Series de Fourier: una relacion fraternal entre el análisis matemático y la física

A. Cañada

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada

¿Conoces la respuesta a estas preguntas?

¿Sabes cómo se propaga el calor? ¿Obedece a algunas leyes de la física? ¿Se puede estudiar la propagación del calor usando modelos matemáticos apropiados? Si es así, ¿quién fue el primer científico que lo hizo y en qué año aproximadamente?

¿Sabes que la suma de un número infinito de funciones derivables puede dar lugar a una función no continua?

Euler afirmó en 1735 en relación con el llamado problema de Basilea: *"He encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que depende de la cuadratura del círculo". ¿Sabes lo que significa esta afirmación?*

¿Conoces la respuesta a estas preguntas?

¿Sabes algo de la función zeta de Riemann, de su relación con la distribución de números primos, de la conjetura de Riemann (sin resolver desde 1859), y lo más importante: del dinero que obtendrías si la resolvieras?

¿Sabes que hay funciones continuas que no tienen derivada en ningún punto? ¿Crees que la “cantidad” de funciones de este tipo es pequeña en relación con el conjunto de todas las funciones continuas?

¿Sabes cuál fue la motivación para la definición de las primeras nociones de topología conjuntista (punto de acumulación, punto clausura, etc.), así como qué tipo de problemas motivaron la definición de conjuntos numerables?

¿Conoces la respuesta a estas preguntas?

Si conoces la respuesta a las preguntas anteriores, no es necesario que asistas a la conferencia.

Si no las conoces, obtendrás la respuesta en esta conferencia, y lo más importante:

verás, a través de una excursión histórica, la relación que tienen todos estos temas con las llamadas Series de Fourier.

El problema de la conducción del calor (siglo XIX)

Aportaciones de Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830), matemático y físico francés, profesor de la Escuela Politécnica, viajero (acompañó a Napoleón, como científico, en la campaña de Egipto ... polifacético)

"El análisis matemático es tan extenso como la naturaleza misma; define todas las relaciones sensibles, mide el tiempo, los espacios, las fuerzas, las temperaturas; su atributo principal es la claridad; no tiene en absoluto signos para expresar nociones confusas. Relaciona los fenómenos más diversos y descubre las analogías secretas que los une. Si la materia se nos evade, por su extrema tenuidad, como la del aire y de la luz, si los cuerpos están situados lejos de nosotros, en la inmensidad del espacio, si el hombre quiere conocer el espectáculo de los cielos en épocas sucesivas que un gran número de siglos separa, si las acciones de la gravedad y del calor se ejercen en el interior del globo sólido a profundidades que nos serán siempre inaccesibles, el análisis matemático puede, con todo, dominar las leyes de estos fenómenos. El nos los hace presentes y parece ser una facultad de la razón humana destinada a suplir la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos"

Aportaciones de Fourier

Fourier, 1807 (Mémoire sur la propagation de la chaleur, enviado a la Academia de Ciencias de París)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \ 0 < x < \pi, \ 0 < t < T,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ 0 \le t \le T, \ u(x,0) = f(x), \ 0 \le x \le \pi.$$

Solución de Fourier: superposición de “temperaturas sencillas”: $\exp(-n^2 t)\mathrm{sen}(nx), \ n \in \mathbb{N}$.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \exp(-n^2 t)\mathrm{sen}(nx), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{sen}(nx)$$

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(nx)\, dx, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Descripción general del problema

Dada una función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, verificando $f(0) = f(\pi) = 0$ (y posiblemente algunas condiciones adicionales), ¿existirán coeficientes adecuados $f_n, \ n \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)$$

en el intervalo $[0, \pi]$?

Taylor, 1715 (Methodus incrementorum directa et inversa)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} \, x^n$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \ \forall \, x \in \mathbb{R}$$

¡Cuidado con el problema planteado!

Dada una función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, verificando $f(0) = f(\pi) = 0$ (y posiblemente algunas condiciones adicionales), ¿existirán coeficientes adecuados $f_n, \; n \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)$$

en el intervalo $[0, \pi]$?

Esto nos avisa de las dificultades

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\,(2n-1)x}{2n-1} =$$

$$\begin{cases} \pi/4, \; 0 < x < \pi, \\ 0, \; x = 0, \\ -\pi/4, \; -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Primer paso: desarrollar por Taylor e igualar coeficientes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(nx)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{2k+1} \right)$$

$$(-1)^k f^{2k+1)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, n^{2k+1}, \ \forall \, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

¡Sistema lineal, con infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas!

