¿El Teorema de Bolzano en varias variables?

por

A. Cañada y S. Villegas

RESUMEN. En este artículo mostramos algunos aspectos de la teoría del grado topológico de Brouwer, creada a principios del siglo XX y de plena actualidad en el estudio de problemas no lineales de naturaleza muy diversa.

Para ello, nuestro punto de partida es el conocido Teorema de Bolzano sobre funciones continuas. Reflexionando sobre cómo pueden ser las posibles extensiones de este conocido Teorema al caso de un número finito de variables, motivamos las principales propiedades de la teoría del grado. Se exponen también un número reducido de aplicaciones que, no obstante, son suficientes para mostrar la potencia de esta herramienta analítico-topológica.

Bernard Bolzano

1. INTRODUCCIÓN

El llamado Teorema de Bolzano (Bernard Bolzano, Praga-1781, Praga-1848) afirma que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún elemento $c \in (a, b)$ satisfaciendo $f(c) = 0$. Como no es restrictivo considerar el caso en que $a < 0 < b$, si $\partial[a, b]$ indica la frontera topológica del intervalo $[a, b]$, el Teorema de Bolzano puede enunciarse de la forma siguiente:

Teorema 1.1. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, $a < 0 < b$ y*

$$f(x)x > 0, \ \forall \ x \in \partial[a, b] \tag{1.1}$$

entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución en (a, b).

Bolzano, en su célebre trabajo de 1817 ([4]; véase [40] para una traducción inglesa) expuso una demostración puramente analítica de este resultado y al mismo tiempo criticó las demostraciones que se habían dado con anterioridad, según él por contener demasiados ingredientes geométricos. Entre otras cosas importantes, en este trabajo Bolzano dio una definición formal de la noción de continuidad y estableció la existencia de supremo para cualquier subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente (se pueden consultar [13], [21], [23] y [26] para tener una idea precisa de la importancia que las contribuciones de Bolzano han tenido en la historia de la Matemática). En el mundo científico son conocidas las innumerables aplicaciones del Teorema de Bolzano, el cual reúne todas las condiciones de un buen teorema: enunciado sencillo, demostración asequible y utilidad en grado sumo.

Por otra parte, es curioso observar que la mayoría de los colegas se sorprenden (al menos esa es nuestra impresión) cuando se les hace la pregunta siguiente: ¿conoces alguna versión del Teorema de Bolzano para varias variables?, o más concretamente ¿conoces alguna versión del Teorema de Bolzano para sistemas de n ecuaciones con n variables independientes?, ¿y en dimensión infinita?, ¿y en variable compleja? En este artículo, que tiene carácter divulgativo, encontraremos la respuesta a algunas de las cuestiones anteriores (otras, sobre todo las que se refieren a dimensión infinita se dejarán para un trabajo posterior). Nos encontraremos de lleno con la teoría del grado topológico, una de las herramientas más útiles que se han creado en el siglo XX para estudiar problemas no lineales de naturaleza muy diferente y donde se entremezclan de manera adecuada técnicas topológicas y analíticas. De paso nos encontraremos con el Teorema del punto fijo de Brouwer (donde comentaremos algunas curiosidades relativamente recientes). Es posible que para algunos estas notas puedan parecer excesivamente elementales. Otros las encontrarán demasiado elevadas. Nuestro objetivo es que todos encuentren algo de interés.

2. ALGUNOS HECHOS E IDEAS PARA REFLEXIONAR

Antes de seguir, diremos que las preguntas que hemos formulado en la introducción no son en absoluto triviales, puesto que hemos de tener en cuenta que para funciones de una variable, las propiedades analíticas fundamentales que permiten probar el Teorema de Bolzano son dos: la que se refiere a la existencia de supremo de un subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente (propiedad que no tiene sentido para el caso de más de una variable) y la propiedad local de conservación del signo para funciones continuas no nulas (que obviamente tampoco tiene sentido cuando tenemos una función con más de una componente).

En lenguaje topológico, las propiedades fundamentales que permiten demostrar el Teorema de Bolzano son también dos: el hecho de que las funciones continuas aplican subconjuntos conexos en subconjuntos conexos y que un subconjunto no trivial de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo. Evidentemente, esta última propiedad no parece tener traducción a dimensión superior.
Los que nos dedicamos a la enseñanza de las Matemáticas desde hace tiempo sabemos que el análisis de funciones de varias variables difiere sensiblemente del análisis de funciones de una variable. Pensemos, por ejemplo, en la noción de derivada en dimensión superior a uno, que exige un gran esfuerzo, tiempo y práctica para su correcta maduración o en los teoremas integrales clásicos del Análisis vectorial, como los Teoremas de Green y Stokes.
Quizás en lugar de opinar tanto deberíamos mirar con detenimiento las situaciones que se plantean en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 1. Consideremos la función

$$\begin{gathered} f=(f_1,f_2):[0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(\operatorname{sen} x,\cos x), \\ \forall\ (x,y)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Desde el punto de vista de la regularidad, la función f es de lo mejor que puede haber, puesto que es una función analítica. Además la imagen de f contiene puntos de los cuatro cuadrantes de $\mathbb{R}^2$ (la imagen de f es la circunferencia unidad de $\mathbb{R}^2$). Sin embargo, la ecuación

$$f(x,y)=(0,0). \tag{2.2}$$

no tiene solución. Trivialmente $f([0,2\pi]\times[0,2\pi])$ es conexo, pero como estamos comprobando, un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ no tiene necesariamente propiedades tan buenas como los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$.
¿Con objeto de probar que la ecuación (2.2) tiene solución, quizás deberíamos exigir que f fuese continua y que su imagen fuese convexa? No creo que nadie sensato pueda pensar que la generalización del Teorema de Bolzano va por este camino, ya que salvo en casos muy concretos, la continuidad no mantiene la propiedad de convexidad.

Llegado a este punto, quizás sea conveniente hacer un breve paréntesis y preguntarnos cuáles son las funciones continuas definidas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que tienen esta propiedad (llevar convexos en convexos). Podemos comprobar fácilmente que cualquier aplicación afín goza de esta propiedad, así como cualquier función continua cuya imagen esté contenida en una recta. Es un bonito problema de Análisis, que animamos al lector a estudiar, preguntarse si existen funciones, que no pertenezcan a las dos familias mencionadas anteriormente, con la propiedad deseada. (Para ello puede ser útil demostrar previamente que nuestra propiedad es equivalente a la de llevar intervalos en intervalos).

Aunque a raíz del ejemplo que acabamos de ver, la tarea de extender el Teorema de Bolzano no parece fácil, un resultado positivo puede infundirnos algún ánimo.

Ejemplo 2 (El Teorema de Poincaré-Miranda para dos variables independientes).

