq r$.

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$, tal que si $\alpha = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i + \alpha_i') \leq \alpha_0$, la ecuación (4.1) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Vamos a aplicar el teorema III.2., para lo cual vamos a ver que se cumplen todas las condiciones allí impuestas. En efecto, como K_P es continua, y N y ϕ son L-compactas, se cumple la hipótesis a) del teorema III.2.

Definamos ahora el funcional lineal $\gamma : Z \to R$ por

$$\gamma(z) = \int_0^T \langle a,z(t)\rangle\, dt = \left\langle a, \int_0^T z(t)\, dt\right\rangle$$

Como $\mathrm{Im}\, L = \ker Q$, si $z \in \mathrm{Im}\, L$, entonces $\int_0^T z(t)\, dt = 0$ y por tanto $\gamma(z) = 0$. Es decir, $\mathrm{Im}\, L \subset \ker \gamma$. Por otra parte, teniendo en cuenta la hipótesis 2), si $x \in X$, se tiene

$$\|Nx\|_1 = \int_0^T |(Nx)(t)|\, dt = \int_0^T |g(t,x_t,\dots,x_t^{(m-1)})|dt$$

$$\leq \int_0^T \langle a,g(t,x_t,\dots,x_t^{(m-1)})\rangle dt + \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i |x_t^{(i-1)}| + \beta(t)\right) dt$$

$$\leq \left\langle a, \int_0^T g(t,x_t,\dots x_t^{(m-1)})\, dt \right\rangle + T \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|x^{(i-1)}\|_0 + \int_0^T \beta(t)dt$$

$$\leq \left\langle a, \int_0^T (Nx)(t)dt \right\rangle + T\alpha \|x\|_{m-1} + \beta'' =$$

$$\gamma(Nx) + T\alpha \|x\|_{m-1} + \beta'' \text{ , donde } \beta'' = \int_0^T \beta(t)\, dt$$

Así pues, se cumple la hipótesis b) del teorema III.2., con $\alpha_3 = T\alpha$, $\beta_3 = \beta''$.

Análogamente, a partir de la hipótesis 3), se deduciría que $\|\phi x\|_1 \leq \gamma(\phi x) + T\alpha \|x\|_{m-1} + \beta'''$, donde $\beta''' = \int_0^T \beta'(t)\, dt$, que es la hipótesis c) del teorema III.2., con $\alpha_4 = T\alpha$, $\beta_4 = \beta'''$.

Como la hipótesis 5) es lo mismo que la hipótesis e) del teorema III.2., sólo queda por demostrar la hipótesis d) de dicho teorema. Para ello, si $x = (x_1,\dots,x_n) \in X$ satisface la ecuación $\lambda QNx + (1-\lambda)Q\phi x = 0$, $\lambda \in]0,1[$, se tiene

$$\lambda \int_0^T g(t,x_t,\dots x_t^{(m-1)})dt + (1-\lambda) \int_0^T (\phi x)(t)\, dt = 0$$

y por lo tanto, para cada j, $1 \leq j \leq n$, debe existir $t_j \in [0,T]$ tal que $|x_j(t_j)| < r$. En efecto, si no fuese así, existiría al menos un j, $1 \leq j \leq n$, para el cual $\min_t |x_j(t)| \geq r$, y teniendo en cuenta la hipótesis 4)

$$\langle Q\phi x, QNx\rangle = -\frac{\lambda}{1-\lambda} \langle QNx,QNx\rangle \geq 0$$

. Es decir, $QNx = 0$, con lo cual $Q\phi x = 0$. Esto contradice 4). Así pues, para cada j, $1 \leq j \leq n$, existe $t_j \in [0,T]$ con $|x_j(t_j)| < r$. Entonces, como Px es constante,

$$\|Px\|_{m-1} = \|Px\|_0 = \max_{1 \leq j \leq n} |(Px)_j(t_j)|$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} |(Px)_j(t_j) + ((I-P)x)_j(t_j)| + |((I-P)x)_j(t_j)|$$

$$< r + \|(I-P)x\|_0 \leqslant r + \|(I-P)x\|_{m-1} ,$$

con lo cual se demuestra la hipótesis d) con $\mu = 1$ y la demostración está completa.

NOTAS.

1.- El teorema IV.3. extiende a ecuaciones diferenciales funcionales con retraso el teorema II.4, que era válido para ecuaciones diferenciales ordinarias. En efecto, basta tomar $h = 0$; en este caso, C se identifica con R^n y si $x \in X$ y $t \in R$, $x_t^{(i)}$ se identifica con $x^{(i)}(t)$, para $i = 0,\dots,m-1$. También, si $h = 0$, como $C = R^n$, al ser $g : Rx(R^n)^m \to R^n$ continua, g transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados, con lo cual esta última condición sería superflua.

2.- La hipótesis de que $g : Rx(C)^m \to R^n$ aplique conjuntos acotados en conjuntos acotados es superflua si $|a| < 1$, ya que en este caso, teniendo en cuenta la desigualdad de Cauchy-Schawartz, tendríamos

$$|g(t,\psi_1,\dots,\psi_m)| \leqslant |a|\,|g(t,\psi_1,\dots,\psi_m)| + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|\psi_i\| + \beta(t)$$

y por tanto $|g(t,\psi_1,\dots,\psi_m)| \leqslant (1 - |a|)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|\psi_i\| + \beta(t)\right).$

La misma observación vale para Φ. Observemos también que en este caso $\|\gamma\| < 1$. ($\|\gamma\|$ es la norma del funcional lineal continuo γ).

3.- El teorema IV.3. se puede demostrar siguiendo el mismo método de demostración que el teorema II.4. (ver [17]). Sin embargo, la demostración dada aquí es mucho más simple.

4.- La condición 2) se satisface si existen $a_j \in R$, $\alpha_{ij} \geqslant 0$, $i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$ y una función continua $\beta: R \to R$ tal que

$$|g_j(t,\psi_1,\dots,\psi_m)| \leqslant a_j g_j(t,\psi_1,\dots,\psi_m) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \|\psi_i\| + \beta(t)$$

$j = 1,\dots,n$ y $(t,\psi_1,\dots,\psi_m) \in Rx(C)^m$.

5.- También, la condición 4) es más general que la siguiente :

Existe $r > 0$ tal que para todo $x \in \operatorname{dom} L$, con $\min_t |x(t)| \geqslant r$, se tiene

$$\left\langle \int_0^T (\Phi x)(t)dt, \int_0^T g(t,x_t,\dots,x_t^{(m-1)})dt \right\rangle \geqslant 0$$

donde ambas integrales no son simultáneamente nulas.

6.- Como iremos viendo en lo que sigue, el teorema IV.3. unifica y generaliza algunos resultados de Fucik [28], Mawhin [56], [57], Lazer [50], Fennell [27], Reissig [71], Villari [78] y Ward [80], bién porque ellos consideran el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, bién porque las no linealidades que ellos consideran están incluídas en la condición 2), o bién porque nuestra condición asintótica 4) generaliza a las suyas. Esto se verá con detalle en lo que sigue.

7.- El teorema IV.3. se podría demostrar también suponiendo sólo condiciones de Caratheodory para g.

Igual que se hizo en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, es conveniente disponer de un teorema donde la hipótesis 5) del teorema IV.3. se sustituya por otra donde aparezca el grado de Brouwer. Esto viene dado por el siguiente teorema, que se puede demostrar, tal como hicimos en el caso ordinario, a partir del teorema anterior. Sin embargo, en este caso y con objeto de ilustrar las aplicaciones de los teoremas abstractos demostrados en el capítulo III, vamos a demostrarlo utilizando el teorema III.3.

Teorema IV.4. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones :

i) $\ker L = \{ x \in \operatorname{dom} L : x$ es una aplicación constante $\}$.

ii) Existen $a \in R^n$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1,\dots,m$ y una función continua $\beta : R \to R$, tales que

$$|g(t,\psi_1,\dots,\psi_m)| \leqslant \langle a, g(t,\psi_1,\dots,\psi_m)\rangle + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \|\psi_i\| + \beta(t)$$

para todo $(t,\psi_1,\dots,\psi_m)\in R\times(C)^m$.

iii) Existe $r>0$ tal que para todo $x\in \operatorname{dom} L$, $x=(x_1,\dots,x_n)$ con $\min_t |x_j(t)|\geq r$ para algún j, $1\leq j\leq n$, se tiene

$$\int_0^T g(t,x_t,\dots,x_t^{(m-1)})\,dt \neq 0$$

iv) $d_B(\phi_{\ker L}, B_X(s)\cap \ker L, 0)\neq 0$ para todo $s\geq r$, donde

$$\phi_{\ker L}: R^n\to R^n,\quad c\to \frac{1}{T}\int_0^T g(t,c,0,\dots,0)\,dt$$

(En este caso, al ser c constante, c_t se identifica con c para todo $t\in R$, $c\in R^n$).

Entonces, existe $\alpha_0>0$ tal que si $\alpha=\sum_{i=1}^{m} T\alpha_i\leq\alpha_0$, la ecuación (4.1) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Veamos que se cumplen todas las hipótesis del teorema III.3. La hipótesis i) se ha visto anteriormente y ii) es igual que en el teorema anterior con

$$\gamma: Z\to R,\quad \gamma(z)=\int_0^T \langle a, z(t)\rangle\, dt$$

Por otra parte, si $x=(x_1,\dots,x_n)$ es una solución de la ecuación $QNx=0$, es decir,

$$\int_0^T g(t,x_t,\dots,x_t^{(m-1)}) = 0$$

entonces debe existir para cada j, $1\leq j\leq n$ un $t_j\in[0,T]$ tal que $|x_j(t_j)|<r$. Entonces, procediendo igual que en el teorema anterior se tendría que

$$\|Px\|_{m-1}\leq r+\|(I-P)x\|_{m-1}$$

que es la hipótesis iii) del teorema III.3., con $\mu=1$. Por último, la

hipótesis iii) de este teorema es la misma que iv) del teorema III.3.

NOTAS.

1.- El teorema IV.4. extiende a ecuaciones diferenciales funcionales con retraso el teorema II.5. que era válido para ecuaciones diferenciales ordinarias. Así mismo, el teorema IV.4. generaliza el teorema 6.1. de Mawhin [56] tal y como se explica en la nota 1 del teorema II.5. Sin embargo, en este caso hay algunas particularidades que conviene resaltar.

Se dice que g satisface la condición (Q) si para todo $\varepsilon>0$, existe $\gamma>0$ tal que

$$|g(t,\psi_1,\dots,\psi_m)|\leq \varepsilon(\|\psi_1\|+\dots+\|\psi_m\|)+\gamma$$

para todo $(t,\psi_1,\dots,\psi_m)\in R\times(C)^m$. En particular, si

$$\lim_{\|\psi_1\|+\dots+\|\psi_m\|\to+\infty}\frac{|g(t,\psi_1,\dots,\psi_m)|}{\|\psi_1\|+\dots+\|\psi_m\|}=0$$

y g transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados, g verifica la condición (Q). Por lo tanto, el teorema IV.3. generaliza los resultados de Fennell [27].

2.- Algunas condiciones bajo las cuales se verifica iii) del teorema IV.4. vienen especificadas en la nota 2 del teorema II.5.

Tal y como hicimos en el capítulo II, a partir del teorema IV.3. se pueden obtener otros teoremas de existencia de soluciones periódicas para la ecuación (4.1) distintos de los reseñados en este capítulo (ver [18]).

Vamos a estudiar la existencia de soluciones T-periódicas de ecuaciones diferenciales funcionales escalares de la forma

$$x^{(m)}(t)+a_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\dots+a_1x'(t)=g(t,x(t-h))-f(t),\ m\geq 1, \qquad (4.4)$$

donde a_i, $i=1,\dots,m-1$ son constantes reales, $h\geq 0$ es constante y

$$g : R\times R \to R,\ (t,y)\to g(t,y)$$
$$f : R\to R,\ t\to f(t)$$

son continuas y T-periódicas respecto de t.

Sea Z el espacio normado de aplicaciones $z : R\to R$ que son continuas y T-periódicas, con la norma $\|\cdot\|_1$ y X es el espacio de Banach de aplicaciones $x : R\to R$, que son de clase C^{m-1} y T-periódicas, con la norma $\|\cdot\|_{m-1}$. Notemos por dom L el conjunto formado por todas las aplicaciones de X que son de clase C^m. Si definimos

$$L : \text{dom } L\to Z,\quad Lx = x^{(m)}+a_{m-1}x^{(m-1)}+\dots+a_1x'$$
$$N : X\to Z,\quad (Nx)(t) = g(t,x(t-h))-f(t)$$

entonces, si ker L está formado por las aplicaciones constantes de X, L es una aplicación lineal de Fredholm de índice cero y N es L-compacta en subconjuntos acotados de X.

