Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o0 *(0000), 1–24*

Fourier y sus coeficientes

A. Cañada *

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

acanada@ugr.es

1. Introducción

Cuando se hace alguna consulta histórica sobre los llamados métodos de Fourier y su influencia en la historia de la Matemática, un aspecto común suele ser el comentario que se refiere al procedimiento usado por Fourier en el cálculo de los coeficientes del desarrollo considerado. Es más o menos, así:

Jean Baptiste J.Fourier (1768-1830)

Para calcular los coeficientes, Fourier usó el desarrollo en serie de potencias de la función dada y de las funciones trigonométricas consideradas. Reordenó estos desarrollos con objeto de igualar los términos que multiplican a las respectivas potencias y llegó a un sistema lineal de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas. Entonces consideró un sistema lineal finito con m ecuaciones y m incógnitas (sistema formado con las primeras m filas y las primeras m columnas del sistema infinito original). Resolvió este sistema finito e hizo tender m a ∞. ***Después de un análisis largo y complicado****, alcanzó su célebre fórmula para los coeficientes.*

Cuando se me propuso realizar esta colaboración para el boletín de S$\vec{e}$MA, pensé que podría tener interés transcribir a nuestros días algunos de los razonamientos originales de Fourier. En nuestro Departamento tenemos una copia de una edición que Dover llevó a cabo en 1955 ([16]) sobre la versión inglesa de 1878 del libro original de Fourier (publicado en francés en 1822). Me puse manos a la obra (y he de confesar que ya lo había intentado varias veces, pero no había perseverado lo suficiente). Lo pasé mal (porque muchos de los razonamientos que hace Fourier son realmente difíciles de entender para mí y porque la notación que usa es muy complicada para nosotros) y bien (cuando

*Deseo dar las gracias a J. M. Vegas, por haberme ofrecido la posibilidad de realizar esta colaboración de carácter histórico sobre Fourier. Asimismo, deseo agradecer a J. Alaminos su información sobre la página web donde se puede encontrar el texto original del libro de Fourier y su imprescindible ayuda en la inclusión de figuras en este trabajo. Las fotografías que aparecen en el texto han sido obtenidas de la dirección http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/index.html. Las reproducciones de las páginas del libro original de Fourier han sido obtenidas de la dirección http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29061r

después de algunas horas de trabajo, conseguí entenderlos). El resultado final es muy positivo. Por una parte tienes ocasión de comparar lo que entendemos hoy en día por rigor matemático con el rigor de la época de Fourier. Por otra, te das cuenta de que leer escritos originales de grandes matemáticos es muy formativo y al mismo tiempo placentero. No se daban por vencidos, desarrollaban unas tremendas dosis de ingenio para conseguir su objetivo y cuando, al final, haces balance de lo que has aprendido intentando entender lo que allí hay escrito, te das cuenta de que ésa es una parte fundamental de la auténtica Matemática, una parte que aúna conceptos, resultados profundos, etc. con sus orígenes históricos. En las notas que aparecen a continuación, en la sección tercera intento trasladar a nuestros días algunas de las ideas de Fourier. En la mayoría de las ocasiones hay que prescindir del rigor en los razonamientos, tal y como lo entendemos hoy en día. Es también inevitable, aunque sea muy someramente, escribir algo sobre el origen de los métodos de Fourier (sección segunda) y la influencia que las ideas de Fourier han tenido en la historia de la Matemática (sección cuarta).

2. El origen de las series de Fourier: las ecuaciones de ondas y del calor

Uno de los problemas más interesantes del que se ocuparon los científicos del siglo XVIII (y que posteriormente motivó el estudio de muchos otros similares) fue el problema de la cuerda vibrante. Si tomamos como referencia el estupendo texto de M. Kline ([25]), el primer matemático que elaboró un modelo apropiado para estudiar este problema fue Jean Le Rond d'Alembert en 1747 (para esta breve sección puede consultarse el texto citado para documentarse de manera muy precisa sobre fechas, revista científica donde se realizaron las publicaciones, volumen, páginas, etc. También son útiles [9] y [19]).
En su versión más sencilla, D'Alembert demostró que si la función $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada x (suponemos $0 \leq x \leq \pi$ por simplicidad) y el tiempo t, entonces, si la posición inicial de la cuerda viene dada por una función f y la velocidad inicial de la misma es cero, la función u satisface un problema de tipo mixto de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = f(x),\ & u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0, t \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

D'Alembert demostró además que la solución de (1) viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)] \tag{2}$$

donde $\tilde{f}$ es la extensión a $\mathbb{R}$, impar y $2\pi-$ periódica de la función f.

La fórmula (2) fue también demostrada por Euler en 1749. Euler difería de D'Alembert en el tipo de funciones iniciales f que podían tenerse en cuenta.

De hecho, estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de “función”, un concepto que hoy en día presumimos de tener muy claro. Mientras que para D’Alembert, f debería tener una fórmula concreta (una única expresión analítica), Euler defendía que no había ninguna razón física para no admitir como posiciones iniciales f a aquellas que, en diferentes partes de $[0, \pi]$, tuviesen expresiones distintas, siempre que al considerarlas unidas la posición inicial resultante tuviese una apropiada regularidad. Parece ser que tal discusión entre D’Alembert y Euler provenía del hecho de que en su tiempo se admitía que cada función daba lugar a una gráfica, pero no recíprocamente (cuando la gráfica considerada tenía diferentes expresiones en distintos intervalos). En resumen, Euler defendía que cualquier gráfica podía considerarse como curva inicial, tesis que no era compartida por D’Alembert. A este respecto puede consultarse la versión castellana de un interesante artículo de Luzin sobre el concepto de función ([28]).
Otra manera de obtener la solución del problema (1), completamente distinta (al menos a primera vista), fue propuesta por Daniel Bernoulli en 1753. La idea clave es obtener la solución de (1) como superposición de ondas más sencillas, concretamente aquellas que son de la forma

$$u_n(x,t) = sen(nx)\cos(nt), \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Para cada tiempo t fijo, la anterior función es un múltiplo de la función $sen(nx)$, que se anula exactamente en $n-1$ puntos del intervalo $(0, \pi)$. Así, si pudiésemos observar la vibración de la cuerda correspondiente a las ondas u_n, tendríamos $n-1$ puntos, llamados nodos, en los que la cuerda se mantendría constantemente fija en el eje de abscisas (como en los extremos del intervalo $[0, \pi]$). Entre dichos nodos, la cuerda oscilaría de acuerdo con (3).