Este teorema es válido para funciones f continuas definidas en rectángulos y con valores en $\mathbb{R}^2$. Afirma que si cada componente f_i de f, toma valores con signo opuesto en los $i-$ésimos lados opuestos, entonces la ecuación (2.2) tiene solución en el interior del rectángulo. Por tanto, puede considerarse como una generalización del Teorema de Bolzano a varias variables. Concretamente dice lo siguiente:

Teorema 2.1. *Sea* $f = (f_1, f_2) : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^2$ *continua tal que*

$$\begin{aligned} f_1(a, y) < 0 < f_1(b, y), \ \forall\, y \in [c, d], \\ f_2(x, c) < 0 < f_2(x, d), \ \forall\, x \in [a, b]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Entonces la ecuación (2.2) tiene solución en $(a, b) \times (c, d)$.

Como se puede fácilmente intuir, este resultado tiene una formulación general en $\mathbb{R}^n$. Esta formulación general fue anunciada por Poincaré en 1883-1884 ([35], [36]) y probada posteriormente por él mismo en 1886 ([37]). En 1940, Miranda ([32]) mostró su equivalencia con el Teorema del punto fijo de Brouwer (véase [25] para el desarrollo histórico de este tema y [41] para aplicaciones del mismo a ecuaciones diferenciales).

A pesar de su indudable interés, el Teorema anterior tiene serias limitaciones que se deben precisamente a la particularidad del dominio de f (un rectángulo). Por ejemplo, la condición (2.3) no tiene sentido si el dominio de f es un círculo, o en general, una bola cerrada de $\mathbb{R}^n$. Aquí no tenemos caras, como en el caso de rectángulos. Sin embargo estas situaciones son corrientes en las aplicaciones.

Intentado ver qué es lo esencial de la condición (2.3), podemos pensar que ésta expresa una propiedad global sobre el comportamiento de f en la frontera de $[a,b]\times[c,d]$. Esto también sucede en el Teorema de Bolzano para $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, donde la condición

$$sgn\ f(b) - sgn\ f(a) \neq 0 \tag{2.4}$$

permite afirmar que la ecuación $f(x)=0$ tiene solución en (a,b) (para cada número real no nulo x, $sgn\ x$ denota su signo).

¿Qué es lo común y relevante en los Teoremas 1.1 y 2.1? Vamos a ver que en ambos casos existe una homotopía continua conveniente entre la aplicación f y la aplicación identidad (a la que denotaremos por I). En efecto, en el caso del Teorema de Bolzano no es restrictivo suponer que

$$a<0<b,\ f(a)<0<f(b) \tag{2.5}$$

y en el caso del Teorema 2.1 suponer que, además de (2.3), se cumple

$$a<0<b,\ c<0<d \tag{2.6}$$

Si notamos $\Omega=(a,b)$ en dimensión $n=1$ y $\Omega=(a,b)\times(c,d)$ en dimensión $n=2$, podemos definir la aplicación

$$H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n,\ H(t,X)=tX+(1-t)f(X) \tag{2.7}$$

y observemos que de las condiciones (2.3), (2.5) y (2.6) se deduce

$$H(t,X)\neq 0,\ \forall\ t\in[0,1],\ \forall X\in\partial\Omega \tag{2.8}$$

y que, además,

$$H(0,.)=f,\ H(1,.)=I \tag{2.9}$$

Así pues, en ambos casos ($n=1$ y $n=2$), la aplicación f es homotópica a la aplicación identidad, mediante una homotopía continua que "no permite que las soluciones de las ecuaciones $H(t,x)=0,\ t\in(0,1)$ se escapen a través de la frontera de Ω" (propiedad (2.8)). Como la ecuación $I(X)=0\in\mathbb{R}^n$ tiene solución en Ω, parece lógico pensar que de aquí se pueda deducir que la ecuación

$$f(X)=0 \tag{2.10}$$

tenga solución en Ω.

Una última observación, antes de entrar en terrenos más arduos. No pensemos que va a ser posible probar la afirmación siguiente:
Sea Ω un dominio (subconjunto abierto y conexo) acotado de $\mathbb{R}^n$ y $H : [0,1]\times\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continua, verificando (2.8) y tal que la ecuación $H(1,X)=0$ tiene solución en Ω. Entonces la ecuación $H(0,X)=0$ tiene solución en Ω.
En efecto, para tener un contraejemplo sencillo basta tomar $n=1$, $\Omega = (-2,2)$, $H(t,x) = (1-t)+tx^2$. Así pues, la propiedad que simplemente expresa que la ecuación $f(X)=0$ tiene solución en Ω, no se mantiene a través de homotopías continuas que verifican (2.8) (aunque si se pintan las funciones $H(0,x)$ y $H(1,x)$ anteriores, se verá que se puede deformar continuamente una en la otra cumpliéndose (2.8)).
Es fácil ver que la situación del contraejemplo anterior no sería posible si en lugar de tener la función x^2 tuviésemos una función tal que $sgn\ f(2) - sgn\ f(-2) \neq 0$. En efecto, debido a la continuidad de H y a (2.8), la cantidad

$$sgn\ H(t,b) - sgn\ H(t,a) \tag{2.11}$$

se mantiene invariante mediante homotopías continuas que verifican (2.8). Ahora bien, parece que estamos como al principio, puesto que (2.11) no tiene sentido en dimensión superior a uno. Vamos a ver de inmediato que no es así, encontrando una expresión equivalente que sí tenga sentido para el caso general. A este respecto, es trivial probar el lema siguiente:

Lema 2.2. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in C[a,b]\cap C^1(a,b)$ tal que f verifica*

$$f(a) < 0 < f(b) \tag{2.12}$$

y

$$f'(x)\neq 0,\ \forall\ x\in(a,b)\ \text{tal que}\ f(x)=0 \tag{2.13}$$

Entonces f tiene un número finito de ceros en (a,b) y

$$1 = \sum_{x\in f^{-1}\{0\}\cap(a,b)} sgn\ f'(x) \tag{2.14}$$

Si tuviésemos $f(a)>0>f(b)$ en lugar de (2.12), tendríamos que la suma de (2.14) sería igual a -1.
Análogamente puede probarse el lema siguiente.

Lema 2.3. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in C[a,b]\cap C^1(a,b)$ tal que f verifica*

$$f(a)f(b) > 0 \tag{2.15}$$

y (2.13). Entonces

$$0 = \sum_{x \in f^{-1}\{0\} \cap (a,b)} sgn\ f'(x) \tag{2.16}$$

(entendemos que si el conjunto $f^{-1}\{0\} \cap (a,b)$ es vacío, entonces la suma anterior vale cero).