Supongamos que existen constantes $\delta+$ y $\delta-$ tales que $g(t,y)\geq\delta+$ para $y\geq 0$ y $g(t,y)\leq\delta-$ para $y\leq 0$. Definamos las funciones $\mu\pm : R\to R\cup\{-\infty,+\infty\}$ por

$$\mu+(t)=\liminf_{y\to+\infty} g(t,y),\quad \mu-(t)=\limsup_{y\to-\infty} g(t,y)$$

Corolario IV.5. Supongamos que se verifican :

a) $\ker L=\{x\in\text{dom } L : x$ es una aplicación constante $\}$.

b) Existen constantes $\alpha\geq 0$ y una función continua $\beta : R\to R$, tales que

$$|g(t,y)|\leq g(t,y)+\alpha|y|+\beta(t)$$

para todo $(t,y)\in R\times R$.

c)
$$\int_0^T \mu-(t)\,dt<\int_0^T f(t)\,dt<\int_0^T \mu+(t)\,dt$$

Entonces, existe $\alpha_0>0$ tal que si $\alpha\leq\alpha_0$, la ecuación (4.4) tiene al menos una solución T-periódica.

(Las integrales que aparecen en c) pueden no ser finitas).

Demostración. Vamos a ver que se verifican todas las condiciones del teorema IV.4. Las condiciones i) y ii) son inmediatas con a = 1. Supongamos ahora que la condición iii) de dicho teorema no se cumple. Entonces, existe una sucesión (x_n), $x_n\in$ dom L y $\min_t|x_n(t)|\geq n$ tales que

$$\int_0^T g(t,x_n(t-h))=\int_0^T f(t)\,dt$$

Como $\min|x_n(t)|\geq n$, es evidente que debe existir una subsucesión de (x_n), a la que seguimos llamando por sencillez (x_n), con signo constante. Supongamos, por ejemplo, que este signo es positivo. Entonces $\min_t x_n(t)\geq n$ y aplicando el lema de Fatou, se tendrá

$$\int_0^T f(t)\,dt=\liminf_{n\to+\infty}\int_0^T g(t,x_n(t-h))dt\geq\int_0^T\liminf_{n\to+\infty} g(t,x_n(t-h))\,dt$$
$$\geq\int_0^T\liminf_{y\to+\infty} g(t,y)=\int_0^T\mu+(t)\,dt$$

lo cual contradice c). Si el signo de x_n es negativo, llegaríamos también a una contradicción teniendo en cuenta la otra desigualdad de c). Por lo tanto, se cumple iii) del teorema IV.4.

Por otra parte, la aplicación $\Phi_{\ker L} = QN_{\ker L}$ es ahora

$$\Phi_{\ker L} : R \to R, \quad \Phi_{\ker L}(c) = \frac{1}{T}\int_0^T (g(t,c) - f(t))\, dt$$

Entonces, existe $c_1 > 0$, tal que $\Phi_{\ker L}(c) > 0$ para $c > c_1$. En efecto, si no fuese así, existiría una sucesión (c_n) de números reales tales que $\lim_{n \to +\infty} c_n = +\infty$ y $\Phi_{\ker L}(c_n) \leq 0$ para todo $n \in N$. Entonces

$$\int_0^T g(t,c_n)dt \leq \int_0^T f(t)\, dt$$

Nuevamente, aplicando el lema de Fatou, tendríamos una contradicción con la hipótesis c). Análogamente debe existir un $c_2 < 0$ tal que $\Phi_{\ker L}(c) < 0$ para $c < c_2$. Si $c_3 = \max\{ c_1, |c_2| \}$, entonces $\Phi_{\ker L}(c) > 0$ y $\Phi_{\ker L}(-c) < 0$ para $c > c_3$. Esto implica, por el teorema de Poincaré-Bohl, la condición iv) del teorema IV.4. La demostración del corolario está pues acabada.

NOTAS.

1.- El corolario se puede también demostrar tomando

$$\mu+(t) = \liminf_{y \to -\infty} g(t,y) \quad , \mu-(t) = \limsup_{y \to +\infty} g(t,y)$$

y existiendo, por supuesto, constantes $\delta+$ y $\delta-$ tales que $g(t,y) \geq \delta+$ si $y \leq 0$, $g(t,y) \leq \delta-$ si $y \geq 0$.

También, la condición b) se puede sustituir por la condición

$$|g(t,y)| \leq -g(t,y) + \alpha|y| + \beta(t)$$

3.- El corolario IV.5. generaliza un resultado de Fucik [28], el cual consideró el caso en que

$$\lim_{|y| \to +\infty} \frac{|g(t,y)|}{|y|} = 0$$ y siendo $\mu-(t)$ y $\mu+(t)$ verdaderos límites, es decir, $\mu+(t) = \lim_{y \to +\infty} g(t,y)$, $\mu-(t) = \lim_{y \to -\infty} g(t,y)$.

El corolario IV.5. es también una extensión del teorema 1 de Ward [80], a ecuaciones diferenciales funcionales con retraso.

IV. 3. Ejemplos.

1.- Consideremos la ecuación escalar

$$x^{(m)}(t) + a_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\ldots+a_1x'(t) = e^{x(t - h)} - f(t) \qquad (4.5)$$

donde $h \geq 0$ es constante y $f : R \to R$ es continua y T-periódica ($T > 0$), verificando que $\int_0^T f(t)\, dt > 0$.

Entonces, si la ecuación

$$\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_1\lambda = 0 \qquad (4.6)$$

no tiene soluciones de la forma $\frac{2k\pi i}{T}$, con k un entero no nulo, la ecuación (4.5) tiene al menos una solución T-periódica.

En efecto, vamos a aplicar el corolario IV.5. En este caso $g(t,y) = e^y$ y como $g(t,y) \geq 0$, la condición b) es trivial. La condición a) es equivalente a la condición impuesta en la ecuación (4.6). Por último, podemos tomar $\delta+ = 1$, $\delta- = 1$ y entonces,

$$\mu+(t) = \liminf_{y \to +\infty} e^y = +\infty \quad y \quad \mu-(t) = \limsup_{y \to -\infty} e^y = 0$$, con lo cual se verifica también c). Como $\alpha = 0$, trivialmente $\alpha \leq \alpha_0$ y (4.5) tiene una solución T-periódica. Como g no verifica la condición de tipo (Q), los resultados citados de Mawhin no se pueden aplicar a la ecuación (4.5).

2.- Sea ahora la ecuación escalar

$$x^{(m)}(t) = x(t - h)e^{x(t - h)} + \text{sen}t \qquad (4.7)$$

En este caso, tomando $g(t,y) = y\, e^{y}$ y $f(t) = - \text{sen}t$, $\int_0^{2\pi} \text{sen}t\, dt = 0$

y $\mu_-(t) = \limsup_{y \to -\infty} g(t,y) = 0$. Por lo tanto, no se cumple la hipótesis c) del corolario IV.5. y así, los resultados de Ward no se pueden aplicar. Tampoco se pueden aplicar los resultados citados de Mawhin ni de Fucik, pues g no verifica la condición de tipo (Q). Vamos a ver, en cambio, que es posible comprobar que se verifican todas las hipótesis del teorema IV.4. Para ello, consideremos la función

$$g : R\times C \to R,\ (t,\psi) \to \psi(-h)e^{\psi(-h)} + \text{sen}t$$

Entonces, la ecuación (4.7) se puede poner en la forma

$$x^{(m)}(t) = g(t,x_t)$$

con g continua, 2π -periódica y aplicando conjuntos acotados en conjuntos acotados. Además, por la forma que tiene la parte lineal de la ecuación (4.7), la hipótesis i) del teorema IV.4. es ahora trivial. Sea $\psi \in C$, si $\psi(-h)>0$, $|g(t,\psi)| = |\psi(-h)e^{\psi(-h)} + \text{sen}t|$

$$\leq \psi(-h)e^{\psi(-h)} + |\text{sen}t| .$$

Si $\psi(-h)<0$, la función $\psi(-h)e^{\psi(-h)}$ está acotada. Sea β una cota de dicha función; entonces, para todo $(t,\psi) \in R\times C$

$$|g(t,\psi)| \leq g(t,\psi) + \max\ \{ \beta,\ 2\,|\text{sen}t| \}$$

que es la condición ii) con $a = 1$, y $\alpha_i = 0$, $i= 1,\dots,m$.
Por otra parte, si $x \in \text{dom}\ L$ y $\min_t |x(t)| \geq r>0$, se tiene que

$$\int_0^{2\pi} g(t,x_t)\, dt = \int_0^{2\pi} x(t - h)\, e^{x(t - h)}\, dt \neq 0$$

por tener x signo constante. Por último, si tomamos $V : R \to R$, $c \to \frac{c^2}{2}$, entonces

$$V'(c)\Phi_{\ker L}(c) = c\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (ce^{c} + \text{sen}t)\, dt = c^2e^{c}>0 \quad \text{si } c\neq 0,$$

con lo cual, iv) se sigue del teorema de Poincaré-Bohl y del teorema de Krasnosels'kii.

3.- Consideremos la ecuación diferencial funcional escalar

$$x'(t) = -bx(t) + e^{-x(t - h)} + f(t),\ b>0,\ h\geq 0, \qquad (4.8)$$

donde $f : R \to R$ es continua, T-periódica ($T>0$) y no idénticamente cero. Esta ecuación está relacionada con la ecuación elaborada como modelo por Lasota-Wazewska [24] para la supervivencia de células rojas de la sangre. En su caso, $f = 0$ (ver también [75]).

Vamos a aplicar el teorema IV.4. para demostrar la existencia de al menos una solución T-periódica de (4.8) para b suficientemente pequeño.

La condición i) es trivial con $Lx = x'$. Por otra parte, tomando $g : R\times C \to R,\ (t,\psi) \to -b\psi(0) + e^{-\psi(-h)} + f(t)$, tenemos que

$$|g(t,\psi)| \leq b\,|\psi(0)| + e^{-\psi(-h)} + f(t) = -b\psi(0) + b\psi(0) + b\,|\psi(0)| +$$
$$+ e^{-\psi(-h)} + f(t) \leq g(t,\psi) + 2b\|\psi\|.$$

Luego ii) se verifica con $a = 1$, $\alpha_1 = 2b$, $\alpha_i = 0$, $i = 2,\dots,m$ y $\beta= 0$.

Para verificar iii), si $x \in \text{dom}\ L$ talque $\min_t |x(t)| \geq r>0$, entonces x debe tener signo constante y

$$\int_0^{T} (-bx(t) + e^{-x(t - h)} + f(t)) \neq 0$$

En efecto, si r es suficientemente grande y $x(t)\geq 0$, entonces $\min_t x(t)\geq r$, $e^{-x(t-h)}\to 0$, $-bx(t)\to -\infty$; si $x(t)\leq 0$, entonces $\min_t(-x(t))\geq r$. Es decir, $x(t)\leq -r$. Luego $e^{-x(t-h)}\to +\infty$ y $-bx(t)\to +\infty$. Por último, para verificar iv), tomemos $V: R\to R$, $c\to -\frac{c^2}{2}$. Entonces.

$$V'(c)\ \phi_{\ker L}(c) = -c\,\frac{1}{T}\int_0^T(-bc+e^{-c}+f(t))\,dt =$$

$$= bc^2 - ce^{-c} - c\,\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \geq 0 \quad \textbf{para} \quad |c| \text{ suficien-}$$

temente grande. Luego iv) se sigue del teorema de Poincaré-Bohl y el teorema de Krasnosels'kii.

IV.4. Introducción a las ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro y transformación de la ecuación en una ecuación abstracta.

Sean $\ell: RxC\to R^n$, $(t,\psi)\to \ell(t,\psi)$

$\mathcal{L}: RxC\to R^n$, $(t,\psi)\to\mathcal{L}(t,\psi)$

aplicaciones continuas, T-periódicas en t y lineales en ϕ para cada $t\in R$,

$g: RxC\to R^n$, $(t,\psi)\to g(t,\psi)$

continua, T-periódica en t y aplicando conjuntos acotados en conjuntos acotados. Consideremos la ecuación diferencial funcional

$$\frac{d}{dt}(D(t,x_t)) = \mathcal{L}(t,x_t) + g(t,x_t) \tag{4.9}$$

donde $D(t,\psi) = \psi(0) - \ell(t,\psi)$ para todo $(t,\psi)\in RxC$.