¿Cómo concibió Bernoulli esta idea? Parece ser que una posibilidad es que usase sus conocimientos musicales. Para ello se basó en que el sonido que emite una cuerda vibrante es, en general, superposición de armónicos, es decir, superposición de funciones de la forma $u_n(x,t)$. Tales funciones representan, para $n = 1$ el tono fundamental y para $n > 1$ sus armónicos, y desde el punto de vista musical se corresponden con los tonos puros. Así, Bernoulli afirmó que cualquier sonido que produjese la vibración de la cuerda debe ser superposición de tonos puros. Desde el punto de vista matemático, ello significa que la solución de (1) puede representarse de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n sen(nx)\cos(nt), \tag{4}$$

donde los coeficientes f_n han de elegirse adecuadamente para que se satisfagan todas las relaciones de (1). Si la solución propuesta por *Bernoulli* fuese correcta, ello implicaría que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n sen(nx), \ \forall\, x \in [0, \pi], \tag{5}$$

para una adecuada elección de los coeficientes f_n. Este punto de vista expuesto por Bernoulli no tuvo aceptación en su tiempo. En particular, recibió duras contestaciones por parte de D'Alembert y Euler quienes no admitían que una función inicial f, más o menos arbitraria, pudiera representarse en la forma (5). Representativo de esto que decimos puede ser el artículo de D'Alembert titulado "*Fondamental*" contenido en el volumen séptimo de la famosa "*Encyclopédie*". La controversia se prolongó durante años.

Parece ser que las ideas de Bernoulli fueron fuente de inspiración para Jean Baptiste-Joseph Fourier, matemático y físico francés y profesor de análisis de la Escuela Politécnica. Fourier se interesó por la teoría de la conducción del calor en los cuerpos sólidos. En 1807 envió un artículo a la Academia de Ciencias de París (Mémoire sur la propagation de la chaleur), que trataba sobre dicho tema. En su versión más elemental (véase de nuevo [25]), Fourier se interesó por un problema de tipo mixto para la ecuación del calor de la forma

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \ 0 < x < \pi, \ 0 < t < T, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ 0 \le t \le T, \ u(x,0) = f(x), \ 0 \le x \le \pi. \end{gathered} \tag{6}$$

Como Bernoulli, Fourier buscó las soluciones más sencillas que puede presentar este problema usando el método de separación de variables y afirmó que la solución de (6) viene dada como superposición de ellas. Más precisamente, Fourier propuso como solución de (6) a la función u dada por la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \exp(-n^2 t) sen(nx), \tag{7}$$

donde

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(nx) \ dx, \ \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Sin duda, el hecho de haber alcanzado la fórmula anterior para los coeficientes f_n es una de las contribuciones fundamentales de Fourier, y marca una diferencia significativa respecto del trabajo previo de Bernoulli sobre este tema.

El artículo de Fourier fue estudiado por los miembros de la Academia Francesa y, en términos generales, recibió serias críticas de los mismos, siendo su principal objeción la falta de rigor. No obstante, los científicos de tan prestigiosa institución estaban convencidos de la importancia que tenían los problemas relacionados con la propagación del calor y, los resultados teóricos presentados por Fourier tenían una gran concordancia con diversos experimentos llevados a cabo previamente. Por este motivo, convocaron un premio sobre el tema. Dicho premio fue otorgado a Fourier en 1812, pero a pesar de esto se continuó criticando su falta de rigor, de tal manera que aunque obtuvo el citado premio, Fourier no consiguió el propósito de publicar su trabajo en la célebre serie “Mémoires”de la Academia Francesa. Fourier publicó por su cuenta su famoso libro *Théorie Analytique de la Chaleur*, en 1822 en París, donde incorporó parte de su artículo de 1812 prácticamente sin cambio. Este libro es actualmente una de las obras clásicas en matemáticas. Dos años más tarde consiguió el cargo de Secretario de la Academia Francesa y al fin pudo publicar el mencionado artículo en la serie “Mémoires”.

Leyendo el libro original de Fourier, no es de extrañar la reacción de los miembros de la Academia Francesa. Me gustaría que el lector pensase sobre ello después de leer con detalle la siguiente sección, donde se presentan algunos de los razonamientos originales de Fourier.

CHAPITRE III. 211

en une suite infinie de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. Cette question est liée à la théorie des équations aux différences partielles et a été agitée dès l'origine de cette analyse. Il était nécessaire de la résoudre pour intégrer convenablement les équations de la propagation de la chaleur; nous allons en exposer la solution.

On examinera, en premier lieu, le cas où il s'agit de réduire en une série de sinus d'arcs multiples, une fonction dont le développement ne contient que des puissances impaires de la variable. Désignant une telle fonction par φx, on posera l'équation

$$\varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + \ldots \text{ etc.}$$

et il s'agit de déterminer la valeur des coëfficients a, b, c, d, etc. On écrira d'abord l'équation

$$\varphi x = x \varphi' 0 + \frac{x^2}{2} \varphi'' 0 + \frac{x^3}{2.3} \varphi''' 0 + \frac{x^4}{2.3.4} \varphi^{\text{IV}} 0 + \frac{x^5}{2.3.4.5} \varphi^{\text{V}} 0 + \ldots \text{ etc.}$$

dans laquelle $\varphi' 0$, $\varphi'' 0$, $\varphi''' 0$, $\varphi^{\text{IV}} 0$, etc. désignent les valeurs que prennent les coëfficients

$$\frac{d.\varphi x}{dx},\ \frac{d^2.\varphi x}{dx^2},\ \frac{d^3.\varphi x}{dx^3},\ \frac{d^4.\varphi x}{dx^4},\ \text{etc.}$$

lorsqu'on y suppose $x = 0$. Ainsi en représentant le développement selon les puissances de x par l'équation

$$\varphi x = A x - B \frac{x^3}{2.3} + C \frac{x^5}{2.3.4.5} - D \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + E \frac{x^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{etc.}$$

3. Razonamientos e ideas de Fourier en el cálculo de los coeficientes

En esta sección intento transcribir algunas de las ideas originales de Fourier en la deducción de la fórmula (8). Más concretamente me refiero a las contenidas en los párrafos 207 a 223, de la sección VI de [16] (por favor olvídense del rigor tal y como lo entendemos hoy en día, pero disfruten con el ingenio y atrevimiento de Fourier).

3.1. Funciones desarrollables en series de potencias

Como hemos comentado en la sección anterior, Fourier se planteó, entre otros, desarrollos del tipo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx) \tag{9}$$

para funciones f que en principio supuso que eran impares y desarrollables en series de potencias y para valores de la variable x comprendidos entre 0 y π. Su objetivo era lograr una fórmula para el cálculo de los coeficientes $f_n,\ n \in \mathbb{N}$ que permitiese afirmar que (9) es verdad. Como f es impar, las derivadas de orden par de f en el origen son cero, es decir $f^{2k)}(0) = 0,\ \forall\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por tanto

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{2n+1)}(0)}{(2n+1)!}\ x^{2n+1} \tag{10}$$

En este punto hemos de decir que el desarrollo de Taylor de una función era conocido al menos desde 1715, cuando Taylor publicó un trabajo titulado "Methodus incrementorum directa et inversa", donde aparecía la conocida hoy en día como fórmula de Taylor.