Como resumen de los dos lemas anteriores, podemos decir que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, de clase C^1 en (a,b), que no se anula en la frontera de $[a,b]$ y tal que verifica (2.13), entonces

$$\frac{1}{2}(sgn\ f(b) - sgn\ f(a)) = \sum_{x \in f^{-1}\{0\} \cap (a,b)} sgn\ f'(x) \tag{2.17}$$

A la hora de extender los anteriores resultados al caso de más de una variable independiente, *la idea básica es sustituir la expresión $f'(x)$ por det $f'(x)$* (*det* indica el determinante de una matriz cuadrada regular). Esto se expondrá en la sección siguiente. En lo que sigue, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua que no se anula en la frontera de $[a,b]$, notaremos

$$d_1(f,(a,b),0) = \frac{1}{2}(sgn\ f(b) - sgn\ f(a)) \tag{2.18}$$

3. EL GRADO TOPOLÓGICO DE BROUWER

Trataremos ahora de extender la definición anterior, referente a la cantidad entera $d_1(f,(a,b),0)$, a situaciones más generales en varios sentidos: f va a ser una función continua de n variables independientes y n componentes y además el intervalo (a,b) se podrá sustituir por cualquier subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Ello se hará en varias etapas. El lema de Sard y el Teorema de aproximación de Weierstrass serán claves. Para la demostración rigurosa de las afirmaciones que siguen pueden consultarse [14] y [43].
Notaremos por Σ al conjunto formado por las ternas (f,Ω,y) que cumplen la propiedad **(P)** siguiente:

> **(P):** Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ (n es fijo), $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ es continua y además $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.

Etapa a) Sea $(f,\Omega,y)\in\Sigma$, tal que además $f\in C^1(\overline{\Omega})$. Si

$$A_f=\{\ x\in\Omega : f(x)=y\ \},$$
$$B_f=\{\ x\in\Omega : J_f(x)=0\ \},$$

donde $J_f(x)=det\ f'(x)$ es el Jacobiano de f en x, suponemos en esta etapa que

$$A_f\cap B_f=\emptyset \tag{3.1}$$

Entonces A_f es un conjunto finito (puesto que A_f es un compacto con todos sus puntos aislados). Esto permite definir

$$d_B(f,\Omega,y)=\sum_{x\in A_f} sign\ J_f(x) \tag{3.2}$$

Se entiende que si A_f es vacío, $d_B(f,\Omega,y)$ se define como cero.

Etapa b). En esta etapa, se elimina la hipótesis (3.1). Para ello, sea $(f,\Omega,y)\in\Sigma$, tal que además $f\in C^1(\overline{\Omega})$. El **lema de** *Sard* ([14], [43]) afirma que $f(B_f)$ es de interior vacío (en realidad esta propiedad es una consecuencia del hecho de que $f(B_f)$ tiene medida de Lebesgue cero). Esto garantiza que en $B_{\mathbb{R}^n}(y;r)$, (bola abierta en $\mathbb{R}^n$ de centro y y radio r), donde $r=dist\ (y,f(\partial\Omega))$, existe al menos un elemento z tal que (f,Ω,z) está en las condiciones del apartado anterior. Se prueba entonces que $d_B(f,\Omega,z)$ es independiente del elemento z así elegido y se define $d_B(f,\Omega,y)=d_B(f,\Omega,z)$.

Etapa c). En esta etapa se elimina la hipótesis sobre la regularidad de f. Para ello, sea $(f,\Omega,y)\in\Sigma$ y $r=dist\ (y,f(\partial\Omega))$. El **Teorema de aproximación de** *Weierstrass* garantiza la existencia de $g\in C^1(\overline{\Omega})$, tal que

$$|f(x)-g(x)|<r,\ \forall\ x\in\overline{\Omega}. \tag{3.3}$$

Aquí, $|.|$ indica la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$. Puede probarse que $d_B(g,\Omega,y)$ es independiente de la función g elegida satisfaciendo (3.3) y se define $d_B(f,\Omega,y)=d_B(g,\Omega,y)$.

Las anteriores ideas quedan reflejadas, de manera rigurosa, en el teorema que sigue ([14], [43]).

Teorema 3.1 . *Existe una única aplicación $d_B:\Sigma\to\mathbb{Z}$ (conjunto de los números enteros) satisfaciendo las propiedades siguientes:*
d1)

$$d_B(I,\Omega,y)=1,\ \textit{si}\ y\in\Omega. \tag{3.4}$$

d2) Si Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos abiertos y disjuntos de Ω tales que $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, entonces

$$d_B(f, \Omega, y) = d_B(f, \Omega_1, y) + d_B(f, \Omega_2, y).$$

d3) Si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, son aplicaciones continuas tales que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, $\forall\, t \in [0,1]$, entonces $d_B(h(t,.), \Omega, y(t))$ es independiente de $t \in [0,1]$.

A $d_B(f, \Omega, y)$ se le llama **grado topológico de** *Brouwer* **de f, relativo a Ω y a** y.

La propiedad d1), para la aplicación identidad I, se conoce con el nombre de **propiedad de normalización**; d2) se llama **propiedad de aditividad-escisión** y expresa el hecho de que para calcular el grado $d_B(f, \Omega, y)$, se puede prescindir de aquellas partes del dominio donde de antemano se sabe que la ecuación

$$f(x) = y \tag{3.5}$$

no tiene solución. Además, esta propiedad es muy útil para probar resultados sobre localización y multiplicidad de soluciones de (3.5) en el dominio Ω. Por su parte, d3) expresa la igualdad de grados en Ω de aplicaciones homotópicas continuas $h(0,.)$ y $h(1,.)$, relativas a $y(0)$ y a $y(1)$, respectivamente, siempre que la familia de ecuaciones

$$h(t, x) = y(t),\ \ t \in [0,1],$$

no tenga solución en $\partial\Omega$. Esta propiedad es de gran utilidad para calcular el grado de numerosas aplicaciones que son homotópicas a otras cuyo grado es conocido (por ejemplo, el grado de la aplicación identidad, dado en d1)). A partir de las propiedades d1)-d3) pueden probarse otras muchas que muestran la utilidad del grado topológico ([14], [43]). En particular, del proceso de contrucción del grado, puesto de manifiesto en las etapas señaladas anteriormente como b) y c), se deduce que $d_B(f, \Omega, y)$ es continuo respecto de las variables f e y. Es notorio que $d_B(f, \Omega, y)$ sólo depende de los valores de f en $\partial\Omega$. También la etapa a) muestra el carácter del número entero $d_B(f, \Omega, y)$ respecto de las soluciones de la ecuación (3.5) en el conjunto Ω: en las hipótesis de la etapa a), el número de soluciones de la ecuación (3.5) es finito. Entonces, a cada solución de esta ecuación se le asocia el número entero *sign* $J_f(x)$ y se suma. Por tanto, $d_B(f, \Omega, y)$ es, “en cierto sentido”, un indicador de las soluciones de (3.5) en Ω. Ponemos la frase “en cierto sentido” entre comillas, para que cada uno la interprete a su manera. Obviamente se comprende la limitación de la teoría del grado topológico (pensemos que hay una gran pérdida de información al sustituir $f'(x)$ para dimensión uno, por $det\ f'(x)$ en el caso general), pero sus aplicaciones han sido y siguen siendo tantas y tan variadas que sin duda es una de las herramientas más útiles que se conocen para tratar problemas no lineales ([14]).