Por el teorema de representación de Riesz [73], podemos representar los funcionales $D(t,\cdot)$ y $\mathcal{L}(t,\cdot)$ como integrales de Stieltjes

$$D(t,\psi) = \psi(0) - \int_{-h}^{0}\left[d_\theta\,\mu(t,\theta)\right]\psi(\theta)\,.$$

$$\mathcal{L}(t,\psi) = \int_{-h}^{0}\left[d_\theta\,\eta\,(t,\theta)\right]\psi\,(\theta)\,.$$

para $(t,\psi)\in RxC$, donde $\mu,\eta : R^2\to R^{n^2}$ son matrices de orden nxn y de variación acotada en θ para cada t. Supondremos que μ es uniformemente no atómico en cero. Esto quiere decir que existe una función continua $m:[0,+\infty)\to R$, no decreciente, tal que $m(0)=0$ y verificando que

$$\left|\int_{-s}^{0}\left[d_\theta\ \mu(t,\theta)\right]\psi\,(\theta)\right| \leq m(s)\|\psi\|$$

para todo $\psi\in C$ y $s\in[-h,0]$. En este caso la ecuación (4.9) se dice que es una ecuación diferencial funcional de tipo neutro.

Definición. El operador D se dice que es uniformemente estable si la solución cero de la ecuación funcional $D(t,y_t)=0$ es uniforme asintóticamente estable ; es decir, existen constantes b, $c>0$ tales que si $y(\psi)$ es la solución de la ecuación $D(t,y_t)=0$, con $y_0=\psi$, entonces

$$\|y_t(\psi)\| \leq ae^{-bt}\|\psi\|\ ,\ t\geq 0, \psi\in C.$$

Ejemplo. Sea $D(\psi) = \psi(0) - \sum_{k=1}^{m} A_k\,\psi(-h_k)$, donde $-h_k\in[-h,0]$, $k=1,\dots,m$ y A_k son matrices constantes nxn. Entonces, se puede ver en [22] que si $\sum_{k=1}^{m}|A_k|<1$, el operador D es uniformemente estable. En particular, $D(\psi)=\psi(0)$, es decir, el operador que da lugar a las ecuaciones diferenciales funcionales con retraso es uniformemente estable.

En lo que sigue, supondremos que el operador D es uniformemente estable.

A continuación vamos a transformar el problema de existencia de soluciones T-periódicas de (4.9) en un problema abstracto. Para ello, sea X el espacio de Banach de funciones $x : R \to R^n$, continuas y T-periódicas con la norma

$$\|x\|_0 = \max_{t\in R} |x(t)| = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|$$

y Z el espacio de Banach de funciones continuas $z : R \to R^n$, de la forma $z(t) = dt + x(t)$, con $d \in R^n$, $x \in X$ y $x(0) = 0$, con la norma

$$\|z\|_Z = |d| + \|x\|_0$$

Si definimos los operadores

$$L : X \to Z, \ (Lx)(t) = D(t,x_t) - D(0,x_0) - \int_0^t \mathcal{L}(s,x_s)\,ds$$

$$N : X \to Z, \ (Nx)(t) = \int_0^t g(s,x_s)\,ds$$

nuestro problema es equivalente a encontrar una solución de la ecuación de operadores

$$Lx = Nx \qquad (4.10)$$

NOTA. Para ver que L está bién definido, observemos que $D(t,x_t) - D(0,x_0) \in Z$ con $d = 0$. También ,

$$\int_0^t \mathcal{L}(s,x_s)\,ds = \int_0^t \mathcal{L}(s,x_s)\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T \mathcal{L}(s,x_s)\,ds + \frac{t}{T}\int_0^T \mathcal{L}(s,x_s)\,ds =$$

$x_1(t) + dt$, donde $x_1(t) = \int_0^t \mathcal{L}(s,x_s)\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T \mathcal{L}(s,x_s)\,ds$ y $d = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{L}(s,x_s)\,ds$. Ahora bién, $x_1(t)$ es una función continua de R en R^n y

$$x_1(t+T) = \int_0^{t+T} \mathcal{L}(s,x_s)ds - \frac{t}{T}\int_0^T \mathcal{L}(s,x_s)ds - \int_0^T \mathcal{L}(s,x_s)\,ds =$$

$$= \int_0^T \mathcal{L}(s,x_s)\,ds + \int_T^{t+T} \mathcal{L}(s,x_s)\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T \mathcal{L}(s,x_s)\,ds - \int_0^T \mathcal{L}(s,x_s)\,ds =$$

$$= \int_0^t \mathcal{L}(s,x_s)\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T \mathcal{L}(s,x_s)\,ds = x_1(t).$$

Por lo tanto $x_1 \in X$ y así $Lx \in Z$. Análogamente se haría para ver que N está bién definida.

IV. 5. <u>Caso no resonante. Teorema de existencia</u>.

Supongamos que la ecuación $\frac{d}{dt}(D(t,x_t)) = \mathcal{L}(t,x_t)$ sólo tiene como solución T-periódica la solución trivial. Entonces $\ker L = \{0\}$, y además, por el teorema de la alternativa para este tipo de ecuaciones ([36]), $\operatorname{Im} L = Z$. Luego en este caso P y Q son las proyecciones nulas en X y Z respectivamente. Además $K_p = K_Q = L^{-1}$.

Proposición IV.6. L^{-1} es continua.

Demostración. Basta ver que L es continua. En efecto, si L es continua, L será cerrada y por lo tanto L^{-1} es cerrada. Ahora bién, como X y Z son espacios de Banach, por el teorema de la gráfica cerrada, L^{-1} es continua.

Para ver que L es continua, observemos que

$$\|Lx\|_Z = \max_{t\in[0,T]} \{ |D(t,x_t) - D(0,x_0)| \}$$
$$+ \max_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t \left(\mathcal{L}(s,x_s) - \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{L}(s,x_s)ds \right) dt \right| + \left| \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{L}(s,x_s)ds \right|$$

$\leq k_1 \|x\|_0$, ya que $D(t,\psi)$ y $\mathcal{L}(t,\psi)$ son operadores lineales y continuos en ψ .

Proposición IV.7. N es compacta.

Demostración. Veamos en primer lugar que N transforma subconjuntos acotados de X en subconjuntos relativamente compactos de Z. En efecto, si $B \subset X$ es acotado, entonces existe $b_1 > 0$ tal que $\|x\|_C \leq b_1$ para todo $x \in B$, o sea $\|x_t\| \leq b_1$ para todo $t \in R$ y como g transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados, existirá $b_2 > 0$ tal que $|g(t,x_t)| \leq b_2$ para todo $x \in B$ y por tanto existirá $b_3 > 0$ tal que $\|Nx\|_Z \leq b_3$. Por otra parte, si $t_1, t_2 \in [0,T]$, $|Nx(t_1) - Nx(t_2)| \leq b_2 |t_1 - t_2|$, con lo cual, el conjunto $\{Nx: x \in B\}$ es equiacotado y equicontinuo en Z. Por el teorema de Ascoli-Arzelá, toda sucesión de dicho conjunto admite una subsucesión uniformemente convergente y por lo tanto convergente en Z. Así, el conjunto $N(B)$ es relativamente compacto.

Para ver que N es continua se procede de idéntica forma a como se hizo en la proposición IV.2., utilizando el hecho anterior y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Teniendo en cuenta la nota correspondiente al teorema III.1. y la proposición anterior, N es L-compacta en subconjuntos acotados de X y podemos aplicarle a la ecuación (4.10) los teoremas de existencia abstractos dados en el capítulo III. Así, tenemos el siguiente teorema.

Teorema IV.8. Supongamos que existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$|g(t,\psi)| \leq \alpha \|\psi\| + \beta$$

para todo $(t,\psi) \in R \times C$ y que la ecuación $\frac{d}{dt}(D(t,x_t)) = \mathcal{L}(t,x_t)$ sólo tiene como solución T-periódica la solución trivial. Entonces, si $\alpha < \frac{1}{1+2T}$, la ecuación (4.9) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Vamos a ver que se verifican todas las condiciones del teorema III.3. La hipótesis i) está ya demostrada con las dos proposiciones anteriores, y las hipótesis iii) y iv) son triviales con $\mu = 0$, ya que $P = 0$, $Q = 0$. Veamos pues que se cumple ii) con

$\gamma = 0$.. En efecto, teniendo en cuenta que

$$(Nx)(t) = \int_0^t g(s,x_s)ds = \int_0^t g(s,x_s)ds - \frac{t}{T}\int_0^T g(s,x_s)ds + \frac{t}{T}\int_0^T g(s,x_s)ds$$

y la definición de la norma en Z, se tiene

$$\|Nx\|_Z = \left|\frac{1}{T}\int_0^T g(s,x_s)ds\right| + \max_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \left(g(s,x_s) - \frac{1}{T}\int_0^T g(s,x_s)ds\right)ds\right|$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T |g(s,x_s)|ds + \max_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \left(|g(s,x_s)| + \frac{1}{T}\int_0^T |g(s,x_s)|ds\right) ds\right|$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T (\alpha\|x_s\| + \beta)ds + \int_0^T \left(\alpha\|x_s\| + \beta + \frac{1}{T}\int_0^T \alpha\|x_s\| + \beta)ds\right)ds$$

$$\leq \alpha\|x\|_0 + \beta + T\alpha\|x\|_0 + T\beta + T\alpha\|x\|_0 + T\beta =$$

$$= \alpha(1+2T)\|x\|_0 + \beta(1+2T) .$$

Así pues, se verifica (3.10) con $\alpha_5 = \alpha(1+2T)$ y $\beta_5 = \beta(1+2T)$.

Como α_0 en este caso es menor estrictamente que 1, si $\alpha(1+2T) \leq \alpha_0 < 1$, o sea, $\alpha < \frac{1}{1+2T}$, la demostración está acabada.

NOTAS.

1.- El teorema se puede demostrar también transformando la ecuación $Lx = Nx$ en la ecuación equivalente $x = L^{-1}Nx$ y utilizando el corolario III.5. (teorema del punto fijo de Granas). (ver también [37]).

2.- El teorema IV. 8. generaliza el teorema 5.1. de Hale y Mawhin [39], ya que ellos consideraron el caso en que g es continua, transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados y es tal que

$$\limsup_{\|\psi\|\to+\infty} \frac{|g(t,\psi)|}{\|\psi\|} = \inf_{0<\rho<+\infty}\left\{\sup_{\|\psi\|\geq\rho} \frac{|g(t,\psi)|}{\|\psi\|}\right\} = 0$$

uniformemente en $t\in R$.

El teorema IV.8. generaliza también el teorema 1 de Fennell [27], ya que él consideró el caso en que $\ell = 0$ y g verificando la condición anterior.

IV. 6. Caso resonante. Teoremas de existencia.

Vamos a considerar ahora el caso en que la ecuación $\frac{d}{dt}(D(t,x_t)) = \mathcal{L}(t,x_t)$ tiene soluciones T-periódicas distintas de la trivial. En este caso, la condición del teorema IV.8., $|g(t,\psi)|\leq \gamma|\psi|+\beta$ no es suficiente para la existencia de soluciones T-periódicas de la ecuación (4.9) (por ejemplo, en el caso en que (4.9) es una ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea, el término $g(t)$ debe ser ortogonal, con un cierto producto escalar, a las soluciones T-periódicas de la ecuación adjunta). Es necesario, pues, añadir otras hipótesis sobre g. Generalmente estas hipótesis son de naturaleza asintótica, tal como vimos en el capítulo II y en la primera parte de este capítulo.

Nuestro objetivo es aplicar los teoremas demostrados en el capítulo III. Observándolos detenidamente se ve que es muy conveniente (a veces casi necesario), el conocimiento de las proyecciones P y Q. Esto no es fácil en general. (Incluso en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, P y Q vienen dados en función de una matriz fundamental de la ecuación homogénea y sabemos que la matriz fundamental no se puede calcular en general). (ver [34]). Por todas estas razones, vamos a considerar aquí el caso $\mathcal{L}=0$, es decir, la ecuación

$$\frac{d}{dt}(D(t,x_t)) = g(t,x_t) \qquad (4.11)$$

Bajo las anteriores consideraciones, para todo $c\in R^n$, existe una única solución T-periódica de la ecuación $D(t,x_t) = c$. Existe pues

una aplicación lineal $M : R^n \to X$, $c \to Mc$ tal que $D(t,(Mc)_t) = c$ para todo $t\in R$. Además, M es continua (ver [39]) . Ahora bién, $x\in \ker L \Leftrightarrow D(t,x_t) = D(0,x_0)$ para todo $t\in R \Leftrightarrow x = M(D(0,x_0))$. Por lo tanto $\ker L = \{ x\in X :$ existe $c\in R^n$ con $x = Mc \}$ y como M es lineal e inyectiva, $\dim \ker L = n$.