Regresando a nuestro tema, teniendo en cuenta el desarrollo en serie de potencias de la función $\operatorname{sen} x$, tenemos

$$\operatorname{sen}(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(nx)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(nx)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{2k+1} \right) \right)$$

Volviendo a las relaciones (9) y (10) e igualando los coeficientes de las respectivas potencias x^{2k+1} obtenemos

$$(-1)^k f^{2k+1)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\ n^{2k+1},\ \forall\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{11}$$

Lo anterior constituye un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas (los coeficientes f_n). Aquí Fourier "corta por lo sano" (perdón por la expresión, pero no se me ocurre otra mejor), considerando, para cada $m \in \mathbb{N}$ el siguiente sistema de m ecuaciones con m incógnitas (los elementos $g_n^m,\ 1 \leq n \leq m$)

$$(-1)^k f^{2k+1)}(0) = \sum_{n=1}^{m} g_n^m\ n^{2k+1},\ 0 \leq k \leq m-1 \tag{12}$$

Obsérvese que el anterior sistema y las incógnitas g_n^m, $1 \leq n \leq m$ cambian con m (observación realizada por Fourier). Como primera afirmación conflictiva, Fourier dice que los coeficientes f_n que está buscando se obtienen como límite de los anteriores, es decir

$$f_n = \lim_{m \to +\infty} g_n^m, \ \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{13}$$

(Parece ser que, entonces, el problema no ofrece ninguna dificultad. Sigan leyendo por favor)
Haciendo una pequeña pausa en nuestro objetivo, diré que existe algo de similitud entre la afirmación de Fourier (fórmula (13) y la idea usada por Taylor en la obtención de su famosa fórmula. En efecto, Taylor obtuvo su fórmula como "un caso límite" de la fórmula de interpolación de Newton ([10],[32]).

En adelante y para evitar complicaciones innecesarias nos concentraremos en el caso $n = 1$ que nos conducirá al primer coeficiente de Fourier f_1 (los razonamientos son muy similares para n general).
Para resolver el sistema lineal finito (12), Fourier usó un método elemental de eliminación de incógnitas: multiplicó la primera ecuación por un número conveniente y le restó la segunda con objeto de eliminar la última incógnita g_m^m. Hizo lo propio con la segunda ecuación y le restó la tercera, etc. Así obtuvo un sistema con $m-1$ ecuaciones y $m-1$ incógnitas. Iterando el procedimiento $m-1$ veces obtuvo g_1^m. Esta es la parte de "obrero" y les aseguro que no tiene nada de interés. Simplemente hay que tener un poco de tiempo y paciencia para hacer los cálculos. Se obtiene así

$$g_1^m = \frac{m^2(m-1)^2 \ldots 2^2}{(m^2-1)((m-1)^2-1))...(2^2-1)} H(m) \tag{14}$$

donde

$$H(m) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{2k+1)}(0) \left[\sum_{2 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 ... n_k^2} \right] \tag{15}$$

Para $k = 0$, el corchete anterior se entiende que es uno. Como

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{m^2(m-1)^2 \ldots 2^2}{(m^2-1)((m-1)^2-1))...(2^2-1)} = \lim_{m \to +\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \ldots} = 2,$$

tendríamos una primera fórmula para f_1 que merece la pena ser destacada. En ella se obtiene el coeficiente f_1 en función de las derivadas (de orden impar) de la función f en el origen.

Fórmula número uno para el primer coeficiente

$$\frac{f_1}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} f^{2k+1)}(0) \left[\sum_{2 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 ... n_k^2} \right] \tag{16}$$

(Los que conozcan algo de series de Fourier, deben estar preguntándose qué tiene que ver esto con la expresión usual de f_1 dada por (8). Un poco de paciencia, por favor).

Nota 1 *Observemos que en la expresión anterior, los coeficientes de* $f^{2k+1)}(0)$ *se forman con elementos del conjunto* $\{\frac{1}{(m+1)^2},\ m \in \mathbb{N}\}$ *siguiendo una ley muy clara. En el cálculo del segundo coeficiente* f_2 *la ley es la misma usando el conjunto* $\{\frac{1}{(m+1)^2},\ m \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \setminus \{1\}\}$. *En general, el* $n-$*ésimo coeficiente de Fourier* f_n *se obtendría de manera análoga usando el conjunto* $\{\frac{1}{(m+1)^2},\ m \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \setminus \{n-1\}\}$.

A continuación Fourier calculó de manera explícita las sumas de las series que aparecen como coeficientes de $f^{2k+1)}(0)$ en la expresión (16).

Esto está íntimamente conectado con el llamado problema de Basilea, sobre la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

resuelto brillantemente por Euler y que con anterioridad había sido objetivo (sin éxito) de otros grandes matemáticos (véase [14] para los detalles).

Leonhard Euler(1707-1783)

Las ideas principales se describen a continuación.
Como hemos mencionado con anterioridad, era conocido que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

de donde se obtiene, para cualquier x que no sea cero,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

La parte derecha de la expresión anterior era para Euler un “polinomio de grado infinito”, cuyos ceros son los mismos que los de la función $\operatorname{sen} x$, salvo $x = 0$, es decir, el conjunto de números reales $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Por tanto, este polinomio infinito se puede factorizar de la forma siguiente

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{k\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{-k\pi}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \qquad (17)$$

Hay veces en las que merece la pena poner las fórmulas de manera desarrollada para apreciar su belleza, evitando sumas y productos infinitos. Por ejemplo, la fórmula anterior queda de la forma siguiente:

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots=\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots$$

Igualando el coeficiente de la potencia x^2, Euler obtuvo en 1735

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

(Tengo que reconocer que la primera vez que vi esta demostración en [14] me quedé maravillado de su sencillez y belleza).
Euler estudió además el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} \tag{18}$$

para diferentes valores de k. Por ejemplo, probó que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945},\ldots,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{26}}=\frac{2^{24}76977927\pi^{26}}{27!}$$

Además encontró una relación clara (para $k\in\mathbb{N}$ arbitrario) entre la suma anterior y los llamados números de Bernoulli, que no son sino los coeficientes del desarrollo

$$\frac{x}{\exp x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!}$$

De hecho, para cualquier natural k se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k-1}((2\pi)^{2k}/2(2k)!)B_{2k}$$

donde B_{2k} denota el número de Bernoulli de orden $2k$. Como estos números son racionales, se deduce inmediatamente que la suma (18) es irracional para cualquier valor de $k\in\mathbb{N}$.
El caso de la suma de las series del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k+1}} \tag{19}$$

con k un número natural sigue siendo un misterio (uno más, de los muchos que rodean a la función zeta de Riemann). En 1978, Roger Apéry ([5]; véanse también [12] y [30]) demostró que cuando $k=1$, la suma es un número irracional, pero aún no se tiene un resultado similar para valores mayores de k, aunque también se sabe que el conjunto de los valores de k para los que (19) es irracional, es un conjunto infinito ([15]).

Volvamos a nuestro tema. Fourier igualó los coeficientes de las respectivas potencias de x en la expresión (17) obteniendo

$$\sum_{1\leq n_1<n_2<\ldots<n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \ldots n_k^2} = \frac{\pi^{2k}}{(2k+1)!},\ \forall\ k \in \mathbb{N} \tag{20}$$

Si llamamos R_k al coeficiente de $f^{2k+1)}(0)$ en (16) y S_k a la suma anterior, entonces se tiene

$$R_k = S_k - R_{k-1},\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Como, por definición $R_0 = 1$, se obtiene fácilmente que

$$R_k = (-1)^k \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!},\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Combinando esto con (16) obtenemos un segundo resultado sobre el coeficiente f_1, que merece la pena destacarse (puesto que ya aparece el número π).