Sistema lineal desarrollado

$$
\begin{array}{r}
f'(0) = f_1 1 \ + \ f_2 2 \ + \ f_3 3 \ + \ f_4 4 \ + \ \ldots \\
-f'''(0) = f_1 1^3 \ + \ f_2 2^3 \ + \ f_3 3^3 \ + \ f_4 4^3 \ + \ \ldots \\
f^{v)}(0) = f_1 1^5 \ + \ f_2 2^5 \ + \ f_3 3^5 \ + \ f_4 4^5 \ + \ \ldots \\
\ldots \\
(-1)^k f^{2k+1)}(0) = f_1 1^{2k+1} \ + \ f_2 2^{2k+1} \ + \ f_3 3^{2k+1} \ + \ f_4 4^{2k+1} \ + \ \ldots \\
\ldots
\end{array}
$$

Segundo paso: cortar “por lo sano”: considerar una situación finita, resolver el sistema finito y pasar al límite

$$(-1)^k f^{2k+1)}(0) = \sum_{n=1}^{m} g_n^m \; n^{2k+1}, \; 0 \le k \le m-1$$

$$f_n = \lim_{m \to +\infty} \; g_n^m, \; \forall \; n \in \mathbb{N}$$

$$g_1^m = \frac{m^2(m-1)^2 \dots 2^2}{(m^2-1)((m-1)^2-1))...(2^2-1)} H(m)$$

$$H(m) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{2k+1)}(0) \left[\sum_{2 \le n_1 < n_2 < \dots < n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \dots n_k^2} \right]$$

$$f_1 = \lim_{m \to +\infty} \; g_1^m = 2 \sum_{k=0}^{\infty} f^{2k+1)}(0) \left[\sum_{2 \le n_1 < n_2 < \dots < n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \dots n_k^2} \right]$$

Una mini excursión al problema de Basilea

$$¿\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ ?\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = 1$$

Intentos previos sin éxito: Jacob Bernouilli, Johan Bernouilli, Daniel Bernouilli, Leibniz, Stirling, de Moivre, etc.

Euler, 1735 (28 años) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \ldots, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{26}} = \frac{2^{24} 76977927 \pi^{26}}{27!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

es irracional, $\forall\ k \in \mathbb{N}$

Principales ideas de la demostración de Euler

Euler: *“He encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que depende de la cuadratura del círculo”*

$$\operatorname{sen} x = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{k\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-k\pi}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Una miniexcursión a la actualidad (y la función zeta de Riemann)

$$¿\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}\ ?$$

(¡algo sabemos, pero poco!)

1978, R. Apéry: si $k = 1$, la suma es un número irracional
2004, S. Fischler: el conjunto de los valores de k para los que la suma anterior es irracional es un conjunto infinito.

Una miniexcursión a la actualidad (y la función zeta de Riemann)

La función zeta de Riemann está íntimamente conectada con la distribución de números primos

De hecho se tiene, $\forall\ s \in \mathbb{C}: \ Re\ s > 1$, (Euler: Introductio in Analysin Infinitorum, 1748)

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = (1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \ldots)(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{27^s} + \ldots)\ldots =$$

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

Euler: *"Descubrir algún orden en la progresión de los números primos es un misterio que el espíritu humano no penetrará nunca"*.

Conjetura (Bernhard Riemann, 1859) : *"Todos los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ están en la recta $Re\ s = 1/2$"*

La conjetura fue también uno de los 23 problemas expuestos por David Hilbert en el congreso internacional de matemáticas de Paris en 1900.

Vuelta al trabajo (las sumas obtenidas por Euler permiten mejorar la expresión del primer coeficiente)

$$f_1 = 2\sum_{k=0}^{\infty} f^{2k+1)}(0)\left[\sum_{2\leq n_1<n_2<\ldots<n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \ldots n_k^2}\right] =$$

$$2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f^{2k+1)}(0)\left[\sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}\right] =$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi)$$

¿La derivación respecto de π?

$$f_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi) = \frac{2}{\pi}s(\pi),\ s(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi)$$

$$s(\pi) = f(\pi) - f^{2)}(\pi) + f^{4)}(\pi) - f^{6)}(\pi)\dots$$
$$s''(\pi) = f^{2)}(\pi) - f^{4)}(\pi) + f^{6)}(\pi) - f^{8)}(\pi)\dots$$

$$s''(\pi) + s(\pi) = f(\pi)$$

$$s''(x) + s(x) = f(x)$$

$$s(x) = a\cos x + b\mathrm{sen}x + \mathrm{sen}x\int_0^x f(s)\cos s\, ds - \cos x\int_0^x f(s)\mathrm{sen}s\, ds$$

$$s(\pi) = -a + \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{sen}x\ \ dx$$