Por el teorema de la alternativa para ecuaciones del tipo $D(t,x_t) = z(t)$ (ver [36]), $\dim \ker L = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L$. Sea $Q : Z \to Z$, $(Qz)(t) = \frac{1}{T} z(T)t$, $t\in R$. Entonces, si $z\in \operatorname{Im} L$, existe $x\in X$ tal que $D(t,x_t) - D(0,x_0) = z(t)$, $t\in R$. Luego $z(T) = D(T,x_T) - D(0,x_0) = 0$, ya que D es T-periódica en t. Así, $Qz = 0$ y $\operatorname{Im} L \subset \ker Q$. Como $n = \operatorname{codim} \ker Q = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L$, $\ker Q = \operatorname{Im} L$. Además Q es continua y $Q^2 = Q$. En efecto

$$|Qz|_Z = \frac{1}{T}|z(T)| \leq \frac{1}{T}(T+1)|z|_Z$$

$$\text{y } Q^2(z)(t) = Q(Qz)(t) = \frac{1}{T}(Qz(T))t = \frac{1}{T^2} z(T)T\, t = (Qz)(t)$$

También $\operatorname{Im} L = \ker Q$ es cerrado en Z. Por otra parte, podemos definir $P : X \to X$, $Px = M(D(0,x_0))$. Entonces $P^2x = P(Px) = P(M(D(0,x_0))) = Py$, donde $M(D(0,x_0)) = y$. Entonces, $D(t,y_t) = D(0,x_0)$ y por tanto $D(0,y_0) = D(0,x_0)$. Como $P^2x = Py = M(D(0,y_0)) = M(D(0,x_0)) = Px$, $P^2 = P$. Además, como M es lineal y continua, P es lineal y continua y evidentemente $\operatorname{Im} P = \ker L$. Sea L_P la restricción de L a $\ker P$. Entonces $L_P : \ker P \to \operatorname{Im} L$ es lineal, continua y biyectiva y $\ker P$ e $\operatorname{Im} L$ son subespacios cerrados de X y Z respectivamente. Luego, por el teorema de la gráfica cerrada, la inversa $K_P : \operatorname{Im} L \to \ker P$ es continua. Hemos demostrado así la siguiente proposición.

Proposición IV.9. L es una aplicación lineal de Fredholm de índice cero y K_P es continua. Además, N es L-compacta en subconjuntos acotados de X.

Teorema IV.10. Supongamos que se verifican :

1) Existen constantes $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$, $a \in R^n$ tales que

$$|g(t,\psi)| \leq \langle a, g(t,\psi) \rangle + \alpha_1 \|\psi\| + \beta_1$$

para todo $(t,\psi) \in R\times C$.

2) Existe una función $f : R\times C \to R^n$, $(t,\psi) \to f(t,\psi)$, continua, T-periódica en t y aplicando conjuntos acotados en conjuntos acotados, y constantes $\alpha_2 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, tales que

$$|f(t,\psi)| \leq \langle a, f(t,\psi) \rangle + \alpha_2 \|\psi\| + \beta_2$$

para todo $(t,\psi) \in R\times C$.

3) Sea $\phi: X \to Z$, $(\phi x)(t) = \int_0^t f(s,x_s)ds$. Entonces, existen constantes $r > 0$, $\nu \geq 0$ tales que toda solución $x \in X$ de la familia de ecuaciones

$$\lambda QNx + (1-\lambda)Q\phi x = 0, \ \lambda \in]0,1[\qquad (4.12)$$

verifica $\|Px\|_0 \leq r + \nu \|(I-P)x\|_0$.

4) $L - \phi \in C_L(B_X(s))$ para todo $s \geq r$ y $D_L[(L,\phi),B_X(s)] \neq 0$.

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$ tal que si $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_0$, la ecuación (4.11) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Vamos a comprobar que se verifican todas las hipótesis del teorema III.2. La hipótesis a) es trivial, puesto que sabemos que K_P es continua y que N y ϕ son compactas.

Tomemos ahora el funcional $\gamma: Z \to R$, $\gamma(z) = (1+2T)\langle a, \frac{1}{T} z(T) \rangle$. Si $z \in \operatorname{Im} L$, $z \in \ker Q$ y como $(Qz)(t) = \frac{1}{T} z(T)t$, entonces $z(T) = 0$; luego $\gamma(z) = 0$ y así $\operatorname{Im} L \subset \ker \gamma$. Además, si $x \in X$, entonces

$$\|Nx\|_Z = \left| \frac{1}{T} \int_0^T g(s,x_s)ds \right| + \max_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t \left(g(s,x_s) - \frac{1}{T}\int_0^T g(s,x_s)ds\right)ds \right|$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T |g(s,x_s)|\, ds + \int_0^T \left(|g(s,x_s)| + \frac{1}{T}\int_0^T |g(s,x_s)ds| \right) ds =$$

$= \left(\frac{1}{T} + 2\right) \int_0^T |g(s,x_s)|\, ds$. Utilizando la hipótesis 1), se tiene

$$\|Nx\|_Z \leq \left(\frac{1}{T}+2\right) \int_0^T \left(\langle a, g(s,x_s) \rangle + \alpha_1 \|x_s\| + \beta_1 \right) ds$$

$$\leq \frac{1}{T}(1+2T) \int_0^T \langle a, g(s,x_s) \rangle ds + \alpha_1(2T+1)\|x\|_0 + \beta_1(2T+1) =$$

$= (1+2T) \ \langle a, \frac{1}{T}\int_0^T g(s,x_s) \rangle ds + \alpha_3 \|x\|_0 + \beta_3$, donde

$\alpha_3 = \alpha_1(2T+1)$, $\beta_3 = \beta_1(2T+1)$.

Como $(Nx)(t) = \int_0^t g(s,x_s)\, ds$, $\gamma(Nx) = (1+2T) \ \langle a, \frac{1}{T} Nx(T) \rangle =$

$= (1+2T) \ \langle a, \frac{1}{T}\int_0^T g(s,x_s)\, ds \rangle$. Luego

$$\|Nx\|_Z \leq \gamma(Nx) + \alpha_3 \|x\|_0 + \beta_3 .$$

Así, se cumple la hipótesis b). La comprobación de que se verifica c), a partir de 2), es análoga a lo hecho anteriormente. También, d) y e) son lo mismo que 3) y 4). Luego la demostración está acabada.

En el caso en que $\ker L$ esté formado por las funciones constantes (por ejemplo, si $D(t,x_t)$ no depende de t), se puede concretar la hipótesis 3) análogamente a como se ha hecho en los teoremas de los capítulos anteriores. Así tenemos la siguiente proposición.

Proposición IV.11. Supongamos que $\ker L$ está formado por las aplicaciones constantes de X y que existe $r > 0$ verificando que para todo $x \in X$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, con $\min_t |x_j(t)| \geq r$ para algún j, $1 \leq j \leq n$, se tiene

$$<\int_0^T g(t,x_t)dt, \int_0^T f(t,x_t)dt >\geq 0 \qquad (4.13)$$

no siendo simultáneamente nulas ambas integrales.

Entonces se verifica la hipótesis 3) del teorema IV.10., con $\nu = 1$.

Demostración: Análoga a la verificación de la hipótesis 4) hecha en el teorema 4.3.

Combinando el teorema IV.10. y la proposición IV.11., se tiene

Corolario IV.12. Supongamos :

1) ker L $=\{x \in \text{dom } L$: x es una aplicación constante $\}$.
2) Existen constantes $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$, $a \in R^n$, tales que

$$|g(t,\psi)| \leq < a,g(t,\psi)> + \alpha_1 \quad \|\psi\| + \beta_1$$

para todo $(t,\psi) \in RxC$.

3) Existe una función $f : RxC \to R^n$, continua, T-periódica en t y aplicando conjuntos acotados en conjuntos acotados, y constantes $\alpha_2 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, tales que

$$|f(t,\psi)| \leq <a,f(t,\psi)> + \alpha_2 \|\psi\| + \beta_2$$

para todo $(t,\psi) \in RxC$.

4) Existe $r>0$ tal que para todo $x \in X$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, con $\min_t |x_j(t)| \geq r$ para algún j, $1 \leq j \leq n$, se tiene

$$<\int_0^T g(t,x_t)dt, \int_0^T f(t,x_t)dt >\geq 0$$

no siendo nulas simultáneamente ambas integrales.

5) Si $\Phi: X \to Z$, $(\Phi x)(t) = \int_0^t f(s,x_s)ds$, entonces $L - \Phi \in C_L(B_X(s))$ y $D_L [(L,\Phi),B_X(s)] \neq 0$ para todo $s \geq r$.

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$ tal que si $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_0$, la ecuación (4.11) tiene al menos una solución T-periódica.

NOTAS.

1.- La relación que existe entre 2) y las condiciones impuestas sobre las componentes de g viene dada por la nota 4. del teorema IV.3.

2.- La hipótesis de que g aplique conjuntos acotados en conjuntos acotados es superflua si $|a| < 1$.

3.- El corolario IV.12. es la extensión a ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro del teorema IV.3., que era válido para ecuaciones diferenciales funcionales con retraso.

4.- El caso en que ker L no está formado por las aplicaciones constantes es más difícil. Hale y Mawhin [39] han introducido el concepto de propiedad "μ" para estos casos. Se dice que la aplicación M tiene la propiedad "μ" si existe $\mu > 0$ tal que $|(Mc)(t)| \geq \mu|c|$ para todo $c \in R^n$, $t \in R$. Por ejemplo, si $D(t,\psi)$ es independiente de t, entonces ker L está formado por las aplicaciones constantes, $M = I$ y $\mu = 1$.

En este caso, el corolario IV.12. seguiría siendo válido si la hipótesis 1) se sustituye por la hipótesis de que M tenga la propiedad "μ". En efecto, tenemos la siguiente proposición.

Proposición IV.13. Supongamos que el operador M asociado a la ecuación (4.11) tiene la propiedad "μ" y que existe $r>0$ verificando que para todo $x \in X$, con $\min_t |x(t)| \geq r$, se tiene

$$<\int_0^T g(t,x_t)dt, \int_0^T f(t,x_t)dt >\geq 0 \qquad (4.14)$$

no siendo simultáneamente nulas ambas integrales.

Supongamos además que se verifican las hipótesis 1),2) y 4) del teorema IV.10. Entonces la conclusión de dicho teorema es cierta.

Demostración. Sea $x \in X$ y $\lambda \in]0,1[$ tales que

$\lambda QNx + (1-\lambda)Q\phi x = 0$. Entonces $\lambda\frac{1}{T}(Nx)(T)t + (1-\lambda)\frac{1}{T}(\phi x)(T)t = 0$.

Es decir, $\lambda(Nx)(T) + (1-\lambda)(\phi x)(T) = 0$. O sea,

$$\lambda \int_0^T g(t,x_t)dt + (1-\lambda) \int_0^T f(t,x_t)dt = 0$$

Por (4.14), debe existir $t \in [0,T]$, tal que $|x(t)| < r$. Por tanto, si $Px = Mc$, tenemos

$$\mu|c| \leq |(Mc)(t)| \leq |(Px)(t)| \leq |x(t)| + |((I-P)x)(t)|$$
$$< r + \|(I-P)x\|_0 .$$

Así, $\|Px\|_0 \leq |M||c| \leq |M| [\mu^{-1}r + \mu^{-1}\|(I-P)x\|_0]$ que es

$$\|Px\|_0 \leq R_1 + \nu\|(I-P)x\|_0 \quad \text{con} \quad R_1 = |M|\mu^{-1}r \quad \text{y} \quad \nu = |M|\mu^{-1}.$$

Ahora, utilizando el teorema III.3., tendríamos

Teorema IV.14. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones :

a) $\ker L = \{x \in \mathrm{dom}\, L : x$ es una aplicación constante$\}$.

b) Existen constantes $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$, $a \in R^n$, tal que

$$|g(t,\psi)| \leq \langle a, g(t,\psi)\rangle + \alpha_1\|\psi\| + \beta_1$$

para todo $(t,\psi) \in R\times C$.

c) Existe $r>0$ tal que para todo $x \in X$, $x = (x_1,\dots,x_n)$ con $\min_t |x_j(t)| \geq r$ para algún j, $1 \leq j \leq n$, se tiene

$$\int_0^T g(t,x_t)dt \neq 0$$

d) $d_B(\mathcal{H}, B_X(s) \cap \ker L, 0) \neq 0$ para todo $s \geq r$, donde

$$\mathcal{H} : R^n \to R^n, \; c \to \frac{1}{T}\int_0^T g(t,c)dt$$

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$, tal que si $\alpha_1 \leq \alpha_0$, la ecuación (4.11) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Es trivial a partir del teorema III.3., tomando γ igual que en el teorema IV.10. y siguiendo las mismas líneas que en este último teorema.

NOTAS.

1.- El teorema IV.14. generaliza, en el caso en que $\ker L$ está formado por las aplicaciones constantes, el teorema 5.2. de Hale y Mawhin [39] pues ellos consideraron términos g no lineales asintóticos a cero. En el caso de $\ker L$ arbitrario, el teorema IV.14. sigue siendo válido si a) se sustituye por la hipótesis de que M satisfaga la propiedad "μ ".

2.- Las formas de que se verifique d) son muchas, tal como se indica en el capítulo I.