Fórmula número dos para el primer coeficiente

$$\frac{f_1}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{2k+1)}(0) \left[\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} \right] \tag{21}$$

Nota 2 *Fourier no usaba las notaciones anteriores, con sumas infinitas, productos infinitos, etc. al menos en la parte que yo he estudiado. Obtenía varios casos particulares y después escribía algo parecido a esto: "es fácil darse cuenta de la ley general que siguen estas relaciones". Podemos hacernos una buena idea de lo que quiero decir, si leemos con detenimiento el razonamiento que expongo a continuación de la nota 3.*

Nota 3 *Una vez obtenida por Fourier una fórmula similar a (21) para coeficientes arbitrarios f_n, Fourier incluyó en su libro numerosos casos concretos. Así concluyó, por ejemplo, que en el intervalo $(-\pi, \pi)$ se tiene*

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$$

y comentó que con anterioridad este resultado había sido obtenido por Euler. También consideró Fourier el caso más general dado por $f(x) = x^{2p+1}$, para algunos valores de p.

En un golpe más de audacia (mis conocimientos no me permiten calificar esto de otra forma), Fourier dio otra expresión para f_1 que fue clave para la

deducción de la fórmula definitiva. Es como sigue.
Partiendo de (21) se tiene

$$\frac{f_1}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f^{2k+1)}(0)\left[\sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}\right] =$$

$$f'(0) - f'''(0)\left[1-\frac{\pi^2}{3!}\right] + f^{v)}(0)\left[1-\frac{\pi^2}{3!}+\frac{\pi^4}{5!}\right]$$

$$-f^{vii)}(0)\left[1-\frac{\pi^2}{3!}+\frac{\pi^4}{5!}-\frac{\pi^6}{7!}\right] + ... =$$

$$\left[f'(0) + f'''(0)\frac{\pi^2}{3!} + f^{v)}(0)\frac{\pi^4}{5!} + ...\right] -$$

$$\left[f'''(0) + f^{v)}(0)\frac{\pi^2}{3!} + f^{vii)}(0)\frac{\pi^4}{5!} + ...\right] ...$$

Ahora dice Fourier que usando nuevamente el desarrollo de Taylor, el primer corchete de la expresión anterior es claramente (¿?) el desarrollo en serie de potencias en torno al origen de $\frac{f(\pi)}{\pi}$, el segundo corchete es el desarrollo en serie de potencias en torno al origen de $\frac{f''(\pi)}{\pi}$ y así sucesivamente con lo que obtiene

$$\frac{f_1}{2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi) \tag{22}$$

o bien, para los que están un poco impacientes,

Fórmula número tres para el primer coeficiente

$$f_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi) \tag{23}$$

(al menos ya aparece en la fórmula de f_1 el número $\frac{2}{\pi}$).

3.2. ¿Funciones arbitrarias?

Como hemos tenido oportunidad de apreciar, en los razonamientos de la sección anterior hay de todo: una parte que puede calificarse de obrera, en el sentido de que es cálculo y más cálculo sin ideas significativas (la resolución del sistema lineal finito-dimensional). Otras deducciones son ingeniosas (como el paso de la fórmula número uno a la fórmula número dos en la obtención del primer coeficiente) y otras son simplemente audaces (por ejemplo, el paso de la fórmula número dos a la fórmula número tres). No obstante, aquellos que tienen alguna familiaridad con series de Fourier estarán todavía preguntándose qué tienen que ver las expresiones (16), (21) y (23) con la fórmula bien conocida para f_1. Tengan un poco de paciencia porque ahora viene lo mejor.

Alcanzada la fórmula (23) Fourier hace una (¿otra?) afirmación sorprendente. Dice más o menos lo siguiente: Hasta ahora hemos supuesto que la función f puede desarrollarse en serie de potencias de la variable x. No obstante, podemos hacer que el resultado previo sea válido para funciones cualesquiera enteramente arbitrarias, incluso discontinuas. Para establecer la veracidad de esta afirmación es preciso que examinemos con detalle la naturaleza de los coeficientes de $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}(2x), \ldots$ *en el desarrollo (9).*

232 THÉORIE DE LA CHALEUR.

qui seraient discontinues et entièrement arbitraires. Pour établir clairement la vérité de cette proposition, il est nécessaire de poursuivre l'analyse qui fournit l'équation précédente (B) et d'examiner quelle est la nature des coëfficients qui multiplient sin. x, sin. $2x$, sin. $3x$, sin. $4x$. En désignant par $\frac{s}{n}$ la quantité qui multiplie dans cette équation $\frac{1}{n}$ sin. nx, si n est impair, et $-\frac{1}{n}$ sin. nx, si n est pair; on aura

$$s = \varphi\pi - \frac{1}{n^2}\varphi''\pi + \frac{1}{n^4}\varphi^{iv}\pi - \frac{1}{n^6}\varphi^{vi}\pi + \text{etc.}$$

Considérant s comme une fonction de π, différentiant deux fois, et comparant les résultats, on trouve $s + \frac{1}{n^2}\frac{d^2 s}{d\pi^2} = \varphi\pi$; équation à laquelle la valeur précédente de s doit satisfaire. Or, l'équation $s + \frac{1}{n^2}\frac{d^2 s}{dx^2} = \varphi x$, dans laquelle s est considérée comme une fonction de x, a pour intégrale

$$s = a \cos. nx + b \sin. nx + n \sin. nx \int \cos. nx . \varphi x . dx - n \cos. nx \int \sin. nx . \varphi x \, dx.$$

n étant un nombre entier, et la valeur de x étant égale à π, on a $s = \pm n \int \varphi x . \sin. nx \, dx$. Le signe + doit être choisi lorsque n est impair, et le signe − lorsque ce nombre est pair. On doit supposer x égal à la demi-circonférence π, après l'intégration indiquée; ce résultat se vérifie, lorqu'on développe au moyen de l'intégration par parties, le terme

$$\int \varphi x \sin. nx . dx$$

Cuidado con la afirmación anterior. Parece claro que una "función cualesquiera enteramente arbitraria" no era para Fourier lo que entendemos hoy en día por ello. Por ejemplo, Fourier consideraba a una función del tipo

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x), & x < 0, \\ \exp(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

como discontinua. En este sentido conviene tener en cuenta que fue Cauchy quien definió rigurosamente en su Cours d'analyse (1823,1829) los conceptos de función, límite, continuidad, derivada e integral tal y como los entendemos hoy en día, mientras que la primera versión del tratado de Fourier se presentó a la Academia Francesa en 1807, aunque la publicación de su famoso libro se retrasó (por causas bien conocidas para los aficionados a la historia) hasta 1822.