¿La derivación respecto de π?

$$s(\pi) = -a + \int_0^{\pi} f(x) \text{sen} x \;\; dx$$

$$-a = s(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{2n)}(0) = 0$$

$$s(\pi) = \int_0^{\pi} f(x) \text{sen} x \;\; dx$$

$$f_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen} x \, dx$$

Funciones continuas no derivables

Relación del tema con la convergencia de series de Fourier

Fourier publica su libro en 1822
Algunos años después se prueba (Dirichlet, 1829) que la derivabilidad de una función es suficiente para la convergencia puntual de su serie de Fourier
¿Será suficiente la continuidad de una función para la convergencia puntual de su serie de Fourier?

Funciones continuas no derivables

Algunos ejemplos

Riemann, 1868: definió una función F, que es continua en todo punto, pero en cada intervalo real finito hay infinitos puntos donde no es derivable.
Weierstrass, 1872: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en todo punto y no derivable en ninguno.
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, donde $0 < b < 1$ y a es cualquier entero impar tal que $ab > 1 + (3\pi/2)$.
Hardy, 1916: se tiene la misma conclusión que Weierstrass suponiendo hipótesis más generales: $0 < b < 1$ y $ab \geq 1$
H. Okamoto, 2005: A remark on continuous, nowhere differentiable functions, Proc. Japan Acad. 81, Ser. A, 47-50.
Émile Picard: *"si Newton y Leibniz hubieran llegado a imaginarse este tipo de situaciones, nunca habrían creado el cálculo diferencial".*

¿Hay muchas funciones continuas no derivables?

Algo podemos decir usando el análisis funcional

Sea X un espacio de Banach real cualquiera. Si $M \subset X$, diremos que M es de primera categoría en X, si M es alguna unión numerable de subconjuntos M_n de X tales que cada M_n verifica la propiedad $int\ \overline{M_n} = \emptyset$, donde $int\ \overline{M_n}$ denota el interior de la clausura de M_n y $\emptyset$ indica el conjunto vacío. Un subconjunto M de X se dice de segunda categoría en X, si M no es de primera categoría en X.

Baire, 1899: X es de segunda categoría en sí mismo.

$X = C([a, b], \mathbb{R})$, con la norma uniforme.

$$M = \{f \in X : \exists\ x \in [a, b) : \text{ existe } f'(x+)\}$$

Banach y Mazurkiewicz, 1931: M es de primera categoría en X y por tanto $X \setminus M$ es de segunda categoría en X.

Continuidad y convergencia puntual de series de Fourier

Algunos ejemplos

Du Bois-Reymond, 1873: función continua cuya serie de Fourier no converge en un conjunto denso de puntos.
Carleson, 1966: la serie de Fourier de una función continua converge c.p.d.
Kahane y Katznelson, 1966: dado cualquier subconjunto A de medida cero, existe una función continua tal que su serie de Fourier no converge en A.
Premio Abel 2006 ha sido concedido a Carleson, entre otras cosas por sus importantes contribuciones al análisis armónico

Teoría de conjuntos de Cantor

Relación del tema con la teoría de series de Fourier

Heine, en 1869, plantea a Cantor (con 24 años de edad) el problema de la unicidad del desarrollo de una función en serie trigonométrica.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)) =$$

$$a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nx) + b'_n \mathrm{sen}(nx)), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

¿es verdad que $a_0 = a'_0,\ a_n = a'_n,\ b_n = b'_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$?

Equivalentemente

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(nx) + d_n \mathrm{sen}(nx)) = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

¿es verdad que $c_0 = c_n = d_n = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$?

Teoría de conjuntos de Cantor

Previamente habían intentado resolver este problema, sin tener éxito: Heine, Dirichlet, Lipschitz y Riemann.
Cantor probó en 1870 que la respuesta era afirmativa
aunque se renunciara a la igualdad en un conjunto finito de puntos.
Es más, Cantor demostró que se puede renunciar a la igualdad en un conjunto A tal que algún derivado suyo $A^{n)}$ sea finito.
Cantor se preguntó a continuación: ¿cómo son los subconjuntos A de números reales tales que algún derivado suyo $A^{n)}$ es finito?
Cantor demostró en 1871: si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que $A^{n)}$ es finito para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces: A es finito ó A se puede poner en correspondencia biyectiva con $\mathbb{N}$.
A estos últimos conjuntos los llamó numerables.
A continuación Cantor se preguntó: ¿habrá subconjuntos de $\mathbb{R}$ no numerables?