3.- El teorema IV.14. es la extensión a ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro del teorema IV.4., que era válido para ecuaciones diferenciales funcionales con retraso.

IV.7. El caso escalar resonante. Ejemplos.

Esta proposición se puede considerar como la extensión a ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro de la proposición II.7. y servirá para establecer condiciones asintóticas relacionadas con el signo de $x(t)$, cuando $\min_t |x(t)|$ es suficientemente grande.

Proposición IV.15. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones :

1) $\ker L = \{ x \in \mathrm{dom}\, L : x$ es una aplicación constante $\}$.

2) Existen una función $V : R \to R$, $V \in C^1(R)$, $a \in R$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$, tales que

$|V'(x)| \leq aV'(x) + \alpha_1 |x| + \beta_1$, para todo $x \in R$.

3) Existe $r>0$ tal que para todo $x \in X$, con $\min_t |x(t)| \geq r$, se tiene

$$\int_0^T V'(x(t))dt \neq 0$$

Entonces, existen $\alpha_0 > 0$ y $r_1 > 0$ tal que si $\alpha_1 \leq \alpha_0$, se tiene

$$|D_L[(L,\phi),B_X(s)]| = |d_B(V',B_X(s) \cap \ker L,0)|$$

para todo $s \geq r_1$, donde $\phi : X \to Z$, $(\phi x)(t) = \int_0^t V'(x(s))\,ds$.

Demostración. Evidentemente ϕ es L-compacta en conjuntos acotados de X. Consideremos ahora la aplicación

$F : X\times[0,1] \to Z$, $(x,\lambda) \to Lx - \lambda\phi x - (1-\lambda)Q\phi x$

Como $\lambda\phi x + (1-\lambda)Q\phi x$ es L-compacta en subconjuntos acotados de X, si existe Ω , abierto y acotado de X, con $\overline{\Omega} \neq \phi$ tal que $F(x,\lambda) \neq 0$ para todo $(x,\lambda) \in (\partial\Omega)\times[0,1]$, entonces, por la propiedad de invarianza por homotopía,

$$|D_L[(F(\cdot,1),\Omega)]| = |D_L[(L,\phi),\Omega]| = |D_L(F(\cdot,0),\Omega)| = |D_L[(L,Q\phi),\Omega]|$$

y como $Q(Z) \subset Z_1 = \operatorname{Im} Q$ tal que $Z = \operatorname{Im} L \oplus Z_1$, entonces

$$|D_L[(L,\phi),\Omega]| = |d_B(Q\phi_{\ker L}, \Omega \cap \ker L,0)|$$

Ahora bién, si $x \in \ker L$, x es constante, y por tanto

$$(\phi x)(t) = \int_0^t V'(x)ds = tV'(x)$$

Luego, $|d_B(Q\phi_{\ker L}, \Omega \cap \ker L,0)| = |d_B(V', \Omega \cap \ker L,0)|$ como queríamos demostrar. Lo único que queda pues es encontrar Ω .

Para ello, consideremos la familia de ecuaciones

$$Lx = \lambda\phi x + (1-\lambda)Q\phi x \quad , \lambda \in [0,1] \quad , x \in X, \tag{4.15}$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones

$$Q\phi x = 0, \; x - Px = \lambda K_p(I-Q)\phi x \tag{4.16}$$

Si $\gamma : Z \to R$, $\gamma(z) = (1+2T)\frac{a}{T} z(T)$, entonces $\ker Q \subset \ker\gamma$ y

$$\|\phi x\|_Z = \left|\frac{1}{T}\int_0^T V'(x(s))ds\right| + \max_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t (V'(x(s)) - \frac{1}{T}\int_0^T V'(x(u))du\,)ds\right|$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T |V'(x(s))|ds + \int_0^T (|V'(x(s))| + \frac{1}{T}\int_0^T |V'(x(u))|du\,)ds =$$

$$= \frac{(1+2T)}{T}\int_0^T |V'(x(s))|ds \leq \frac{(1+2T)}{T}\int_0^T (aV'(x(s)) + \alpha_1|x(s)| + \beta_1)ds$$

$$\leq (1+2T)\frac{1}{T}\int_0^T aV'(x(s))\,ds + \alpha_1(1+2T)\|x\|_0 + \beta =$$

$= \gamma(\phi x) + \alpha_1(1+2T)\|x\|_0 + \beta$, y como $Q\phi x = 0$, $\phi x \in \ker Q \subset \ker\gamma$; luego $\gamma(\phi x) = 0$ y así

$$\|\phi x\|_Z \leq \alpha_1(1+2T)\|x\|_0 + \beta \tag{4.17}$$

Aplicando Q a ambos miembros de (4.15) se tiene $Q\phi x = 0$. Luego $\int_0^T V'(x(t))dt = 0$ y así, por la hipótesis 3), debe existir $t \in [0,T]$ tal que $|x(t)| < r$. Luego, como $\operatorname{Im} P = \ker L$, se tiene

$$\|Px\|_0 = |(Px)(t)| \leq |x(t)| + |((I-P)x)(t)| < r + \|(I-P)x\|_0 \tag{4.18}$$

Por último, teniendo en cuenta (4.16), (4.17) y (4.18), se tiene

$$\|x\|_0 \leq \|x - Px\|_0 + \|Px\|_0 \leq k\ \|\phi x\|_Z + r + \|(I - P)x\|_0$$

$$\leq k\ \|\phi x\|_Z + r + k\ \|\phi x\|_Z = r + 2k\ \|\phi\ x\|_Z \leq r + 2k\ [\alpha_1(1+2T)\ \|x\|_0 + \beta] =$$

$$= r + 2k\ \beta + 2k\ \alpha_1(1 + 2T)\ \|x\|_0.$$

Si $1 - 2k\ \alpha_1(1 + 2T) > 0$, entonces

$$\|x\|_0 \leq (1 - 2k\ \alpha_1(1 + 2T))^{-1}(r + 2k\beta\ )$$

como queríamos demostrar.

Teniendo en cuenta esta proposición, deducimos el siguiente corolario.

Corolario IV.16. Supongamos que se verifican :

i) $\ker L = \{\ x \in \mathrm{dom}\ L\ :\ x$ es una aplicación constante $\}$.

ii) Existen constantes $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$, tales que

$$|g(t,\psi)| \leq g(t,\psi) + \alpha_1 \|\psi\| + \beta_1$$

para todo $(t,\psi) \in R \times C$.

iii) Existe $r > 0$ tal que para todo $x \in X$, con $\min_t |x(t)| \geq r$, se tiene

$$\operatorname{sign} x(t) \int_0^T g(t,x_t)dt \geq 0$$

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$, tal que si $\alpha_1 \leq \alpha_0$, la ecuación (4.11) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Tomemos en el corolario IV.12.

$f : R \times C \to R$, $(t,\psi) \to V'(\psi(0))$, donde $V : R \to R$ tal que $V(x) = \frac{\varepsilon x^2}{2}$ y $\varepsilon \in R^+$; es decir, $f(t,\psi) = \varepsilon\psi(0)$. Evidentemente, f es continua, T-periódica en t y aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Además, $|f(t,\psi)| = |\varepsilon\psi(0)| \leq \varepsilon\ \psi(0) + 2\|\psi\|\varepsilon = f(t,\psi) + 2\varepsilon\ \|\psi\|$.

Así, se verifican las condiciones 1),2) y 3) del corolario IV.12., con $a = 1$. La hipótesis 4) sería ahora

$$\int_0^T g(t,x_t)dt \int_0^T \varepsilon x(t)dt \geq 0$$

y como $\min_t |x(t)| \geq r > 0$, x debe tener signo constante y por lo tanto la hipótesis 4) del corolario IV.12. es ahora la hipótesis iii).

Por otra parte

$$\phi : X \to Z,\quad (\phi x)(t) = \int_0^t f(s,x_s)ds = \int_0^t \varepsilon\ x(s)ds = \int_0^t V'(x(s))ds$$

y V está en las condiciones de la proposición IV.15. Luego existe $r_1 > 0$ tal que

$$|\ D_L[(L,\phi),B_X(s)]\ | = |d_B(V',B_X(s) \cap \ker L,0)| \neq 0 \quad \text{para todo } s \geq r_1.$$

Por lo tanto, se verifican todas las condiciones del corolario IV.12. y la demostración está completa.

NOTAS.

1.- El corolario IV.16. sigue siendo cierto si la condición ii) se sustituye por

$$|g(t,\psi)| \leq -g(t,\psi) + \alpha_1 \|\psi\| + \beta_1 \quad .$$

El interés de este tipo de condiciones es que no suponen restricción para g cuando g tiene signo constante.

2.- Análogamente a como se hizo en el capítulo II, a partir de este corolario se pueden obtener condiciones asintóticas de tipo Landesman-Lazer en el caso en que $g(t,\psi) = G(t,\psi(-h))$. Esto supondría la extensión a ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro del corolario II.10., que era válido para ecuaciones diferenciales ordinarias y del corolario IV.5., que era válido para ecuaciones diferenciales funcionales con retraso.

3.- También, el corolario IV.16. se podría haber demostrado sustituyendo la condición i) por la condición de que M satisfaga la propiedad " μ ".

Ejemplos.

1.- Consideremos la ecuación de tipo neutro

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) - \sum_{k=1}^{m} a_k x(t - h_k)\right) = e^{x(t - h)} + f(t) \qquad (4.19)$$

donde $-h_k \in [-h,0]$ y a_k, $k = 1,\dots,m$, son constantes reales tales que $\sum_{k=1}^{m} |a_k| < 1$. Supongamos también que $f : R \to R$ es continua, T-periódica ($T > 0$) y que $\int_0^T f(s)ds < 0$. Entonces, la ecuación (4.19) tiene al menos una solución T-periódica. En efecto, si

$$D : RxC \to R,\ (t,\psi) \to \psi(0) - \sum_{k=1}^{m} a_k \psi(-h_k)$$

entonces D verifica las condiciones impuestas en el apartado IV.4. (ver [22]) y en particular, D es uniformemente estable. Como D no depende de t, ker L está formado por las aplicaciones constantes. Por otra parte, si

$$g : RxC \to R,\ (t,\psi) \to e^{\psi(-h)} + f(t)$$

entonces, g es continua, T-periódica en t y aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados. Además, si $(t,\psi) \in RxC$, tenemos que $|g(t,\psi)| \leqslant g(t,\psi) + \beta_1$, donde $\beta_1 > 0$. Por otra parte, si $|x(t)| \geqslant r > 0$, para todo $t \in R$, y r es suficientemente grande,

$$\int_0^T (e^{x(t - h)} + f(t))\, dt$$

tiene el mismo signo que $x(t)$. Por tanto, se cumplen todas las condiciones del corolario IV.16., con $\alpha_1 = 0$.

2.- Sea ahora la ecuación

$$\frac{d}{dt}(x(t) - ax(t - h)) = x(t - h)e^{x(t - h)} + f(t)$$

donde $h \geqslant 0$, y $|a| < 1$. Sea $f : R \to R$ continua, T-periódica tal que $\int_0^T f(t)dt = 0$. Entonces, aplicando nuevamente el corolario IV.16., esta ecuación tiene al menos una solución T-periódica (ver la discusión del ejemplo 2. en IV.3.)

Capítulo V

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS DE ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES FUNCIONALES NO LINEALES CON RETRASO DE PRIMER ORDEN

Consideremos la ecuación diferencial funcional con retraso

$$x'(t) = g(t,x(t),x_t) \tag{5.1}$$

donde $g : R\times R^n \times C \to R^n$, $(t,x,\psi) \to g(t,x,\psi)$ es continua, T-periódica en t ($T>0$) y aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados. La ecuación (5.1) es un caso particular de ecuaciones del tipo

$$x'(t) = f(t,x_t) \tag{5.2}$$

donde $f : R\times C \to R^n$, $(t,\psi) \to f(t,\psi)$. En efecto, si tomamos $f(t,x_t) = g(t,\ell(x_t))$, donde $\ell : C \to R^n\times C$, $\psi \to (\psi(0),\psi)$, entonces $f(t,x_t) = g(t,x(t),x_t)$. Sin embargo, nosotros vamos a adoptar la forma (5.1) porque es más conveniente para el tipo de hipótesis que se hacen sobre g.

Queremos estudiar la existencia de soluciones T-periódicas de la ecuación (5.1). Para ello, en primer lugar, planteamos este problema de forma abstracta.