Para tratar de entender el razonamiento de Fourier nos concentramos de nuevo en la expresión (23) que define el coeficiente f_1. Fourier consideró que f_1 era una función de π y si denotamos por $s(\pi)$ a la función $s(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi)$ entonces, derivando dos veces respecto de π se obtiene

$$s''(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n+2)}(\pi) \tag{24}$$

con lo que

$$s''(\pi) + s(\pi) = f(\pi) \tag{25}$$

Fourier razona a continuación sobre la ecuación diferencial

$$s''(x) + s(x) = f(x) \tag{26}$$

en la que s se considera una función de x. De hecho, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(x)$. Era conocido (el razonamiento de Fourier es un poco más complicado que el que expongo aquí) que $s(x)$ debe ser de la forma

$$s(x) = a\cos x + b \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \int_0^x f(s)\cos s \; ds - \cos x \int_0^x f(s) \operatorname{sen} s \; ds \tag{27}$$

para ciertas constantes a y b. Por tanto

$$s(\pi) = -a + \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} x \quad dx$$

Como además $s(0) = 0$, la constante a debe ser cero, alcanzándose la fórmula

$$s(\pi) = \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} x \; dx$$

con lo que

$$f_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} x \; dx \tag{28}$$

Como ya hemos comentado, los razonamientos de Fourier son similares para obtener el coeficientes f_n, obteniendo

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \; dx, \; \forall \; n \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

Una vez que Fourier acabó los razonamientos que le permitieron alcanzar la fórmula (29), hace también una afirmación muy curiosa. Dice que el resultado obtenido se puede comprobar (¿?) de manera muy simple: basta multiplicar la expresión (9) por la función $\operatorname{sen}(nx)$ e integrar de 0 a π.
El mismo Fourier dice en su libro que la fórmula (29) es un resultado destacable, puesto que la función considerada puede ser enteramente arbitraria, siempre que (29) se pueda calcular. Precisamente el intentar dar sentido a los llamados

coeficientes de Fourier ha motivado de manera significativa los diferentes conceptos de integral (véase [25] para fechas históricas concretas).

En efecto, para el caso en que f es una función continua, Cauchy introdujo lo que hoy en día se conoce con el nombre de sumas de Riemann, es decir sumas de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{30}$$

donde $x_0 = 0 < x_1 < ... < x_n = \pi$ es cualquier partición del intervalo $[0, \pi]$ y $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $1 \leq i \leq n$. Aunque de manera no totalmente rigurosa (pues no expuso explícitamente el concepto de continuidad uniforme), Cauchy demostró que si f es continua en $[0, \pi]$ y las longitudes de todos los subintervalos de la partición considerada tienden a cero, entonces las anteriores sumas convergen a un límite llamado la integral de la función.


Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

Riemann también se interesó por el tema afirmando que era importante, al menos para los matemáticos aunque no necesariamente para las aplicaciones físicas, establecer las condiciones más amplias posibles bajos las cuales tienen sentido las fórmulas de los coeficientes de Fourier. Introdujo así lo que llamamos hoy en día integral de Riemann, cuya idea básica es por una parte no asumir necesariamente que f es continua, y por otra establecer condiciones lo más generales posibles para que las sumas (30) tengan un único límite cuando las longitudes de todos los subintervalos de la partición considerada tienden a cero. Esto le permitió integrar funciones con un número infinito de discontinuidades. No obstante, hubo que esperar a los trabajos de Lebesgue sobre la medida de un conjunto, para tener una caracterización precisa de las funciones que pueden integrarse según Riemann. De hecho, la que se considera actualmente como integral definitiva en muchos aspectos, es la introducida por Lebesgue en 1902 en su tesis doctoral: "Intégrale, longueur, aire". El punto de partida, respecto de la noción de integral de Cauchy o de Riemann es completamente diferente, pues lo que se intentaba era medir, de alguna forma, el conjunto de puntos de discontinuidad de una función dada (véase [4]). La noción de integral de Lebesgue permitió probar con gran generalidad muchas conclusiones sobre series de Fourier que, con anterioridad a Lebesgue, eran conocidas para tipos particulares de funciones (lema de Riemann-Lebesgue, igualdad de Parseval, criterios de convergencia puntual, etc.). Además, muchos resultados de la teoría de integración de Lebesgue se expresan con una gran simplicidad y claridad respecto de las teorías de integración anteriores (teoremas de convergencia, teorema de Fubini, etc.), de tal forma que el conocimiento de la teoría de la integral de Lebesgue es, hoy en día, imprescindible, para poder entender y presentar adecuadamente la teoría de series de Fourier.

4. Algunos temas relacionados con series de Fourier

Las ideas expuestas por Fourier en su libro plantearon de manera inmediata innumerables interrogantes y han originado, a lo largo de dos siglos, gran cantidad de investigación. Han sido muchas las partes de la Matemática que se han desarrollado a partir de ellas. Comentamos algunas a continuación.

4.1. Funciones continuas no derivables

Las nociones de continuidad y diferenciabilidad de una función real de variable real están hoy en día perfectamente establecidas. Sin embargo, históricamente no ha ocurrido así. De hecho, el primitivo concepto de derivada debido a Newton y Leibnitz era bastante más complicado de expresar del que conocemos en la actualidad. Fue Cauchy ([25]) quien, unificando las notaciones de Newton y Leibnitz, y basado en una definición anterior de Bolzano de 1817, introdujo en 1823 la definición que hoy en día se da en todos los libros de texto

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{31}$$

Durante bastante tiempo se estuvo convencido de que cualquier función continua debía ser derivable, excepto posiblemente en conjuntos “aislados”de puntos. Pero, insistamos, ¿en cuántos puntos puede una función continua no ser derivable? La respuesta a esta pregunta estuvo relacionada desde el principio con la siguiente cuestión sobre series de Fourier: ¿en cuántos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua dada? De hecho, después de la publicación, en 1822, del libro de Fourier, Dirichlet se ocupó durante varios años del problema de la convergencia de las series de Fourier, dando por primera vez de forma rigurosa un conjunto de hipótesis para garantizar la convergencia de las mismas. Este conjunto de hipótesis incluía la continuidad. Durante aproximadamente los cincuenta años siguientes, se pensó que la continuidad de la función debería ser suficiente para la convergencia de su serie de Fourier. Sin embargo, algunos matemáticos sospechaban que ello no debía ser así y todo esto motivó el estudio de funciones “raras”en el sentido de que tales funciones fuesen continuas, pero no derivables “en el máximo número de puntos posibles”. Riemann definió en 1868 una función f, integrable en cualquier intervalo real finito, pero que tiene un conjunto infinito de discontinuidades en cualquier intervalo real no trivial. Además, para esta función f definida por Riemann, una integral indefinida cualquiera es continua en cualquier punto de $\mathbb{R}$, y sin embargo no es derivable en ningún punto de discontinuidad de f.
Posteriormente, Weierstrass, estudiando el tipo de funciones que podían representarse o desarrollarse en serie de Fourier, presentó en 1872 un ejemplo sorprendente a la Real Academia de Ciencias de Berlín: una función real,

de variable real, continua en cualquier punto y no derivable en ninguno. Concretamente, el ejemplo de Weierstrass está dado por la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \tag{32}$$

donde $0 < b < 1$ y a es cualquier entero impar tal que $ab > 1 + (3\pi/2)$. El resultado de Weierstrass fue generalizado por diferentes matemáticos, destacando el resultado de Hardy ([20]) que demostró que se tiene la misma conclusión suponiendo hipótesis más generales: $0 < b < 1$ y $ab \geq 1$ (véase también [6]). Posteriormente se han dado numerosos ejemplos de funciones continuas no derivables. Algunas de las más sencillas pueden verse en [3], [27] y [29].