Parece difícil atribuir a alguien en concreto la paternidad del Teorema anterior. Más bien se puede decir que constituye un ejemplo típico de creación matemática escalonada donde los avances parciales desempeñaron un papel fundamental en la formulación general.

No cabe ninguna duda de que un avance definitivo hacia la formalización del concepto del llamado grado de Brouwer lo dieron Hadamard en 1910 ([18]) y el mismo Brouwer (1881-1966) en sus artículos de 1910, 1911 y 1912 ([8], [9], [10]) pero tampoco cabe ninguna duda de que herramientas matemáticas similares habían sido introducidas con anterioridad, como la llamada "integral de Kronecker" ([24]) relacionada con la fórmula (3.2)(que incluso había sido ya considerada por Cauchy en dimensión $n = 2$) o el concepto de "rotación de un campo vectorial" introducido por Poincaré en su estudio de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Otros conceptos anteriores que están íntimamente relacionados con la noción de grado son la demostración dada por Gauss del Teorema fundamental del Álgebra, algunos teoremas de Sturm, Liouville, Cauchy, Hermite y Sylvester sobre raíces de polinomios, el llamado teorema de Gauss-Bonet sobre curvatura gaussiana y el número de Euler de una variedad Riemanniana, compacta, orientable y bidimensional. Para más detalles se puede consultar la referencia [44]. Son asimismo recomendables las referencias [14] y [27] para una motivación de la teoría del grado topológico basada en la noción de índice de un punto respecto de una curva continua.

Luitzen E. J. Brouwer

Existen formas diversas de probar la existencia de la aplicación d_B dada en el Teorema anterior. Nosotros hemos expuesto las principales ideas del método analítico, pero igualmente puede probarse usando técnicas algebraico-topológicas o de topología diferencial ([31], [47]). Curiosamente, la unicidad de la aplicación d_B anterior satisfaciendo las propiedades d1), d2) y d3), no fue probada hasta 1973 por Amann y Weiss ([2]).

4. GENERALIZACIONES FINITO-DIMENSIONALES DEL TEOREMA DE BOLZANO

Como ya hemos comentado, la mayor utilidad de la teoría del grado topológico viene dada por las propiedades que verifica. Estas lo convierten en una herramienta muy potente para abordar numerosos problemas en disciplinas muy diversas. Comencemos por una que es una verdadera generalización del Teorema de Bolzano (Teorema 1.1). La demostración del Teorema que sigue es elemental usando las propiedades d1)-d3) de la sección anterior ([14]).

Teorema 4.1 . *Si* $d_B(f, \Omega, y) \neq 0$, *la ecuación* (3.5) *tiene al menos una solución en* Ω.

Esta propiedad es quizás la más útil de la teoría del grado. Nos dice que una condición suficiente para la existencia de soluciones de la ecuación (3.5) en Ω, es que el grado $d_B(f, \Omega, y)$ no sea cero. Además, puede demostrarse fácilmente (usando para ello una homotopía con una función afín conveniente) que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y no se anula en la frontera de $[a, b]$, entonces

$$d_B(f, (a, b), 0) = d_1(f, (a, b), 0) \tag{4.1}$$

definido en (2.18). Por tanto, el Teorema previo constituye una verdadera generalización del Teorema de Bolzano, no sólo en el sentido de que se pueden considerar n ecuaciones y n variables independientes, sino también en el sentido de que el dominio Ω de f puede ser cualquier subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Ahora bien, como todo en Matemáticas tiene ventajas e inconvenientes, el gran inconveniente de este Teorema es precisamente demostrar que $d_B(f, \Omega, y) \neq 0$. No obstante y como ya hemos comentado, para ello sólo son importantes los valores de f en $\partial\Omega$. En efecto, si $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ son funciones continuas tales que $f = g$ en $\partial\Omega$ y se tiene además que $y \notin f(\partial\Omega)$, entonces $d_B(f, \Omega, y) = d_B(g, \Omega, y)$ ([14]).

Tal vez un ejemplo pueda ayudar a convencerse de la potencia del grado topológico. Supongamos que queremos probar la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + \frac{\ln(x_1^2+2)}{x_1^2+x_2^2+1} - \operatorname{sen}(x_2-7) + 15 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + \exp(-x_2^2-4) + \cos(x_1x_2) + 1 = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Lo lógico es dejarlo, a no ser que estemos muy interesados en ello. No obstante, con el uso de las propiedades del grado topológico, esto puede hacerse de manera elemental. En efecto, la parte sencilla del anterior sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

que es una ecuación lineal de la forma $Ax = 0$, donde A es una matriz regular de orden dos. Del proceso de construcción del grado (descrito con anterioridad al Teorema 3.1) se deduce que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define como $f(x) = Ax, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^2$, se tendrá $d_B(f, \Omega, 0) = -1$, para cualquier subconjunto abierto y acotado Ω de $\mathbb{R}^2$ que contenga al origen. Ahora, si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define como

$$g(x) = g(x_1, x_2) =$$
$$= \left(\frac{\ln(x_1^2+2)}{x_1^2+x_2^2+1} \ - \ \operatorname{sen}(x_2-7) + 15, \exp(-x_2^2-4) + \cos(x_1x_2) + 1 \right),$$

de la regularidad de A y la acotación de g se deduce que para $R \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande la aplicación $H : [0,1] \times \overline{B_{\mathbb{R}^2}(0,R)} \to \mathbb{R}^2, \ H(t,x) = f(x) + tg(x)$ satisface las condiciones de la propiedad d3) del Teorema 3.1. Así pues $0 \neq d_B(f, B_{\mathbb{R}^2}(0,R), 0) = d_B(f+g, B_{\mathbb{R}^2}(0,R), 0)$, con lo que (4.2) tiene solución.

La teoría del grado tiene un uso muy diverso. Damos seguidamente otro resultado que puede considerarse también una generalización, en absoluto trivial, del Teorema de Bolzano.

Teorema 4.2. *Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ conteniendo al origen y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continua. Entonces si*

$$\langle f(x), x \rangle > 0, \ \forall \ x \in \partial\Omega, \tag{4.4}$$

($\langle , \rangle$ denota el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$), se tiene que la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{4.5}$$

tiene solución en Ω.

La demostración es elemental puesto que si definimos las aplicaciones $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ como $h(t,x) = tx + tf(x)$, $y(t) = 0$, entonces usando las propiedades d1) y d3) tendríamos $d_B(f,\Omega,0) = -1$. Ahora, del Teorema 4.1 tendríamos la conclusión.
Insistimos en que la verdadera importancia del teorema anterior no está sólo en considerar el caso de n variables y n ecuaciones, sino en que Ω es cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ abierto y acotado (¿se ha pensado cómo puede ser la frontera de los conjuntos de este tipo?).