Sea X el espacio de Banach de aplicaciones $x : R \to R^n$, continuas y T-periódicas con la norma $\|x\|_0 = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|$, donde $|\cdot|$ es una norma cualquiera en R^n. Consideremos los operadores

$L : \operatorname{dom} L \subset X \to X$ definido por

$\operatorname{dom} L = \{x\in X : x \text{ es de clase } C^1\}$, $Lx = x'$

$N : X \to X$, $(Nx)(t) = g(t,x(t),x_t)$

Entonces, nuestro problema es equivalente a estudiar la existencia de soluciones para la ecuación de operadores

$$Lx = Nx \tag{5.3}$$

Es trivial que $\ker L = \{ x \in \mathrm{dom}\, L : x$ es una aplicación constante$\}$ y por lo tanto, por el teorema de la alternativa de Fredholm,

$\mathrm{Im}\, L = \{ y \in X : \int_0^T y(t)dt = 0 \}$. Además, teniendo en cuenta la norma definida en X, $\mathrm{Im}\, L$ es cerrado en X y $n = \dim \ker L = \mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\, L$. Por lo tanto L es una aplicación de Fredholm de índice cero y existen proyecciones continuas $P : X \to X$, $Q : X \to X$, tales que $\mathrm{Im}\, P = \ker L$, $\mathrm{Im}\, L = \ker Q$. En este caso podemos tomar $Px = x(0)$,

$Qx = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt$, para todo $x \in X$. La aplicación $L_P = L|_{\ker P}$ es biyectiva sobre $\mathrm{Im}\, L$ y su inversa, $K_P : \mathrm{Im}\, L \to \mathrm{dom}\, L \cap \ker P$, viene dada en este caso por

$$(K_P y)(t) = \int_0^t y(s)ds \qquad \text{para todo } y \in \mathrm{Im}\, L .$$

Como $\|K_P y\|_0 \leq T \|y\|_0$, K_P es continua y si B es cualquier subconjunto acotado de $\mathrm{Im}\, L$, entonces $K_P B$ es acotado en X. Además, para todo y B, $LK_P y = y$, es decir, $(K_P y)'(t) = y(t)$. Luego el conjunto $\{(K_P y)' : y \in B \}$ es acotado en X y por el teorema de Ascolí-Arzelá, $K_P(B)$ es relativamente compacto en X. Por tanto, K_P es compacta.

La demostración de que N es L-compacta en subconjuntos acotados de X sería la misma que en la proposición IV.2.

Estamos, pues, en condiciones de aplicarle a la ecuación (5.3) los teoremas de existencia del capítulo I.

Teorema V.1. Supongamos que existen funciones

$U, V : R^n \to R_0^+$ de clase C^1 $(R_0^+ = R^+ \cup \{0\})$

$J : X \to X$, continua y aplicando conjuntos acotados en conjuntos acotados

$a, b : R \to R^+$, continuas

$\gamma : R_0^+ \to R^+$, continua

y números reales α , $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, tales que

1) $\lim_{|x| \to +\infty} \Gamma(U(x)) = +\infty$, donde $\Gamma : R_0^+ \to R$, $u \to \int_0^u \frac{ds}{\gamma(s)}$.

2) $$\left| \frac{\langle U'(x), g(t,x,\psi)\rangle}{\gamma(U(x))} \right| \leq \alpha \frac{\langle U'(x), g(t,x,\psi)\rangle}{\gamma(U(x))} + \alpha_1 \Gamma(U(x)) + a(t)$$

para todo $(t,x,\psi) \in R \times R^n \times C$. ($\langle\ \rangle$ es el producto escalar ordinario en R^n) .

3) $$\left| \frac{\langle U'(x(t)), (Jx)(t)\rangle}{\gamma(U(x(t)))} \right| \leq \alpha \frac{\langle U'(x(t)), (Jx)(t)\rangle}{\gamma(U(x(t)))} + \alpha_2 \Gamma(U(x(t))) + b(t) .$$

para todo $x \in X$, $t \in R$.

4) Existe $r > 0$ tal que para todo $x \in X$ con $\min_t |x(t)| \geq r$, se tiene

$$\int_0^T \frac{\langle V'(x(t)), g(t, x(t), x_t)\rangle}{\gamma(V(x(t)))} dt \cdot \int_0^T \frac{\langle V'(x(t)), (Jx)(t)\rangle}{\gamma(V(x(t)))} dt \geq 0$$

no siendo nulas simultáneamente ambas integrales.

5) $L - J \in C_L(B_X(s))$ y $D_L[(L,J), B_X(s)] \neq 0$ para todo $s \geq r$.

Entonces, existe $\alpha_0 > 0$ tal que si $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_0$, la ecuación (5.1) tiene al menos una solución T-periódica.

<u>Demostración</u>. Vamos a aplicar el teorema I.4., con $\Phi = J$. Para demostrar que se cumplen todas las hipótesis de este teorema, basta probar que las soluciones de la familia de ecuaciones

$$\lambda(Lx - Nx) + (1-\lambda)(Lx - Jx) = 0, \quad \lambda \in]0,1[\tag{5.4}$$

están acotadas a priori. Sabemos que (5.4) es equivalente a

$$x'(t) = \lambda g(t,x(t),x_t) + (1-\lambda)(Jx)(t) \quad \lambda \in]0,1[\tag{5.5}$$

Supongamos que las soluciones T-periódicas de (5.5) no están acotadas a priori. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, existen $\lambda_n \in]0,1[$ y x^n, solución T-periódica de (5.5) con $\lambda = \lambda_n$, tal que $\|x^n\|_0 \geq n$.

Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación $\Gamma \circ U \circ x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \to \Gamma(U(x^n(t)))$. $\Gamma \circ U \circ x^n$ es una aplicación de clase C^1 y T-periódica, pues x^n lo es y Γ y U son aplicaciones de clase C^1. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen t_n^1 y t_n^2 en $[0,T]$ donde $\Gamma \circ U \circ x^n$ tiene su máximo y mínimo absolutos respectivamente. Entonces,

$$(\Gamma \circ U \circ x^n)(t_n^1) - (\Gamma \circ U \circ x^n)(t_n^2) = \int_{t_n^2}^{t_n^1} (\Gamma \circ U \circ x^n)'(t)\, dt =$$

$$= \int_{t_n^2}^{t_n^1} \frac{< U'(x^n(t)),(x^n)'(t)>}{\gamma(U(x^n(t)))}\, dt =$$

$$= \int_{t_n^2}^{t_n^1} \frac{< U'(x^n(t)),\lambda_n g(t,x^n(t),x_t^n) + (1-\lambda_n)(Jx^n)(t) >}{\gamma(U(x^n(t)))}\, dt =$$

$$= \lambda_n \int_{t_n^2}^{t_n^1} \frac{< U'(x^n(t)),g(t,x^n(t),x_t^n) >}{\gamma(U(x^n(t)))}\, dt +$$

$$+ (1-\lambda_n) \int_{t_n^2}^{t_n^1} \frac{< U'(x^n(t)),(Jx^n)(t)>}{\gamma(U(x^n(t)))}\, dt$$

Teniendo en cuenta las hipótesis 2) y 3), se tendrá

$$(\Gamma \circ U \circ x^n)(t_n^1) - (\Gamma \circ U \circ x^n)(t_n^2) \leq \lambda_n \int_0^T \left| \frac{< U'(x^n(t)),g(t,x^n(t),x_t^n) >}{\gamma(U(x^n(t)))} \right| dt +$$

$$+ (1-\lambda_n) \int_0^T \left| \frac{< U'(x^n(t)),(Jx^n)(t) >}{\gamma(U(x^n(t)))} \right| dt \leq$$

$$\leq \lambda_n \int_0^T \left(\alpha \frac{< U'(x^n(t)),g(t,x^n(t),x_t^n) >}{\gamma(U(x^n(t)))} + \alpha_1 \Gamma(U(x^n(t))) + a(t)\right) dt +$$

$$+ (1-\lambda_n) \int_0^T \left(\alpha \frac{< U'(x^n(t)),(Jx^n)(t) >}{\gamma(U(x^n(t)))} + \alpha_2 \Gamma(U(x^n(t))) + b(t)\right) dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \alpha \frac{< U'(x^n(t)),\lambda_n g(t,x^n(t),x_t^n) + (1-\lambda_n)(Jx^n)(t) >}{\gamma(U(x^n(t)))}\, dt +$$

$$\int_0^T ((\alpha_1 + \alpha_2) \Gamma(U(x^n(t))) + a(t) + b(t))\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \alpha (\Gamma \circ U \circ x^n)'(t)\, dt + T(\alpha_1+\alpha_2)\, \Gamma(U(x^n(t_n^1))) + \beta =$$

$= T(\alpha_1+\alpha_2)\, \Gamma(U(x^n(t_n^1))) + \beta$, pues el primer sumando es cero, y

$$\beta = \int_0^T (a(t) + b(t))\, dt.$$

Así pues,

$$(\Gamma\circ U\circ x^n)(t_n^1) - (\Gamma\circ U\circ x^n)(t_n^2) \leqslant (\alpha_1+\alpha_2)T(\Gamma\circ U\circ x^n)(t_n^1) + \beta$$

O sea,

$$(1 - (\alpha_1+\alpha_2)T)(\Gamma\circ U\circ x^n)(t_n^1) \leqslant (\Gamma\circ U\circ x^n)(t_n^2) + \beta .$$

Sea, para cada n, $t_n^3 \in [0,T]$, tal que $\|x^n\|_0 = |x^n(t_n^3)| \geqslant n$.

Entonces

$$(\Gamma\circ U\circ x^n)(t_n^1) \geqslant (\Gamma\circ U\circ x^n)(t_n^3)$$

y como $\lim_{n\to+\infty} |x^n(t_n^3)| = \infty$, se tiene, por la hipótesis 1) que

$\lim_{n\to+\infty} (\Gamma\circ U\circ x^n)(t_n^1) = +\infty$. Si $1 > (\alpha_1+\alpha_2)T$, es decir, $\alpha_1+\alpha_2 \leqslant \alpha_0 < \frac{1}{T}$,

$\lim_{n\to+\infty} (\Gamma\circ U\circ x^n)(t_n^2) = +\infty$, y por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$\min_t |x^n(t)| \geqslant r$ para todo $n \geqslant n_0$. Multiplicando escalarmente ambos miembros de (5.5) con $\lambda = \lambda_n$, $x = x^n$, por $\dfrac{V'(x^n(t))}{\gamma(V(x^n(t)))}$ e integrando entre 0 y T, se tiene :

$$0 = \lambda_n \int_0^T \frac{< V'(x^n(t)), g(t,x^n(t),x_t^n) >}{\gamma(V(x^n(t)))}\, dt \; +$$

$$+ (1 - \lambda_n) \int_0^T \frac{< V'(x^n(t)), (Jx^n)(t) >}{\gamma(V(x^n(t)))}\, dt$$

lo cual contradice la hipótesis 4). Así pues, la demostración está completa.

NOTAS.

1.- El teorema V.1. extiende y generaliza los resultados de Gossez [32], y Mawhin-Walter [59], ya que ellos consideraron ecuaciones diferenciales ordinarias y el caso en que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha = \pm 1$.

2.- Si $\alpha = 1$ (resp. -1) y

$$\frac{< U'(x), g(t,x,\psi) >}{\gamma(U(x))} \geqslant 0 \text{ (resp. } \leqslant 0)$$

la hipótesis 2) no supone ningún tipo de restricción para el término no lineal g.

3.- La aplicación J puede venir dada por una aplicación $j : R\times R^n\times C \to R^n$, $(t,x,\psi) \to j(t,x,\psi)$, continua, T-periódica en t y aplicando conjuntos acotados en conjuntos acotados tal que cumpla

i) $$\left| \frac{< U'(x), j(t,x,\psi) >}{\gamma(U(x))} \right| \leqslant \alpha \frac{< U'(x), j(t,x,\psi) >}{\gamma(U(x))} + \alpha_2 \Gamma(U(x)) + b(t)$$

para todo $(t,x,\psi) \in R\times R^n\times C$.

ii) Existe $r > 0$ tal que para todo $x \in X$ con $\min_t |x(t)| \geqslant r$, se tiene

$$\int_0^T \frac{< V'(x(t)), g(t,x(t),x_t) >}{\gamma(V(x(t)))}\, dt \cdot \int_0^T \frac{< V'(x(t)), j(t,x(t),x_t) >}{\gamma(V(x(t)))}\, dt \geqslant 0$$

no siendo nulos simultáneamente ambos factores.

Para ello, basta tomar $J : X \to X$, $(Jx)(t) = j(t,x(t),x_t)$

4.- Puede ser de utilidad disponer de criterios para saber cuándo $L - J \in C_L(B_X(s))$. En el caso, en que $j : R\times R^n\times C \to R^n$, sea continua, T-periódica en t y aplicando conjuntos acotados en conjuntos acotados y cumpla las condiciones

$$\text{i)}\left|\frac{<U'(x),j(t,x,\psi)>}{\gamma(U(x))}\right| \leq \alpha\frac{<U'(x),j(t,x,\psi)>}{\gamma(U(x))} + \alpha_2\,\Gamma(U(x)) + b(t)$$

ii) Existe $r>0$ tal que para todo $x \in X$ con $\min_t |x(t)| \geq r$, se tiene

$$\int_0^T \frac{<V'(x(t)),j(t,x(t),x_t)>}{\gamma(V(x(t)))}\,dt \neq 0$$

con U y V como en el teorema V.1., entonces existe $r_1 > 0$ tal que $L - J \in C_L(B_X(s))$ para todo $s \geq r_1$, donde $J : X \to X$, $(Jx)(t) = j(t,x(t),x_t)$.