Puede pensarse que el tipo de funciones anteriores es excepcional. Nada más lejos de la realidad. El análisis funcional, la disciplina matemática por excelencia del siglo XX, permite probar que las anteriores situaciones son las que "usualmente cabe esperar". ¿Cómo es esto? La herramienta clave para entenderlo es lo que se conoce con el nombre de Teorema de la Categoría de Baire (Baire, 1899) que comentamos a continuación. Sea X un espacio de Banach real cualquiera. Si $M \subset X$, diremos que M es de primera categoría en X, si M es alguna unión numerable de subconjuntos M_n de X tales que cada M_n verifica la propiedad $int\ \overline{M_n} = \emptyset$, donde $int\ \overline{M_n}$ denota el interior de la clausura de M_n y $\emptyset$ indica el conjunto vacío. Un subconjunto M de X se dice de segunda categoría en X, si M no es de primera categoría en X. El teorema de la categoría de Baire afirma que X es de segunda categoría en sí mismo.
Consideremos ahora $X = C([a,b],\mathbb{R})$, es decir, el espacio de las funciones reales y continuas, definidas en un intervalo dado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, con la norma uniforme. Sea

$$M = \{f \in X : \exists\ x \in [a,b) : \text{ existe } f'(x+)\}$$

Pues bien, Banach y Mazurkiewicz probaron en 1931 que el conjunto M es de primera categoría en X y por tanto $X \setminus M$ es de segunda categoría en X. Este resultado es de gran belleza. No obstante hemos de ser precavidos si pensamos que puede haber alguna relación entre la noción de categoría y la noción intuitiva de tamaño o medida de un conjunto. De hecho, usando los conjuntos ternarios de Cantor ([4]) no es difícil dar ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son de primera categoría en $\mathbb{R}$ y con medida (de Lebesgue) positiva. Asimismo existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ de segunda categoría en $\mathbb{R}$ y con medida cero.

En lo que respecta a las series de Fourier de funciones continuas, Du Bois-Reymond dió en 1873 un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier no convergía en un conjunto denso de puntos.
Llegados aquí, la pregunta puede ser: ¿en cuántos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua? Hubo que esperar hasta 1966, año en que Carleson demostró que se da la convergencia salvo posiblemente en un

conjunto de medida cero ([11]). Este resultado puede considerarse como uno de los más destacados de la matemática del siglo XX. La demostración de Carleson es realmente complicada y la referencia [1] puede ser de gran ayuda para aquellos que tengan interés en entenderla. Por cierto que el Premio Abel 2006 ha sido concedido a Carleson, entre otras cosas por sus importantes contribuciones al análisis armónico.
En 1966 también, Kahane y Katznelson probaron que dado cualquier conjunto A de medida nula existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en cada punto de A ([23]). Estas son las cosas bonitas de la matemática.

4.2. Unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica

Pasando a otro tema, la teoría de conjuntos de Cantor, base y fundamento de lo que se conoce con el nombre de matemática moderna, estuvo en buena parte motivada por el estudio de los puntos de convergencia o divergencia de las series trigonométricas. Fue este problema lo que llevó a Cantor a definir algunas de las primeras nociones de topología conjuntista, como las de conjunto cerrado y punto de acumulación. En efecto, cuando Cantor comenzó a trabajar en la Universidad de Halle, Heine estaba interesado en aquella época en la cuestión de la unicidad de la representación de una función dada en serie trigonométrica. Una serie trigonométrica es una serie de funciones de la forma

$$a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)) \tag{33}$$

donde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice que admite un desarrollo en serie trigonométrica si existe alguna serie trigonométrica como (33) tal que

$$f(x)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)),\ \forall\, x\in\mathbb{R}. \tag{34}$$

Por ejemplo, sabemos que esto es así si f es $2\pi-$ periódica y de clase C^1. En este caso, los coeficientes a_n y b_n son los coeficientes de Fourier definidos como

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt,\ \ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen}(nt)\ dt$$

El problema que Heine planteó en 1869 a Cantor (con 24 años de edad) fue: ¿es el desarrollo en serie trigonométrica único? Es decir, si

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx))=\\ &=a_0'/2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos(nx)+b_n'\operatorname{sen}(nx)),\ \forall\, x\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

¿es verdad que $a_0 = a'_0,\ a_n = a'_n,\ b_n = b'_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$? Este problema no era fácil y antes habían intentado resolverlo, sin éxito, el mismo Heine, Dirichlet, Lipschitz y Riemann, entre otros. Es claro que el problema es equivalente al siguiente: si

$$0 = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)),\ \forall\ x \in \mathbb{R}, \tag{35}$$

¿es verdad que $a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$?

Cantor probó en 1870 que ello era así y que incluso, se puede renunciar a la convergencia de la serie (35) en un conjunto finito de puntos. La pregunta que Cantor se hizo a continuación era obvia: ¿en cuántos puntos podemos renunciar a la convergencia de la serie (35) y sin embargo seguir teniendo el mismo resultado de unicidad? Según mis conocimientos, este problema sigue sin resolverse hoy en día en toda su generalidad, a pesar de que se han realizado numerosos estudios sobre ello, comenzando por varios de Cantor, el primero fechado en 1871. En este trabajo Cantor demostró que el conjunto de puntos excepcionales, es decir, aquellos donde no se tiene necesariamente convergencia de la serie trigonométrica (35), puede estar formado por infinitos elementos, siempre que tal conjunto sea "de orden finito". ¿Cómo definió Cantor el orden de un conjunto? De la siguiente manera: dado cualquier subconjunto E de números reales, Cantor introdujo el concepto de punto de acumulación de E, tal y como se entiende hoy en día. Al conjunto de todos los puntos de acumulación, conjunto derivado de E, lo notó por E'. Análogamente puede definirse el segundo conjunto derivado de E, E'', como el conjunto derivado de E', y así sucesivamente. Claramente se tienen las inclusiones $...E''' \subset E'' \subset E'$. Entonces, un conjunto es de orden finito si algún derivado suyo es finito. También Cantor definió los conjuntos cerrados como aquellos que contienen a su derivado. Demostró además que un conjunto de orden finito es o finito o puede ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. A estos últimos conjuntos les dió el nombre de infinitos numerables, interesándose a continuación por la existencia de subconjuntos de números reales infinitos no numerables, para seguir con el estudio de subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^n$. Por cierto, que posteriormente fue demostrado que cualquier conjunto numerable es válido también como conjunto de puntos excepcionales donde puede fallar la convergencia de la serie trigonométrica (35) y seguir teniendo la representación única (Bernstein en 1908 y Young en 1909). También se han

Georg Cantor(1845-1918)

dado ejemplos de conjuntos excepcionales no numerables. Realmente, este es uno de los problemas abiertos más interesantes y difíciles en la actualidad ([2]) y está relacionado con muchas otras áreas del análisis clásico, teoría de la medida, análisis funcional, teoría de números, teoría de conjuntos, etc. Un estupendo y completo trabajo sobre el tema es [24].