La teoría del grado topológico proporciona, en general, pruebas extremadamente simples de muchos teoremas de punto fijo. Veámoslo para uno de los teoremas de punto fijo más populares, el teorema del punto fijo de Brouwer.

Teorema 4.3. *(Teorema del punto fijo de Brouwer).*
Sea $D \subset \mathbb{R}^n$, cerrado, acotado, convexo y no vacío. Entonces si $K \subset \mathbb{R}^n$es homeomorfo a D y $f : K \to K$ es continua, la ecuación

$$x = f(x) \tag{4.6}$$

tiene al menos una solución.

Es posible que al lector le extrañe en el enunciado de este teorema la necesidad de utilizar dos subconjuntos D y K en vez de uno solo. Naturalmente, si hubiéramos utilizado un único subconjunto (es decir, si $D = K$) el teorema es igualmente válido, pero perdemos mucha generalidad. La explicación es bien sencilla: si un espacio topológico X tiene la propiedad del punto fijo (i. e. toda función continua definida entre este espacio topológico y sí mismo tiene un punto fijo) entonces cualquier otro espacio topológico homeomorfo a X tiene esta misma propiedad. También la compacidad (lo que, en el caso de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, equivale a ser cerrado y acotado) se conserva por homeomorfismos topológicos. Pero es fácil ver que en el hecho de ser convexo no es así; es decir, podemos encontrar dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ homeomorfos, en el que uno es convexo y el otro no. Por ejemplo, si consideramos como conjunto K tres cuadrados unidos por sus lados en forma de "L", observamos que no se trata de un convexo. Sin embargo sí es homeomorfo al conjunto $D = \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0;1)$. Por lo tanto la generalización del enunciado del teorema no es en absoluto banal.

La demostración del Teorema del Punto Fijo de Brouwer puede reducirse al caso en que $K = \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0;R)$ (véase [14]). En esta situación, es claro que existe $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0;R)$, extensión continua de f. Ahora bien, si $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(0;M)$, $M > R$, se tiene que la aplicación $I - \overline{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$

verifica las hipótesis del Teorema anterior, puesto que si $\|x\| = M$, entonces $\langle x - \overline{f}(x), x\rangle \geq M(M - R) > 0$. Entonces existe al menos algún $x \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0; M)$ tal que $(I - \overline{f})(x) = 0$. Como $\overline{f}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0; R)$, se tiene que $x \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0; R)$ y por tanto $x = f(x)$.

El teorema anterior, para $K = B_{\mathbb{R}^3}(0; R)$, fue probado por Brouwer en 1909 ([7]), aunque previamente un resultado equivalente fue enunciado y probado por Bohl en 1904 ([3]). Hadamard dió una demostración para el caso n arbitrario en 1910 ([18]). Finalmente, Brouwer, usando argumentos de grado topológico lo probó en 1912 ([10]). Una exposición más detallada de la historia y "paternidad" de este teorema puede verse en un reciente artículo de J. Mawhin ([28]). Véase también ([29]) para una muestra de interesantes ejemplos.

Sobre el conjunto de puntos fijos de una aplicación f que satisfaga las condiciones del Teorema 4.3, es claro que dicha aplicación puede tener un número finito o infinito de puntos fijos. De hecho, dado cualquier subconjunto cerrado no vacío C de $\overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0; R)$, es fácil construir una aplicación continua $f : \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0; R) \to \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0; R)$ tal que el conjunto de sus puntos fijos coincide con C (véase [39]).
En 1993, T. Zamfirescu ([48]) estudió este tema en relación con el Teorema de la Categoría de Baire ([6]), demostrando algunas propiedades interesantes que creo conviene mostrar aquí. Denotemos por D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cerrado, acotado, convexo y que no se reduzca a un punto y por $C(D, D)$ el espacio de todas las funciones continuas definidas en D y con imagen contenida en D, dotado de la métrica uniforme. Entonces existe un subconjunto B de $C(D, D)$, de primera categoría en $C(D, D)$, tal que para cualquier función de $C(D, D) \setminus B$, se tiene que el conjunto de sus puntos fijos es homeomorfo al conjunto de Cantor ([20]). Parece ser entonces que "la mayoría de las funciones de $C(D, D)$ tienen muchos puntos fijos" (recordemos que el Conjunto de Cantor no es numerable, aunque tiene medida de Lebesgue cero). Tranquilos, porque en el mismo artículo Zamfirescu ([48]) demuestra que existe un subconjunto E de $C(D, D)$, de primera categoría en $C(D, D)$, tal que para cualquier función de $C(D, D) \setminus E$, se tiene que el conjunto de sus puntos fijos tiene medida de Lebesgue (en dimensión n) cero. Estas son las cosas bonitas del Análisis Funcional.

Otro aspecto de interés relacionado con el Teorema del punto fijo de Brouwer es el que se refiere a su versión paramétrica. Es de sobra conocido que, en las aplicaciones a problemas concretos, es usual encontrarse con ecuaciones de la forma

$$x = f(x, c) \tag{4.7}$$

donde c es un parámetro real (unidimensional o multidimensional). Si la función $f(x, c)$ es continua y para cada c fijo es posible probar, mediante el uso del Teorema del punto fijo de Brouwer, la existencia de al menos un punto fijo de (4.7), ¿podremos elegir, para cada c dado, un punto fijo $x(c)$ de (4.7) tal que la función $x(c)$ sea continua? Esta cuestión es de gran interés en las aplicaciones. Por ejemplo, en problemas de valores iniciales o problemas de contorno para ecuaciones diferenciales, puesto que en general la ecuación que modela la evolución de un determinado sistema físico depende usualmente de parámetros tales como la temperatura ambiente, la viscosidad del medio, etc. En estas situaciones poder afirmar que existen "selecciones continuas" de puntos fijos es importante.
Es conocido que la respuesta a la cuestión anterior es positiva en otras situaciones. Por ejemplo, cuando donde se puede aplicar "de manera uniforme" el Teorema del punto fijo de la aplicación contráctil ([19]). Recientemente ([17]) ha sido demostrada también una versión paramétrica del principio variacional de Ekeland con aplicaciones al problema de existencia de puntos de equilibrio de tipo Nash para problemas perturbados. Este tema de selecciones continuas se plantea también en ambientes elementales. Por ejemplo, el que se refiere a la continuidad de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si f es continua, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ puede elegirse un número positivo $\delta(x, \varepsilon)$ tal que si $y \in \mathbb{R}^n$ verifica $d_{\mathbb{R}^n}(x, y) < \delta$ entonces $d_{\mathbb{R}^m}(f(x), f(y)) < \varepsilon$ (aquí, $d_{\mathbb{R}^k}$ indica la distancia usual en $\mathbb{R}^k$). Ahora bien, ¿puede elegirse $\delta(x, \varepsilon)$ tal que la función $\delta : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ sea continua? A pesar de lo elemental de esta pregunta, es curioso observar que, en general, ni los alumnos de los últimos cursos ni aún nuestros mismos colegas conocen la respuesta, que obviamente es positiva. Lo de obviamente no debe interpretarse en el sentido de que la demostración sea sencilla. Puede consultarse una demostración asequible debida a Enayat, que usa particiones de la unidad, en [16], aunque el resultado fundamental que se expone en este último trabajo (válido en ambientes de espacios métricos generales y no sólo en espacios $\mathbb{R}^k$) es en realidad una consecuencia de resultados más generales de Gutev (1987) y Przeslawinski y Rybinski (1990)(véase [38] para los detalles).