En efecto, basta tomar en (5.5) $\lambda = 0$ y realizar el mismo proceso de demostración que en el teorema V.1.

5.- El teorema V.1. se podía haber demostrado suponiendo sólo condiciones de Caratheodory para g y entendiendo el concepto de solución en el sentido de Caratheodory. En este caso, habría que tomar $Z = L^1\ [0,T]$.

Corolario V.2. Supongamos que existen funciones :

$V : R^n \to R_0^+$, $V \in C^1(R^n)$, $\lim_{|x|\to +\infty} V(x) = +\infty$

$\gamma : R \to R^+$, continua con $\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\gamma(s)} = +\infty$

$a : R \to R^+$, continua

tales que

i) $<V'(x),g(t,x,\psi)> \leq \frac{1}{2}\,a(t)\,\gamma(V(x))$ para todo $(t,x,\psi) \in R\times R^n \times C$.

ii) Existe $r>0$ tal que para todo $x \in \operatorname{dom} L$ con $\min_t |x(t)| \geq r$, se tiene

$$\int_0^T \frac{<V'(x(t)),g(t,x(t),x_t)>}{\gamma(V(x(t)))}\,dt \leq 0$$

iii) $V'(x) \neq 0$ para todo $x \in R^n$ tal que $|x| \geq r$.

Entonces, la ecuación (5.1) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Tomemos en el teorema V.1., $U = V$, $\alpha = -1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $b(t) = a(t)$ y $J : X \to X$, $(Jx)(t) = -V'(x(t))$. Entonces

$$\lim_{|x|\to+\infty} \Gamma(V(x)) = \lim_{|x|\to+\infty} \int_0^{V(x)} \frac{ds}{\gamma(s)} = +\infty$$

pues $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$. Además, la hipótesis 2) del teorema V.1., con $\alpha = -1$, queda ahora

$$\frac{<V'(x),g(t,x,\psi)>}{\gamma(V(x))} \leq -\frac{<V'(x),g(t,x,\psi)>}{\gamma(V(x))} + a(t)$$

que es equivalente a la hipótesis i).

La hipótesis 3) del teorema V.5. es inmediata, pues

$$\frac{<V'(x(t)),\ -V'(x(t))>}{\gamma(V(x(t)))} \leq 0$$

La hipótesis 4) del teorema V.5. es equivalente a ii) y $V'(x) \neq 0$. Además, por el lema VI.1. en Mawhin [58], $L - J \in C_L(B_X(s))$ para s mayor que un cierto $r_1 > 0$ y

$$|\,D_L[\,(L,J),B_X(s)]\,| = |\,d_B(V',B_X(s)\cap \ker L,0)| \neq 0$$

por el teorema de krasnosels'kii.

Así pues se verifican todas las condiciones del teorema V.1. y la demostración está completa.

NOTAS.

1.- El corolario V.2. constituye una generalización de un resultado de Mawhin y Walter [59] ya que ellos consideraron la hipótesis

$$\int_0^T \lim_{n\to+\infty} \sup_{\substack{|x|\geq n\\ \psi\in C}} \frac{\langle V'(x),g(t,x,\psi)\rangle}{\gamma(V(x))} < 0$$

que es menos general que la hipótesis ii).

2.- El corolario V.2. constituye también una generalización del método de las funciones guía para ecuaciones diferenciales funcionales (ver Mawhin [52]). En efecto, una función guía para la ecuación (5.1) es una función $V : R^n \to R$, $V \in C^1(R^n)$ y tal que existe $r > 0$ verificando que $\langle V'(x),g(t,x,\psi)\rangle < 0$ para todo $x \in R^n$ con $|x| \geq r$.

3.- Tomando, en el caso $n = 1$, $V(x) = x^2$, $\gamma(s) = 2(\sqrt{s} + 1)$, obtendríamos condiciones de tipo Landesman-Lazer para la ecuación (5.1) (ver [59]).

Utilizando el teorema I.5., obtenemos el siguiente teorema

Teorema V.3. Supongamos que existen funciones

$U : R^n \to R_0^+$ de clase C^1

$a : R \to R^+$ continua

$\gamma : R_0^+ \to R^+$ continua tal que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\gamma(s)}\, ds = +\infty$

tales que :

i) $\langle U'(x),g(t,x,\psi)\rangle \leq a(t)\,\gamma(U(x))$ para todo $(t,x,\psi) \in R\times R^n\times C$.

ii) Existe $r>0$ tal que para todo $x \in \text{dom } L$, con $\min_t |x(t)| \geq r$, se tiene

$$\int_0^T g(t,x(t),x_t)\, dt \neq 0$$

iii) $d_B(\phi, B_\chi(s) \cap \ker L, 0) \neq 0$ para todo $s \geq r$, donde

$$\phi : R^n \to R^n,\ c \to \frac{1}{T}\int_0^T g(t,c,(c)_t)dt$$

Entonces, la ecuación (5.1) tiene al menos una solución T-periódica.

Demostración. Consideremos la familia de ecuaciones

$$x'(t) = \lambda\, g(t,x(t),x_t),\ \lambda \in]0,1[\qquad (5.6)$$

Entonces, multiplicando escalarmente ambos miembros de (5.6) por $\dfrac{U'(x(t))}{\gamma(U(x(t))}$, se tiene

$$\frac{\langle U'(x(t)),x'(t)\rangle}{\gamma(U(x(t)))} = \lambda \frac{\langle U'(x(t)),g(t,x(t),x_t)\rangle}{\gamma(U(x(t)))} \leq a(t)$$

Entonces, $(\Gamma\circ U\circ x)'(t) \leq a(t)$. Procediendo análogamente a como se hizo en el teorema V.1., se deduce que si las soluciones de (5.6) no están acotadas a priori, entonces existe alguna solución x tal que $\min_t |x(t)| \geq r$, lo cual contradice ii). Además, si $x \in \ker L$, x es constante y si $|x| \geq r$,

$$QNx = \frac{1}{T}\int_0^T g(t,x,x_t)dt \neq 0 \quad \text{por ii).}$$

Por otra parte, las hipótesis iii) del teorema I.5. y del teorema V.3. son equivalentes. Por tanto, se verifican todas las hipótesis del teorema I.5. y la demostración está completa.

Los resultados de este capítulo forman parte del trabajo de investigación [18], premiado por la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada.

NOTAS FINALES

En estas notas finales vamos a exponer algunas posibles líneas de continuación de la investigación iniciada en los capítulos anteriores. Todas ellas están muy relacionadas entre sí y si las separamos por apartados es con el objetivo de clarificarlas separadamente.

1.- Observemos que en los teoremas demostrados generalmente aparecen dos tipos de condiciones : una condición de "crecimiento" y otra condición de tipo "asintótico". Por ejemplo, en el teorema II.5., la condición

a) Existen $a \in R^n$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,m$ y una aplicación continua $\beta: R \to R$ tal que

$$|g(t,x_1,\ldots,x_m)| \leq \langle a, g(t,x_1,\ldots,x_m)\rangle + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i |x_i| + \beta(t)$$

para todo $(t,x_1,\ldots,x_m) \in R \times (R^n)^m$

es de tipo "crecimiento" y la condición

b) Existe $r > 0$ tal que para todo $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \operatorname{dom} L$, con $\min_t |x_j(t)| \geq r$, para algún j, $1 \leq j \leq n$, se tiene

$$\int_0^T (g(t,x(t),\ldots,x^{(m-1)}(t)) + f(t))\, dt \neq 0$$

es de tipo "asintótico".

La condición a) incluye términos no lineales g de tipo exponencial y de tipo (Q), así como funciones g con componentes de signo constante. Sería muy interesante tratar de generalizar la condición de tipo a) para tener un tipo de términos no lineales más amplio. Evidentemente, esta tarea no es fácil, ya que el problema de calcular las cotas a priori se complicaría enormemente. Pero esta dificultad hace el problema interesante por dos motivos : el primero, porque podríamos considerar un espectro más amplio de términos no lineales y el segundo, porque nos veríamos seguramente obligados a buscar nuevos métodos de cálculo de cotas a priori. Esto tendría aplicaciones a otros tipos de ecuaciones, no solamente a las clases de ecuaciones diferenciales consideradas en esta memoria.

Referente a la condición b), dicha condición la hemos expresado en el caso escalar mediante las condiciones de tipo Landesman-Lazer, generalmente más fáciles de comprobar en la práctica. ¿Cómo se generalizan las condiciones de Landesman-Lazer a dimensiones superiores?. ¿Qué otro tipo de condiciones asintóticas son interesantes a considerar?. Evidentemente, estas preguntas por sí solas definen una línea de investigación bastante amplia. Los trabajos de Bates-Ward [3], Chang [23], Fucik y Lovicar [30], Gupta [33], Palmer [67] y Reissig [72], junto con los teoremas desarrollados en esta memoria, pueden considerarse un buen punto de partida.

2.- En los teoremas que hemos demostrado se observa también que imponemos la hipótesis de que g aplique conjuntos acotados en conjuntos acotados y además, g no puede depender de la derivada de mayor orden en la ecuación considerada. Estas restricciones se imponen para que la aplicación no lineal N sea L-compacta, condición necesaria para poder aplicar la teoría del grado de coincidencia. Mediante teorías del grado más generales, tales como la teoría del grado para las aplicaciones A-propias (ver [69]), y para las k-contracciones (ver [40], [41]), se pueden a veces eliminar estas restricciones. Sin embargo, las no linealidades consideradas por nosotros no han sido consideradas aún en este contexto. Podríamos, pues, intentar extender nuestros resultados a no linealidades del tipo mencionado utilizando estas teorías del grado más generales que la que aquí hemos considerado.

3.- Los teoremas demostrados en el capítulo III tienen un abanico más amplio de posibilidades de aplicaciones que las que aquí hemos considerado. Interesaría ver cómo se pueden aplicar estos teoremas a otros

tipos de problemas de contorno y no sólo al problema de contorno periódico; por ejemplo, problemas de contorno del tipo Neumann (ver [54]) e incluso problemas de contorno con condiciones de contorno no lineales (ver [26], [31], [79]). Probablemente será necesario modificar algunas hipótesis para que sean aplicables a estos tipos de problemas, o incluso intentar obtener nuevos teoremas abstractos que generalizen los ya demostrados. Así, podríamos aplicarlos a otro tipo de ecuaciones, tales como las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico (ver [54]) y ecuaciones diferenciales en espacios de Hilbert (ver [60]). En este último caso, el núcleo del operador L suele ser de dimensión infinita y será necesario combinar herramientas de análisis funcional no lineal y operadores monótonos (ver [9]), para llegar a teoremas de existencia. En este sentido se pueden consultar los trabajos de Mawhin y Willem [61], [62], [63] y de Nirenberg y Brezis [10].

4.- En otro contexto diferente, las soluciones periódicas pueden aparecer cuando se presenta una bifurcación de Hopf (ver [42], [51]). Esto se da en ecuaciones diferenciales dependientes de un parámetro; por ejemplo, en ecuaciones diferenciales del tipo

$$x' = g(t,x,\mu)$$

donde $g : R\times R^n\times R^k \to R^n$, $(t,x,\mu) \to g(t,x,\mu)$.

Sucede a veces que estas ecuaciones presentan un estado de equilibrio para cada valor de $\mu\in R^k$ y que el equilibrio pierde la estabilidad cuando μ cruza un cierto valor crítico μ_0. Esta pérdida de estabilidad puede deberse a la aparición de soluciones periódicas estables distintas de la solución de equilibrio y cercanas a ellas. Este hecho es lo que se conoce con el nombre de Bifurcación de Hopf, la cual está relacionada con el fenómeno de la turbulencia (ver[74]). La aplicación de la teoría del grado topológico al estudio de la bifurcación de Hopf ha sido hecha por Laloux [45], [46], [47], [48], y son también a considerar los trabajos de Ashkenazi [1], y Ashkenazi-Chow [2], para ecuaciones diferenciales funcionales. Podríamos tratar de continuar los trabajos citados para obtener otros teoremas de bifurcación de Hopf más generales que los conocidos. Esto se podría despues aplicar a ecuaciones diferenciales funcionales con retraso infinito y de tipo neutro (ver [38], [66]).

5.- Las soluciones periódicas pueden a veces desempeñar un papel importante en la determinación de las superficies de bifurcación que separan las regiones de estabilidad e inestabilidad en ecuaciones diferenciales que dependen de ciertos parámetros (ver [13], [14]).