4.3. Valores propios, funciones propias y coeficientes de Fourier

Comentemos por último algunos aspectos relacionados con valores propios, dominios isoespectrales, etc. Como hemos mencionado con anterioridad, el interés de Fourier por desarrollos de la forma (9) estuvo motivado por la aplicación del método de separación de variables al problema (6). Más precisamente, si se buscan soluciones elementales de (6) de la forma $u(x,t) = X(x)P(t)$, ello origina el problema de valores propios

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in (0,\pi),\ X(0) = X(\pi) = 0, \tag{36}$$

Es conocido que (36) tiene solución no trivial si y solamente si $\lambda \in \{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$. Además, si $\lambda = n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (36) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función $\operatorname{sen}(nx)$.

Para el problema de la propagación del calor, las condiciones de contorno que se consideran pueden ser mucho más generales que las establecidas en (6). De hecho, desde el punto de vista de las aplicaciones, tienen gran interés condiciones de contorno tales como

$$\begin{array}{l} \alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) = 0,\ t \geq 0, \\ \beta_1 u(\pi,t) + \beta_2 u_x(\pi,t) = 0,\ t \geq 0, \end{array}$$

donde u_x indica la derivada parcial respecto de la variable x y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son números reales dados. Esto conduce a la posibilidad de desarrollos en serie que usen las funciones propias de problemas de contorno muy generales. A este respecto, la teoría de problemas de contorno del tipo *Sturm-Liouville* proporciona, de manera bastante general, bases del espacio $L^2(a,b)$ (el espacio de funciones de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue) que pueden usarse en los problemas a estudiar. Estas ideas fueron desarrolladas, en el siglo XIX (concretamente entre 1829 y 1837) por Sturm, profesor de Mecánica en la Sorbona y por Liouville, profesor de matemáticas en el College de Francia. Con la ayuda del lenguaje de hoy en día, sus resultados pueden resumirse de la forma siguiente: consideremos un problema de contorno de la forma (λ es un parámetro real):

$$\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}[\ p(t)\dfrac{dx(t)}{dt}\ ] + (\lambda - q(t))x(t) = 0,\ t \in [a,b] \\ \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0 \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0, \end{array} \tag{37}$$

donde suponemos las siguientes hipótesis:
1) $p \in C^1([a,b],\mathbb{R})$; además $p(t) > 0,\ \forall\ t \in [a,b]$; $q \in C([a,b],\mathbb{R})$.

3) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 son números reales dados tales que $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ y $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$.

Sturm y Liouville demostraron:
a) Cualquier valor propio de (37) es de multiplicidad 1.
b) Cualquier par de funciones propias x e y, asociadas respectivamente a valores propios distintos λ y μ, son ortogonales, es decir,

$$\int_a^b x(t)y(t)\ dt = 0$$

c) El conjunto de valores propios de (37) es infinito numerable. El sistema ortonormal de funciones propias asociado $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, es una base de $L^2(a,b)$.
d) Sea $g \in C^2[a,b]$ cualquier función satisfaciendo las condiciones de contorno dadas en (37). Entonces

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n(t),\ \forall\ t \in [a,b]$$

donde la serie converge de manera absoluta y uniforme en $[a,b]$ ($\langle , \rangle$ indica el producto escalar usual de funciones).

Una de las maneras más bonitas y sencillas de probar los resultados de Sturm y Liouville es usando el concepto de función de Green. Ello permite transformar (37) en una ecuación integral equivalente y trabajar, a partir de ahí, con operadores integrales. De esta forma van surgiendo de manera natural una serie de propiedades que, puestas de manera abstracta, dan lugar a la teoría de operadores compactos y autoadjuntos. Esta teoría, debida en gran parte a Fredholm y Hilbert, tuvo su origen a finales del siglo XIX ([25]) y principios del XX y proporcionó muchas ideas claves para el nacimiento del análisis funcional. Permite generalizar de manera destacada la teoría de los desarrollos de Fourier, y legitima el uso de métodos análogos en problemas aparentemente muy diferentes de los aquí considerados. Por ejemplo, si estamos tratando el problema de la conducción del calor en un dominio (conexo, abierto y acotado) Ω de $\mathbb{R}^3$ en lugar de en una varilla unidimensional como en (6), tendríamos el problema

$$\begin{gathered}
\Delta_x u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\ (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\
u(x,t) = 0,\ \forall\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\
u(x,0) = f(x),\ \forall\ x \in \overline{\Omega},
\end{gathered} \tag{38}$$

siendo Δ_x el operador laplaciano con respecto a $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Por su parte, $\partial\Omega$ indica la frontera del conjunto Ω.

La aplicación del método de separación de variables al problema anterior, origina, en lugar de (36), que es un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias, el problema

$$\Delta X(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in \Omega;\ X(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{39}$$

Ahora puede aplicarse la teoría espectral de operadores compactos y autoadjuntos ([7]) para demostrar que el conjunto de valores propios de (39) es infinito numerable y que el conjunto de funciones propias asociadas, convenientemente ortonormalizadas, $\{X_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$, forma una base del espacio $L^2(\Omega)$. Esto justifica el hecho de que la condición inicial f se exprese como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \tag{40}$$

para coeficientes convenientes a_n. Así, la solución de (38) es de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(t) X_n(x), \tag{41}$$

para funciones P_n convenientes. Ideas parecidas pueden aplicarse al estudio del problema de la cuerda vibrante (1) en dimensiones superiores, así como a otros problemas de naturaleza diferente.

Existen en la actualidad muchas cuestiones de interés en torno al problema de valores propios (39), que lo consideraremos en adelante para un dominio (abierto y acotado) de $\mathbb{R}^n$. Una de ellas se relaciona con el conjunto de valores propios $\{\lambda_n(\Omega),\ n \in \mathbb{N}\}$ (al que denotaremos en adelante por espectro de Ω) y fue planteada por M. Kac en 1966 ([21]) en un famoso artículo titulado: can one hear the shape of a drum? Dos dominios Ω_1 y Ω_2 se dicen isoespectrales si tienen el mismo espectro. Dos dominios se dicen isométricos, si son congruentes en el sentido de la geometría euclídea. De las propiedades del operador laplaciano se deduce trivialmente que dos dominios isométricos son isoespectrales. La conjetura planteada por Kac fue: dos dominios isoespectrales, ¿son necesariamente isométricos? Esta misma cuestión puede plantearse para condiciones de contorno más generales y para otros tipos de operadores diferentes del laplaciano ([31]).
En 1982, Urakawa ([33]) mostró un ejemplo de dominios isoespectrales en $\mathbb{R}^n,\ n \geq 4$, que no son isométricos. En 1992, Gordon, Webb y Wolpert ([18]) expusieron un contraejemplo en $\mathbb{R}^2$. Como se puede comprender, hay muchos problemas abiertos aún.