Como no todo pueden ser ventajas, la cuestión que nos planteábamos para la ecuación (4.7), sobre la posibilidad de probar la existencia de selecciones continuas de puntos fijos $x(c)$, bajo las hipótesis del Teorema del punto fijo de Brouwer, tiene en general una respuesta negativa. El siguiente ejemplo sencillo puede servir para ilustrar este hecho:

Consideremos la siguiente familia uniparamétrica de funciones de $[-R,R]$ en $[-R,R]$:

$$f(x,c) = x - |c|x + cR \qquad \forall (x,c) \in [-R,R] \times [-1,1]$$

No es difícil hacerse una idea de cómo van cambiando las funciones (en este caso siempre rectas) según va variando el parámetro c. Incluso con el programa *Mathematica* podemos conseguir una animación perfecta: basta introducir

$$\begin{gathered} For[c=-1, c<=1, c=c+0.02, Plot[x-Abs[c]x+c, \{x,-1,1\}, \\ PlotRange \to \{-1,1\}, AspectRatio \to Automatic]] \end{gathered}$$

(y luego hacer un doble "click" sobre la primera figura para conseguir el efecto de animación de las gráficas de las funciones).

Si consideramos la ecuación $f(x,c) = x$ en el intervalo $[-R,R]$ obtenemos la siguiente situación: Si $-1 \leq c < 0$ la única solución es $x = -R$, mientras que si $0 < c \leq 1$ entonces la única solución es $x = R$. Obviamente en el caso $c = 0$ cualquier número $x \in [-R,R]$ sirve como solución. Es por tanto claramente imposible hacer la elección $x(c)$ antes mencionada de manera continua.

Es fácil generalizar este mismo ejemplo para demostrar que tampoco en dimensiones superiores podemos esperar siempre una elección continua del punto fijo que nos da el Teorema de Brouwer. Consideremos la función $f_n : \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,R) \times [-1,1] \to \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,R)$ definida como

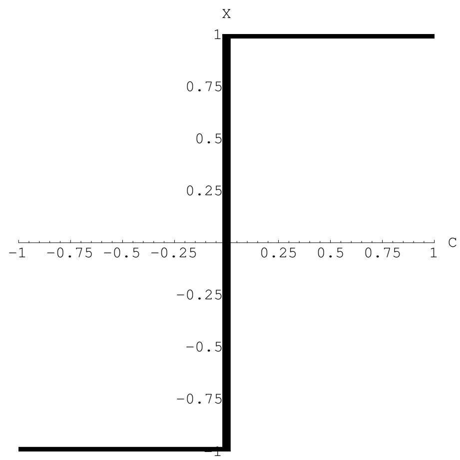
$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n, c) = (f(x_1,c), 0, ..., 0) \qquad \forall (x,c) \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,R) \times [-1,1]$$

(véase también [11] para algunos ejemplos geométricos).

No obstante, es posible dar condiciones adicionales para que sí se pueda hacer la deseada elección continua $x(c)$. Tal vez la situación más elemental es aquélla en la que selección es única: es decir, la ecuación $x = f(x,c)$ tiene una única solución $x(c) \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,R)$ para cada valor del parámetro c. En este caso es posible demostrar que la aplicación $c \mapsto x(c)$ es siempre continua.

Naturalmente en muchos de los problemas que nos encontremos no tendremos unicidad de solución. Incluso en aquellos casos que intuyamos que esto ocurre, tendremos probablemente una seria dificultad para demostrar tal unicidad. Sin embargo, si analizamos la estructura del conjunto $B =$

$\{(x,c) \in [-R,R] \times [-1,1],\ x = f(x,c)\}$ de nuestro anterior ejemplo, observamos que tiene buenas propiedades: concretamente es un conjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ (ver figura).



Es posible obtener este tipo de resultados en situaciones muy generales, en las que se puede probar la existencia de "selecciones conexas," lo que a la hora de las aplicaciones es casi de la misma utilidad que disponer de selecciones continuas. Más concretamente, supongamos que $f : \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,R) \times [a,b] \to \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,R),\ (x,c) \to f(x,c)$ es continua y que para cualquier $c \in [a,b]$ se tiene $x - f(x,c) \neq 0$ si $\|x\| = R$. Entonces si $B = \{(x,c),\ c \in [a,b],\ x \in B_{\mathbb{R}^n}(0,R),\ x = f(x,c)\}$, puede probarse que existe un subconjunto $A \subset B$ que es compacto y conexo (en la topología producto) y tal que la proyección de A sobre $\mathbb{R}$ es exactamente el intervalo $[a,b]$. Este resultado, que no es en absoluto trivial, puede probarse usando las propiedades del grado topológico dadas en el Teorema 3.1. Los hechos básicos que permiten demostrarlo son dos: por una parte la existencia de cotas a priori sobre las posibles soluciones de la familia de ecuaciones (4.7) (la constante R no depende del parámetro c) y por otra que $d_B(f(.,0), B_{\mathbb{R}^n}(0,R), 0) \neq 0$. Este tipo de resultados sobre la existencia de selecciones conexas, válido en ambientes más generales, e incluso en dimensión infinita, constituyen un ejemplo muy significativo de lo que se conoce con el nombre de "Continuation theorems", frase que no nos atrevemos a traducir ([30]).

La utilidad de la teoría del grado no se limita a la obtención de teoremas de punto fijo. De hecho, su uso en el estudio de ecuaciones no lineales es más popular y, por ejemplo, muestra una extraordinaria potencia en la prueba de existencia de soluciones de ecuaciones no lineales, donde los operadores que aparecen son continuos pero no necesariamente diferenciables (esto es importante en las aplicaciones). Ilustremos estas afirmaciones con un ejemplo sencillo, en el que no obstante, el resultado que se obtiene es relevante y está relacionado con la cuestión: ¿Unicidad implica existencia? Para motivarlo podemos partir de una situación lineal considerando la ecuación

$$Ax = y \tag{4.8}$$

donde A es una matriz cuadrada regular de orden n. Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ la ecuación anterior tiene una única solución (unicidad de soluciones de la ecuación lineal homogénea implica existencia de soluciones de la ecuación completa). Debido a que A es regular, la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida como $f(x) = Ax, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n$, satisface

$$\left.\begin{array}{c} f \ \text{ es inyectiva,} \\ \lim_{\|x\| \to +\infty} \ \|f(x)\| = +\infty \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Pues bien, la versión no lineal de este resultado es el siguiente Teorema.