BIBLIOGRAFIA

[1].- Ashkenazi, M. Periodic solutions of a class of functional differential equations. Nonl. Ana. 4, (1.980), 153-164.

[2].- Ashkenazi, M. y Chow,S. Existence of periodic solutions at resonance for functional differential equations. Tohoku Math. J. 32, (1.980), 235-254.

[3].- Bates, P.W. y Ward, J.R. Periodic solutions of higher order systems. Pac. J. Math. 84, (1.979), 275-282.

[4].- Bebernes, J.W. y Martelli, M. Periodic solutions for Lienard's systems, en "Equadiff 78, Conv. Intern. Equaz. Differ. Ordin. ed Equaz. Funzionali". Ed. por Conti, Sestini y Villari. Univ. Firenze, (1.978), 535-546.

[5].- Bellman, R. y Cooke, k. Differential difference equations. Academic Press, (1.963).

[6].- Berberian, S.K. Lectures in Functional Analysis and Operator theory. Graduate texts in Math. Vol. 15, Springer-Verlag,(1.974).

[7].- Berger, M. Nonlinearity and functional Analysis. Lectures on Nonlinear problems in Mathematical Analysis. Academic Press, (1.977).

[8].- Birkhoff, G.D. Dynamical systems. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications. Vol. 9, (1.927).

[9].- Brezis, H. Operateurs Maximaux Monotones. North-Holland. Mathematics Studies, 5. Ed. por Leopoldo Nachbin, (1.973).

[10].- Brezis, H. y Nirenberg, L. Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, V, (1.978), 225-326.

[11].- Browder, F.E. Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces. Proc. Sympos. Pure Math. 18, 2. Amer. Math. Soc. (1.976).

[12].- Browder, F.E. y Nussbaum, R.D. The topological degree for noncompact nonlinear mappings in Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 74, (1.968), 671-676.

[13].- Cañada, A. y Martínez-Amores, P. Bifurcation in the Mathieu equation with three independent parameters. Quarterly Appl. Math. 37, (1.980), 431-441.

[14].- Cañada, A. y Martínez-Amores, P. Comentarios a la bifurcación en la ecuación de Mathieu con tres parámetros independientes. VI Jornadas Luso-Españolas de Matemáticas.Santander, (1.979).

[15].- Cañada, A. y Martínez-Amores, P. Soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales ordinarias. VIII Jornadas Luso-Españolas de Matemáticas. Coimbra, (1.981).

[16].- Cañada, A. y Martínez-Amores, P. Periodic solutions of nonlinear vector ordinary differential equations of higher order at resonance. Aceptado en Nonl. Ana.

[17].- Cañada, A. y Martínez-Amores, P. Soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales funcionales no lineales. IV Congreso Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. Sevilla, (1.981).

[18].- Cañada, A. y Martínez-Amores, P. Grado de coincidencia y soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales funcionales con retraso. Premio de Investigación 1.981. Academica de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada, (1.982).

[19].- Cañada, A. y Martínez-Amores, P. Solvability of some operator equations and periodic solutions of nonlinear functional differential equations. Aceptado en J. Differential Eqns.

[20].- Cesari, L. Functional analysis, nonlinear differential equations and the alternative method, en "Nonlinear functional analysis and Differential equations". Ed. por Cesari, Kannan y Schuur. Dekker, (1.977), 1-197.

[21].- Cronin, J. Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis. Amer. Math. Soc. (1.964).

[22].- Cruz, M.A. y Hale, J.K. Stability of functional differential equations of neutral type. J. Differential Eqns. 7, (1.970), 334-355.

[23].- Chang, S.H. Periodic solutions of certain differential equations with quasibounded nonlinearities. J. Math. Ana. Appl. 56, (1.976), 165-171.

[24].- Chow, S.N. Existence of periodic solutions of autonomous functional differential equations. J. Differential Eqns. 15, (1.974), 350-378.

[25].- Dieudonné, J. Fundamentos de análisis moderno. Reverté, (1.975).

[26].- Erbe, L.H. Nonlinear boundary value problems for second order differential equations. J. Differential Eqns. 7, (1.970),459-472.

[27].- Fennell, R.E. Periodic solutions of functional differential equations. J. Math. Anal. Appl. 39, (1.972), 198-201.

[28].- Fucik, S. Nonlinear equations with a noninvertible linear part. Czechoslovak Math. J. 24, 99, (1.974), 467-495.

[29].- Fucik, S., Necas, J. y Soucek Vl. Spectral analysis of nonlinear operators. Lecture Notes in Math. 346, Springer, (1.973).

[30].- Fucik, S. y Lovicar, V. Periodic solutions of the equation $x''(t) + g(t,x(t)) = p(t)$. Casopis Pest. Mat. 100, (1.975), 160-175.

[31].- Gaines, R.E. y Mawhin, J. Coincidence degree and Nonlinear Differential Equations. Lecture Notes in Math. 568, Springer, (1.977).

[32].- Gossez, J. P. Existence of periodic solutions for some first order ordinary differential equations, en "Equadiff 78, Conv. Intern Equaz. Differ. Ordin. ed Equaz. Funzionali". Ed por Conti, Sestini y Villari. Univ. Firenze, (1.978), 361-379.

[33] .- Gupta, C. P. Periodic solutions for coupled first order systems of ordinary differential equations. Nonl. Ana. 3, (1.979), 213-227.

[34] .- Hale, J.K. Ordinary differential equations. Wiley, (1.969).

[35] .- Hale, J.K. Applications of Alternative Problems. Brown University Lecture Notes, 71-1, Providence, (1.971).

[36] .- Hale, J.K. Oscillations in neutral functional differential equations, en "Nonlinear Mechanics". CIME, Cremonese, Roma, (1.973), 99-111.

[37] .- Hale, J.K. Theory of Functional Differential Equations. Springer, (1.977).

[38] .- Hale, J.K. Nonlinear oscillations in equations with delays. Preprint.

[39] .- Hale, J.K. y Mawhin, J. Coincidence degree and periodic solutions of neutral equations. J. Differential Eqns. 15, (1.974),295-307.

[40] .- Hetzer, G. Some remarks on ϕ+ -operators and the coincidence degree for a Fredholm equation with noncompact nonlinear perturbations. Ann. Soc. Sci. Bruxelles (1),89,(1.975),497-508.

[41] .- Hetzer, G. Some applications of the coincidence degree for k-set contractions to functional differential equations of neutral type. Comment. Math. Univ. Carolinae, 16, (1.975), 121-138.

[42] .- Hopf, E. Abzweigung einer periodischen Losung von einer stationaren Losung einer differential systems. Sachsische Akademie der Wissenchaften, Leipzig, 94, (1.942), 1-22.

[43] .- Krasnosels'kii, M.A. La théorie des solutions périodiques d'equations différentielles non autonomes. Russian Math. Surveys. 21, (1.966), 53- 74.

[44] .- Krasovskii, N. Stability of motion. Standford, (1.963).

[45] .- Laloux, N. Indice de coincidence et bifurcation, en "Equations differentielles et fonctionnelles non lineaires". Ed. por Janssens, Mawhin y Rouché. Hermann, (1.973), 109-121.

[46] .- Laloux, B. On the Hopf bifurcation theorem, en "Equadiff 78, Conv. Intern. Equaz. Differ. Ordin. ed Equaz. Funzionali". Ed. por Conti, Sestini y Villari. Univ. Firenze, (1.978), Suplemento, 25-34.

[47] .- Laloux, B. y Mawhin, J. Multiplicity, Leray-Schauder formula and bifurcation. J. Differential Eqns. 18, (1.975), 258-274.

[48] .- Laloux, B. y Mawhin, J. Coincidence index and multiplicity. Trans. Amer. Math. Soc., 217, (1.976), 143-162.

[49] .- Landesman, E. M. y Lazer, A. C. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance. J. Math. Mech. 19, (1.970), 609-623.

[50] .- Lazer, A.C. On Schauder's fixed point theorem and forced second order nonlinear oscillations. J. Math. Ana. Appl. 21, (1.968), 421-425.

[51] .- Marsden, M. y McCracken, M. The Hopf bifurcation and its applications. Appl. Math. Sci. 19, Springer-Verlag, (1.976).

[52] .- Mawhin, J. Periodic solutions of nonlinear functional differential equations. J. Differential Eqns. 10, (1.971), 240-261.

[53] .- Mawhin, J. Equivalence theorems for nonlinear operators equations and coincidence degree theory for some mappings in locally convex topological vector spaces. J. Differential Eqns. 12, (1.972), 610-636.

[54] .- Mawhin, J. Problèmes aux limites du type de Neumann pour certaines équations différentielles ou aux dérivées partielles non linéaires, en "Equations différentielles et fonctionnelles non linéaires". Hermann, (1.973), 124-134.

[55].- Mawhin, J. The solvability of some operators equations with a quasibounded nonlinearity in normed spaces. J. Math. Anal. Appl. 45, (1.974), 455-467.

[56].- Mawhin, J. Periodic solutions of some vector retarded functional differential equations. J. Math. Anal. Appl. 45, (1.974), 588-603.

[57].- Mawhin, J. Recent results on periodic solutions of differential equations, en "International Conference on Differential Equations ". Ed. Por Antosiewicz. Academic Press, (1.975). 537-556.

[58].- Mawhin, J. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems. CBMS Regional Conf. Series in Math. 40, Amer. Math. Soc. (1.978).

[59].- Mawhin, J. y Walter, W. Periodic solutions of ordinary differential equations with one-sided growth restrictions. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 82 A, (1.978), 95-106.

[60].- Mawhin, J. y Willem, M. Periodic solutions of nonlinear differential equations in Hilbert spaces, en "Equadiff 78, Conv. Intern. Equaz. Differ. Ordin. ed Equaz. funzionali". Ed. por Conti, Sestini y Villari. Univ. Firenze, (1.978),323-332 .

[61].- Mawhin, J. y Willem, M. Compact perturbations of some nonlinear Hammerstein equations. Riv. Mat. Univ. Parma. Preprint.

[62].- Mawhin, J. y Willem, M. Operators of monotone type and alternative problems with infinite dimensional kernel. Proc. Conf. Recent Advances in Differential Equations, Trieste, (1.978). Preprint.

[63].- Mawhin, J. y Willem. M. Range of nonlinear perturbations of linear operators with an infinite dimensional kernel, en " Ordinary and Partial Differential Equations". Ed. por Everitt. Springer-Verlag, (1.980), 165-181.

[64].- Nirenberg, L. Topics in Nonlinear Analysis. Courant Institute Lecture Notes. New York University, New York, (1973-74).

[65].- Nussbaum, R.D. Degree theory for local condensing maps. J. Math. Anal. Appl. 37, (1.972), 741-766.

[66].- Oliveira, J. Hopf bifurcation theorem for functional differential equations. Preprint.

[67].- Palmer, K.J. On the existence of periodic solutions of a nonlinear vector differential equations. J. Math. Anal. Appl. 64, (1.978), 328-333.

[68].- Pascali, D. y Sburlan, S. Nonlinear mappings of monotone type. Sijthoff and Noordhoff, Rumanía, (1.978).

[69].- Petrysyn, W. V. On the approximation-solvability of equations involving A-proper and Pseudo-A-proper mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 81, (1.975), 223-312.

[70].- Reissig, R. On periodic solutions of a nonlinear n-th order vector differential equations. Ann. Mat. Pura Appl. 87, (1.970), 111-124.

[71].- Reissig, R. On the existence of periodic solutions for certain nonautonomous differential equations. Anna. Mat. Pura Appl. 85, (1.970), 235-240.

[72].- Reissig, R. Periodic solutions of certain higher order differential equations. Nonl. Ana. , 2, (1.978), 635-642.

[73].- Riesz, F. y Nagy. B. Sz. Lecons D'Analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, (1.972).

[74].- Ruelle, D. y Takens, F. On the nature of Turbulence. Comm. Math. Phys. 20, (1.971), 167-192.

[75].- Schmitt, K. Periodic solutions of delay-differential equations. Lecture Notes in Math. 730, Springer-Verlag, (1.979),455-468.

[76].- Schwartz, J.T. Nonlinear Functional Analysis. Gordon and Breach, (1.969).

[77].- Taylor, A.E. General theory of functions and integration. Blaisdell Publishing Company, (1.965).

[78].- Villari, G. Soluzioni periodiche di una classe di equazioni differenziali del terz'ordine quasilineari. Ann. Mat. Pura Appl. 73, (1.966), 103-110.

[79].- Waltmann, P. Existence and uniqueness of solutions of boundary value problems for two-dimensional systems of nonlinear differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 153, (1.971), 223-234.

[80].- Ward, J.R. Asymptotic conditions for periodic solutions of ordinary differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 81, 3, (1.981), 415-420.

INDICE