Un último aspecto, relacionado con los coeficientes de Fourier, que vamos a comentar implica dos conceptos aparentemente alejados: el grado topológico de Brouwer de una aplicación continua y los coeficientes de Fourier de dicha aplicación (si viviésemos lo suficiente, al final tendríamos oportunidad de comprobar que todo en matemáticas está relacionado). Si B_1 es la bola cerrada unidad de $\mathbb{R}^2$ y $g : B_1 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación continua que no se anula en la frontera de B_1, sabemos que su grado topológico está bien definido (véase, por ejemplo [13]). Denotémoslo por $deg(g)$. Si definimos la función $2\pi-$ periódica $h(x) = g(\exp(ix))$, puede demostrarse que, si g es una función de clase C^1, entonces

$$deg(g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|h_n|^2, \tag{42}$$

donde h_n son los coeficientes de Fourier de la función h respecto de la base $\{\exp(inx),\ n \in \mathbb{N}\}$. De hecho, (42) fue probado por Brezis y Nirenberg bajo condiciones más generales ([8]). También conjeturaron que (42) debería ser verdad para funciones continuas g. La respuesta negativa a esta conjetura ha sido dada por Korevaar en 1999 ([26]). No obstante, esto ha planteado nuevos interrogantes como el propuesto por Brezis con el título siguiente: can one hear the degree of continuous maps? De manera más precisa: si h y k son dos aplicaciones continuas de la frontera de B_1 en sí misma, con coeficientes de Fourier respectivos h_n y k_n verificando $|h_n| = |k_n|,\ \forall n \in \mathbb{N}$, ¿es verdad que $deg(h) = deg(k)$?. Puede consultarse el reciente trabajo de Brezis ([8]) sobre este tema. Es claro que cuestiones relacionadas con los coeficientes de Fourier continúan desempeñando un papel importante en la historia de la Matemática.

No cabe duda de que la teoría de series de Fourier es una de las creaciones más grandes de la Historia de la Ciencia. Ha tenido, además, una gran influencia en el nacimiento y desarrollo de numerosas técnicas y conceptos matemáticos. En la actualidad, la teoría de series de Fourier sigue teniendo una gran importancia y su conocimiento es de gran utilidad en disciplinas muy diversas como matemáticas, física, biología, ingeniería, economía, etc. Tales series están siempre presentes en todos aquellos procesos naturales de tipo oscilatorio, de difusión o de naturaleza periódica. Por mencionar algunos, los métodos de Fourier se emplean en problemas tan diversos como los relacionados con: el ciclo de las manchas solares, predicción de mareas, mejora de la calidad de las imágenes de los objetos celestes tomadas desde el espacio, física de plasmas, física de semiconductores, acústica, sismografía, oceanografía, confección de imágenes en medicina (escáner TAC), estudio del ritmo cardíaco, análisis químicos, estudios de rayos X (usando el análisis de Fourier, los astrónomos pueden estudiar las variaciones en intensidad de las señales de rayos X de un objeto celeste), etc.

Me gustaría acabar con las palabras de Lord Kelvin, que siguen teniendo plena actualidad: *Los métodos de Fourier no son solamente uno de los resultados más hermosos del análisis moderno, sino que puede decirse además que proporcionan un instrumento indispensable en el tratamiento de casi todas las cuestiones de la física actual, por recónditas que sean.*

Referencias

[1] J. Arias de Reyna. *Pointwise convergence of Fourier series.* Lecture Notes in Mathematics, 1785, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[2] J. M. Ash y S.T. Tetunashvili. *New uniqueness theorems for trigonometric series.* Proc. Amer. Math. Soc., 128, 2000, 2627-2636.

[3] R. Beals. *Analysis. An Introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[4] J. Alaminos, C. Aparicio, P. Muñoz y A.R. Villena. *Un recorrido histórico del teorema fundamental del cálculo.* Sometido a publicación.

[5] R. Apery. *Irrationalite de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$. Astérisque 61, 11-13 (1979).

[6] A. Baouche y S. Dubuc. *La non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass.* Enseign. Math., 38, 1992, 89-94.

[7] H. Brezis. *Análisis Funcional.* Madrid, Alianza Universidad Textos, 1984.

[8] H. Brezis. *New questions related to the topological degree.* The unity of mathematics, Progr. math. 244, Birkhäuser Boston, Boston, 2006, 137-154.

[9] A. Cañada. *Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos.* Relime, Revista Latinoamericana de investigación en Matemática educativa, 3, 2000, 293-320.

[10] A. Cañada. *Brook Taylor, tercer centenerario de su nacimiento.* Epsilon, 4, 1985, 104-111.

[11] L. Carleson. *On convergence and growth of partial sums of Fourier series.* Acta Math., 116, 1966, 135-157.

[12] A. Córdoba. *Disquisitio numerorum.* Gac. R. Soc. Mat. Esp. 4, 2001, 249-260.

[13] K. Deimling *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[14] W. Dunham. *Euler. The master of us all.* The Mat. Ass. Am. Dolciani Mat. Expositions, 22, 1999. Traducido al español por Jesús Fernández, con comentarios de Antonio Pérez Sanz. (Euler. El maestro de todos los matemáticos). (Spanish) La Matemática en sus Personajes. 6. Madrid: Nivola Libros Ediciones, 2000.

[15] S. Fischler. *Irrationalité de valeurs de zeta (d'après Apéry, Rivoal,...)* Astérisque, 294, 2004, 27-62.

[16] J.B. Fourier. *The analytical theory of heat.* Dover Publ., New York, 1955.

[17] E.A. González-Velasco. *Connections in mathematical analysis: the case of Fourier series.* Am. Math. Mon. 99, 427-441, 1992.

[18] C. Gordon, D. Web y S. Wolpert. *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds.* Invent. Math., 110, 1992, 1-22.

[19] M. de Guzmán. *Impactos del análisis armónico.* Discurso de ingreso en la Real Academica de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/impactoanalisisarmonico.htm, 1983.

[20] G. H. Hardy. *Weierstrass's Non-Differentiable Function.* Trans. Amer. Math. Soc. 17, 1916, 301-325.

[21] M. Kac. *Can one hear the shape of a drum?* Amer. Math. Monthly, 73, 1966, 1-23.

[22] J.P. Kahane *A century of interplay between Taylor series, Fourier series and Brownian motion.* Bull. Lond. Math. Soc., 29, 1997, 257-279.

[23] J.P. Kahane y Y. Katznelson. *Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques.* Studia Math. 26, 1966, 305-306.

[24] A. S. Kechris *Set theory and uniqueness for trigonometric series.* Preprint, 1997. http://www.math.caltech.edu/people/kechris.html

[25] M. Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York, 1972. Versión española en Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[26] J. Korevaar. *On a question of Brezis and Nirenberg concerning the degree of circle maps.* Sel. Math., New Ser. 5, 1999, 107-122.

[27] T. W. Körner. *Fourier analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[28] N.N. Luzin. *Función.* Gac. R. Soc. Mat. Esp., 6, 2003, 201-225.

[29] H. Okamoto. *A remark on continuous, nowhere differentiable functions.* Proc. Japan Acad. 81, Ser. A, 2005, 47-50.

[30] A. van der Poorten *A proof that Euler missed...Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$. Math. Intelligencer, 1, 1978/79, 195-203.

[31] M.H. Protter. *Can one hear the shape of a drum? Revisited.* SIAM Rev. 29, 1987, 185-197.

[32] D.J. Struik (editor). *A sourcebook in Mathematics, 1200-1800.* Hardvard University Press, XIV, Cambridge, Massachusetts, 1969.

[33] H. Urakawa. *Bounded domains which are isospectral but not congruente.* Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. 15, 1982, 441-456.