Teorema 4.4 . *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y satisfaciendo las condiciones (4.9). Entonces $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.*

La demostración consiste en ver que $f(\mathbb{R}^n)$ es cerrado y abierto. Lo primero es consecuencia inmediata de la segunda condición de (4.9). Para ver que $f(\mathbb{R}^n)$ es abierto, tenemos que demostrar que $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\exists r > 0$ tal que $B_{\mathbb{R}^n} \ (f(x_0), r) \subset f(\mathbb{R}^n)$. Mediante un cambio de variable obvio podemos reducirnos al caso en que $x_0 = f(x_0) = 0$. Entonces (véase [14] para detalles), mediante una homotopía conveniente con una aplicación impar puede probarse que para cualquier $s > 0$, $d_B(f, B_{\mathbb{R}^n}(0, s), y) \neq 0$ si $y \in \mathbb{R}^n$ tiene norma suficientemente pequeña. Esto prueba que para algún $r > 0$, $B_{\mathbb{R}^n}(0, r) \subset f(B_{\mathbb{R}^n}(0, s))$, lo que concluye la demostración.

Incluso es posible obtener resultados de este tipo para clases amplias de variedades, como la esfera n-dimensional $S^n = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + ...x_{n+1}^2 = 1\}$:

Corolario 4.5 . *Sea $f : S^n \to S^n$ continua e inyectiva. Entonces f es biyectiva.*

La idea clave para demostrar este corolario a partir del anterior teorema es hacer la identificación $S^n \approx \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, conocida comúnmente con el nombre de compactificación de Alexandrof. Así, tomamos cualquier punto $a \in S^n$, que identificamos como ∞ (usualmente se toma el polo norte), y su imagen $b = f(a)$ como el "infinito" del espacio de llegada S^n. Restringiendo a $\mathbb{R}^n$ obtenemos una función $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bien definida (puesto que el punto b no puede ser imagen de otro punto distinto del a, al ser la función original inyectiva), continua e inyectiva (por serlo f) y verificando la segunda condición de (4.9). Aplicando por lo tanto el Teorema 4.4, obtenemos que $\overline{f}$ es biyectiva, y por lo tanto f también (puede consultarse [5] para resultados similares).

Corolario 4.6. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua tal que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0 \tag{4.10}$$

Entonces f no es inyectiva.

Para demostrar este resultado, basta aplicar el anterior corolario utilizando de nuevo la compactificación de Alexandrof (en este caso en el otro sentido). Animamos al lector a que complete los detalles de este ejercicio.

Con la ayuda del grado topológico puede probarse también, de manera relativamente sencilla ([14]), una extensión del famoso Teorema de la curva de Jordan a cualquier número de variables. En este sentido, sabemos que si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ homeomorfos, entonces $\mathbb{R}^n \setminus A$ y $\mathbb{R}^n \setminus B$ no son necesariamente homeomorfos. Por ejemplo, tómense en $\mathbb{R}^2$, $A = (0,1) \times \{0\}$ y $B = \mathbb{R} \times \{0\}$. Ahora bien, lo que sí puede probarse es que si A y B son subconjuntos homeomorfos y compactos de $\mathbb{R}^n$ entonces $\mathbb{R}^n \setminus A$ y $\mathbb{R}^n \setminus B$ tienen el mismo número de componentes conexas. En particular, si $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, entonces $\mathbb{R}^n \setminus A$ tiene dos componentes conexas (véase [15] para temas relacionados).

Para terminar, vamos a decir algo sobre una versión compleja del Teorema de Bolzano para funciones analíticas probada en 1980 por M. Shih ([46]).
Si Ω es un subconjunto abierto, conexo y acotado de $\mathbf{C}$ (conjunto de los números complejos) conteniendo al origen y $f : \overline{\Omega} \to \mathbf{C}$ es continua en $\overline{\Omega}$ y analítica en Ω, y verifica además la condición

$$Re\ (\overline{z} f(z)) > 0,\ \forall\ z \in \partial\Omega \tag{4.11}$$

entonces puede probarse ([45]) usando el Teorema de Rouché que la ecuación $f(z) = 0$ tiene exactamente una solución en Ω.

La idea básica de la demostración es que si $c = \dfrac{\inf \ Re\ \overline{z} f(z)}{\sup \ |z|^2}, \ z \in \partial\Omega$, y $g(z) = cz - f(z)$, entonces $|f(z)| > |g(z)|$ en $\partial\Omega$. Así, el Teorema de Rouché nos permite afirmar que f y $f+g$ tienen el mismo número de ceros en Ω. Usando el grado topológico de Brouwer, M. Shih ha probado en 1980 la siguiente versión en dimensión n del resultado anterior ([46]).

Teorema 4.7 . *Sea Ω un subconjunto de $\mathbf{C}^n$ abierto, conexo, acotado, conteniendo al origen y $f : \overline{\Omega} \to \mathbf{C}^n$ continua en $\overline{\Omega}$ y analítica en Ω, tal que satisface $Re\ (\overline{z} \cdot f(z)) > 0, \ \forall \ z \in \partial\Omega$. Entonces la ecuación $f(z) = 0$ tiene exactamente una solución en Ω.*

En la demostración de este Teorema se usa, además de las propiedades básicas del grado topológico expuestas en el Teorema 3.1, el hecho de que si $f = (f_1, ..., f_n) : \Omega \to \mathbf{C}^n$ es analítica entonces se tiene la siguiente relación entre los jacobianos reales y complejos:

$$det(\partial(u_j, v_j)/\partial(x_k, y_k))_{1 \le k,j \le n} = \ |det(\partial f_j/\partial z_k)_{1 \le k,j \le n}|^2,$$

donde $z_k = x_k + iy_k, \ 1 \le k \le n, \ \ f_j = u_j + iv_j, \ 1 \le j \le n$. Esto permite afirmar que para cualquier valor regular y de f (es decir, $y \in f(\Omega)$ tal que $det \ f'(z) \neq 0$ para cualquier $z \in \Omega$ verificando $f(z) = y$), el cardinal del conjunto $f^{-1}(y) \cap \Omega$ es exactamente $d_B(f, \Omega, y)$ (pensemos que f puede considerarse como una aplicación de $2n$ variables reales y con $2n$ componentes reales).