Cantor demostró: $\mathbb{R}$ no es numerable, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son biyectivos (sobre este último resultado, el mismo Cantor comentó: *si no lo hubiese demostrado, no me lo creería*).

¡Si la recta real y el plano real tienen el mismo número de puntos, lo que está demostrado y por tanto fuera de toda duda, la teoría de conjuntos de Cantor refuta el axioma aristotélico que define al todo como la suma de sus componentes, pues supone que el todo no es mayor que alguna de las partes, sino que puede ser igual a alguna de ellas!

¿Se ha resuelto el problema de la unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica?

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)) =$

$a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n \cos(nx) + b'_n \mathrm{sen}(nx)),\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus A$. ¿es verdad que $a_0 = a'_0$, $a_n = a'_n,\ b_n = b'_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$?

Cantor (1871): si A es tal que $A^{n)}$ es finito, para algún $n \in \mathbb{N}$, la respuesta es positiva. Bernstein (1908), Young (1909): Si A es numerable la respuesta es positiva. Existen ejemplos de subconjuntos no numerables A para los que la respuesta es positiva.

Éste es uno de los problemas abiertos más interesantes y difíciles en la actualidad (J.M. Ash y S.T. Tetunashvili: New uniqueness theorems for trigonometric series, Proc. Amer. Math. Soc., 128, 2000, 2627-2636), y está relacionado con muchas otras áreas del análisis clásico, teoría de la medida, análisis funcional, teoría de números, teoría de conjuntos, etc.

Algunas reflexiones bonitas para acabar

Lord Kelvin (Sir William Thomson, 1824-1907)
Los métodos de Fourier no son solamente uno de los resultados más hermosos del análisis moderno, sino que puede decirse además que proporcionan un instrumento indispensable en el tratamiento de casi todas las cuestiones de la física actual, por recónditas que sean.

Miguel de Guzmán Ozámiz (1936-2004)
La motivación para el estudio de las series de Fourier puede provenir de fuentes diferentes, pero su historia aúna muchas de ellas. En ella se percibe cómo se entrelazan los esfuerzos e intentos diversos de la matemática tanto para entender mejor el universo físico en que estamos inmersos como para escudriñar los problemas apasionantes que se derivan del examen profundo de los instrumentos mismos que se van creando para ello y que viene a dar lugar al desarrollo esplendoroso del análisis matemático en la actualidad. Desde el "poema matemático en torno a la comprensión del calor" (como definió Maxwell el tratado inicial de Fourier) hasta el desarrollo actual de la teoría de ondículas que se manifiesta tan fecundo en el mundo de las aplicaciones más diversas, se puede experimentar la continuidad del esfuerzo de los matemáticos de varios siglos

Algunas reflexiones bonitas para acabar

No cabe duda de que la teoría de series de Fourier, debida no sólo a Fourier, sino a multitud de científicos, es una de las creaciones más grandes de la Historia de la Ciencia. Ha tenido, además, una gran influencia en el nacimiento y desarrollo de numerosas técnicas y conceptos matemáticos. En la actualidad sigue teniendo una gran importancia y su conocimiento es de gran utilidad en disciplinas muy diversas como física, biología, ingeniería, economía, etc. Tales series están siempre presentes en todos aquellos procesos naturales de tipo oscilatorio, de difusión o de naturaleza periódica. Por mencionar algunos, los métodos de Fourier se emplean en problemas tan diversos como los relacionados con: el ciclo de las manchas solares, predicción de mareas, mejora de la calidad de las imágenes de los objetos celestes tomadas desde el espacio, teoría de la señal, transmisión de sonidos e imágenes, física de plasmas, física de semiconductores, acústica, sismografía, oceanografía, confección de imágenes en medicina, estudio del ritmo cardíaco, análisis químicos, estudios de rayos X, etc. En realidad, no es exagerado afirmar que los métodos de Fourier tienen el don de la ubicuidad, es decir, están en muchos sitios diferentes al mismo tiempo.

Algunas reflexiones bonitas para acabar

Antonio Cañada Villar (1957-????)
Cuando terminé el bachillerato, mi gran duda era: ¿estudio matemáticas o estudio física? El objetivo de la física pura es el descubrimiento de las leyes del mundo inteligible; el objetivo de la matemática pura es el descubrimiento de las leyes de la inteligencia humana. Ahora, con 53 años cumplidos, he resuelto esta duda: lo mejor es estudiar y enseñar series de Fourier, que aúnan a la perfección ambas disciplinas, puesto que las series de Fourier nacieron en la física, pero crecieron en el análisis matemático.