Queremos terminar haciendo la misma pregunta que al principio: ¿Hay alguna versión del Teorema de Bolzano para varias variables? Rogamos al lector que observe detenidamente las condiciones (1.1), (4.4) y (4.11), dadas respectivamente en los Teoremas 1.1, 4.2 y 4.7. La respuesta a la pregunta es ahora obvia. Ahora bien, como los matemáticos somos especiales en muchos sentidos, nos podemos entonces preguntar : ¿Hay alguna versión del Teorema de Bolzano para el caso de infinitas variables? A este respecto baste decir que en cualquier espacio de Banach de dimensión infinita, existe al menos una aplicación continua de la bola cerrada unidad en sí misma que no tiene puntos fijos ([14]) . Incluso se ha probado que dado cualquier subconjunto convexo y no compacto K de cualquier espacio de Banach, existe alguna aplicación continua $f : K \to K$ tal que f no tiene puntos fijos ([22]). Entre otras cosas, esto implica que el Teorema del punto fijo de Brouwer no es válido si $\mathbb{R}^n$ se sustituye por cualquier espacio de Banach de dimensión infinita. No obstante, es posible que esto no signifique que no existan versiones infinito dimensionales del Teorema de Bolzano ([14], [33], [43]). Esto será objeto de un próximo trabajo.

AGRADECIMIENTOS.
Queremos expresar nuestro agradecimiento a nuestros colegas José Martínez Aroza y Alfonso Romero Sarabia por habernos animado a elaborar esta colaboración para La Gaceta de la RSME.

Bibliografía

[1] J.C. Alexander. A primer on connectivity, Lect. Not. Math., 886, E. Fadell, G. Fournier, editores; Springer-Verlag, 1981.

[2] H. Amann y S.A. Weiss. On the uniqueness of topological degree, Math. Z. 130 (1973), 39-54.

[3] P. Bohl. Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtung, J. Reine Angew. Math. 127 (1904), 179-276.

[4] B. Bolzano. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege, Gottlieb Hass, Prague, 1817.

[5] G.E. Bredon. Topology and Geometry, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] H. Brezis. Análisis Funcional, Alianza Editorial, 1984.

[7] L.E.J. Brouwer. On continuous one-to-one transformations of surfaces into themselves,Proc. Kon. Ned. Ak. V. Seri A 11 (1909), 788-798.

[8] L.E.J. Brouwer. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 71 (1910), 97-115.

[9] L. E. J. Brouwer. Beweis der Invarianz der Dimensionszahl, Math. Ann. 70 (1911), 161-165.

[10] L.E.J. Brouwer. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 71 (1912), 97-115.

[11] F. E. Browder. On continuity of fixed points under deformations of continuous mappings, Summa Brasiliensis Math. 4 (1960), 183-191.

[12] E.A. Coddington y N. Levinson. Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.

[13] J. W. Dauben. Progress of mathematics in the early 19th century; context, contents and consequences, Impact of Bolzano's epoch on the development of Science, Prague, 1981, 223-260, Acta Hist. Rerum Nat. nencon Tech (special Issue), 13, 1982, CSAV, Prague.

[14] K. Deimling. Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985.

[15] A. Dold. Lectures on algebraic topology, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[16] A. Enayat. δ as a continuous function of x and ε, Amer. Math. Monthly 107 (2000), 151-155.

[17] P.G. Georgiev. Parametric Ekeland's variational principle, Appl. Math. Letters 14 (2001), 691-696.

[18] J.H. Hadamard. Sur quelques applications de l'indice de Kronecker, In J. Tannery: Introduction a la Théorie des Fonctions d'une Variable, Hermann, Paris, 1910, 875-915.

[19] J. K. Hale. Ordinary differential equations, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1969.

[20] J. G. Hocking y G. S. Young. Topología, Reverté, Barcelona, 1966.

[21] V. Jarnik. Bolzano and the foundations of mathematical analysis, Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists, Prague, 1981.

[22] V. Klee. Some topological properties of convex sets, Trans. Amer. Math. Soc. 178 (1955), 30-45.

[23] M. Kline. Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University Press, New York, 1972. Traducción al castellano en Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1992.

[24] L. Kronecker. Über Systeme von Funktionen mehrerer Variablen, Monatsber. Berlin Akad. (1869), 159-193; 688-698.

[25] W. Kulpa. The Poincaré-Miranda theorem, Amer. Math. Monthly, 104 (1997), 545-550.

[26] D. R. Kurepa. Around Bolzano's approach to real numbers, Czechoslovak Math. J. 32 (1982), 655-666.

[27] J. López-Gómez. Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja, Pearson Educación, S.A., Madrid, 2001.

[28] J. Mawhin. Le théorème du point fixe de Brouwer: un siècle de métamorphoses, Revue d'Histoire des Mathématiques 9 (2003).

[29] J. Mawhin. Le théorèm des indéboulonnables, Pour la Science (Édition francaise de Scientific American) 304 (Févier 2003), 64-73.

[30] J. Mawhin. Leray-Schauder degree: a half century of extensions and applications, Topological Methods in Nonlinear Analysis 14 (1999), 195-228.

[31] J.W. Milnor. Topology from the differentiable viewpoint, Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[32] C. Miranda. Una osservazione su una teorema di Brouwer, Boll. Unione Mat. Ital. 3 (1940), 527-527.

[33] C.H. Morales. A Bolzano's theorem in the new millenium, Non. Analy. 51 (2002), 679-691

[34] H. Poincaré. Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle, J. Math. Pures Appl. 7 (1881), 375-422.

[35] H. Poincaré. Sur certaines solutions particulieres du probléme des trois corps, C.R. Acad. Sci. Paris 97 (1883), 251-252.

[36] H. Poincaré. Sur certaines solutions particulieres du probléme des trois corps, Bull. Astronomique 1 (1884), 63-74.

[37] H. Poincaré. Sur les courbes définies par une équation différentielle IV, J. Math. Pures Appl. 85 (1886), 151-217.

[38] D. Repovs y P.V. Semenov. Continuous selections of multivalued mappings, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[39] H. Robbins. Some complements to Brouwer's fixed point theorem, Israel J. Math. 5 (1967), 225-226.

[40] S.B. Russ. A translation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem, Historia Math. 7 (1980), 156-185.

[41] G. Sansone y R. Conti. Non-Linear Differential Equations, Macmillan, 1964.

[42] J. Schauder. Der Fixpunktsatz in Funcktionalräumen, Studia Math. 2 (1930), 171-180.

[43] J.T. Schwartz. Nonlinear Functional Analysis, Gordon and Breach, New York, 1969.

[44] H.W. Siegberg. Some historical remarks concerning degree theory, Amer. Math. Monthly 88 (1981), 125-139.

[45] M.H. Shih. An analog of Bolzano's theorem for functions of a complex variable, Amer. Math. Monthly 89(3) (1982), 210-211.

[46] M.H. Shih. Bolzano's theorem in several complex variables, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), 32-34.

[47] E. H. Spanier. Algebraic topology, McGrawHill, New York, 1966.

[48] T. Zamfirescu. A generic view of the theorems of Brouwer and Schauder, Math. Z. 213 (1993), 387-392.

Antonio Cañada y Salvador Villegas
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada. 18071-Granada.
e-mail: acanada@ugr.es, svillega@ugr.es