Sucesiones y series infinitas: de las matemáticas en el bachillerato a las matemáticas en la Universidad

Antonio Cañada Villar

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada

¿Conoces la respuesta a estas preguntas?

¿Crees que los números racionales (cocientes de dos enteros) son suficientes para medir cualquier segmento? ¿Sabes que números necesitas para que al hacerle corresponder a cada uno de esos números un punto de una recta, la recta se "llene por completo"?

¿Sabes lo que quiere decir que la suma $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ es infinito? ¿Crees que en este caso $2S - S = S$?

¿Hay entes en el Universo que son, de hecho, infinitos, o infinito es sólo un concepto? Si tales entes existen, ¿hay alguna relación entre el infinito matemático y el del mundo físico? ¿Crees que las Matemáticas puede arrojar luz sobre estas cuestiones?

¿Conoces la respuesta a estas preguntas?

Euler afirmó en 1735 en relación con el llamado problema de Basilea: *He encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie*

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

que depende de la cuadratura del círculo. ¿Sabes lo que significa esta afirmación?

¿Crees que hay “Matemática Pura” y “Matemática Aplicada”? Si es así, ¿serías capaz de definirlas y establecer claramente las diferencias entre una y otra?

¿Cuál crees que será la principal característica de la Matemática del siglo XXI? ¿Será diferente de la de siglos anteriores?

¿Conoces la respuesta a estas preguntas?

Si conoces la respuesta a las preguntas anteriores, no es necesario que asistas a la conferencia.

Si no las conoces, obtendrás la respuesta en esta conferencia, y lo más importante:

verás, a través de una excursión histórica, la relación que tienen todos estos temas con las llamadas series infinitas.

Los números reales

- Números naturales:

$$1, 2, 3, \cdots$$

- Números enteros :

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$$

- Números racionales:

$$\frac{0}{1},$$

$$\begin{matrix} + \frac{1}{1}, & + \frac{2}{1}, & + \frac{3}{1}, & \cdots \\ - \frac{1}{1}, & - \frac{2}{1}, & - \frac{3}{1}, & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} + \frac{1}{2}, & + \frac{2}{2}, & + \frac{3}{2}, & \cdots \\ - \frac{1}{2}, & - \frac{2}{2}, & - \frac{3}{2}, & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} + \frac{1}{3}, & + \frac{2}{3}, & + \frac{3}{3}, & \cdots \\ - \frac{1}{3}, & - \frac{2}{3}, & - \frac{3}{3}, & \end{matrix}$$

$$\cdots$$

Los números reales

- Dada una recta cualquiera, si elegimos el 0 y el 1, todos los números racionales se pueden representar como puntos de una recta.
- Pregunta clave: ¿Todos los puntos de una recta se corresponden con números racionales? ¿Hay puntos en la recta que no son racionales?
- Por supuesto, y esto se estudia en Bachillerato:

$$\text{La diagonal de un cuadrado de lado 1 : } \sqrt{2},$$
$$\text{El área de un círculo de radio 1 : } \pi,$$
$$\text{La suma infinita } 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots : \text{ el número } e,$$

- Los números irracionales se corresponden con aquellos puntos de la recta que no son racionales
- Por tanto: Los números racionales y los números irracionales "llenan la recta real" y no hay más números reales (poner transparencia).

El desarrollo decimal de los números reales

- Si conocemos el desarrollo decimal de un número, ¿podemos saber si tal número es racional o irracional? El desarrollo decimal de un número racional sólo tiene estas tres posibilidades:
- Finito. Por ejemplo: $\frac{1}{4} = 0,25$ $\qquad \frac{13431}{25} = 537,24$
- Periódico puro. Por ejemplo: $\frac{1}{3} = 0,333333\cdots$ $\qquad \frac{735}{99} = 7,424242\cdots$
- Periódico mixto. Por ejemplo:
  $\frac{3183}{9900} = 0,32\underbrace{15}\underbrace{15}\underbrace{15}\cdots$ $\qquad \frac{34531}{9990} = 3,4\underbrace{565}\underbrace{565}\underbrace{565}\cdots$
- Por tanto, el número:

$$43,121121112111112\cdots$$

es irracional

Una serie infinita elemental: progresiones geométricas

- Una pregunta muy fácil: ¿Cuál es el número natural anterior al 2? Evidentemente la respuesta es: el número 1.
- Otra pregunta un poco más complicada: Cuál es el número racional anterior al 2? ¿Es el $1,9$? ¿Es el $1,99$? Creemos que ya tenemos la respuesta: Es el

$$1,99999\cdots = 1 + \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots\right)$$

- Reflexionemos un momento. La suma anterior es: 1 mas la suma de lo que hay dentro del paréntesis, que es una progresión geométrica infinita de razón $\frac{1}{10}$. En Bachillerato se estudia que tales progresiones geométricas infinitas se pueden sumar y su suma es:

$$\left(\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots\right) = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

- La conclusión es que: $1,99999\cdots = 2$

Algunas sucesiones y series infinitas no tan elementales

- La suma de números que son cada vez más pequeños puede ser arbitrariamente grande. Por ejemplo

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\cdots = +\infty$$

$$1+\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}\right)+\cdots >$$

$$1+\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}\right)+\cdots =$$

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\cdots = +\infty$$

- El producto de números que son cada vez más próximos a uno puede ser arbitrariamente grande. Por ejemplo

$$\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{11}{10}\cdots = +\infty$$

¡Cuidado con algunas sumas infinitas!

- $$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = 1 + 2(1 + 2 + 4 + \cdots) = 1 + 2S$$

  Por tanto $S = 1 + 2S$, de donde se obtiene $S = -1$.

- $$R = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1$$
  $$R = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0$$

  Conclusión: Como $R = R$, entonces $0 = 1$

- ¡Algunas sumas infinitas son realmente sorprendentes! En cursos avanzados de la licenciatura en Matemáticas se prueba que sean quien sea $x \in (0, \pi)$ la suma

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots$$

vale siempre $\frac{\pi}{4}$.

¡Cuidado con algunas sumas infinitas!

Hemos dicho con anterioridad que a lo largo de la charla saldrían números reales a los que no sabíamos qué color ponerle en la recta real (azul para los racionales y rojo para los irracionales).
Un ejemplo de esto es la llamada constante γ de Euler, que se puede definir como la diferencia de dos infinitos especiales. Recordemos que la suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty.$$

$$\ln\ n \text{ diverge a } +\infty.$$

Pues bien, la constante de Euler es el límite de la sucesión

$$1 + \tfrac{1}{2} - \ln 2,\ \ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ln 3,\ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \ln 4,\ \cdots$$

Se tiene

$$\gamma = 0.57721566490153286060651209008240243 1\cdots$$

pero aún no se sabe si es racional o irracional.

Una última advertencia (por ahora)

Finalizamos esta parte con una advertencia importante: las propiedades asociativa, conmutativa, etc., no parecen válidas para sumas infinitas, al menos no son válidas para sumas infinitas cualesquiera.
Sí son válidas tales propiedades para sumas de la forma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ donde todos los términos son positivos. En este caso, para obtener la suma podemos ordenarlos como nos convenga y sólo existen dos posibilidades:

- O bien la sucesión $a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \cdots$ no está acotada superiormente, en cuyo caso

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = +\infty$$

- o la sucesión $a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \cdots$ está acotada superiormente, en cuyo caso

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S \in \mathbb{R}^+$$

(para darle más misterio, los matemáticos llamamos a esto axioma del supremo).

Una serie no geométrica que se puede sumar

Un ejemplo de lo que acabamos de decir

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\frac{1}{4^2+4}+\frac{1}{5^2+5}+\cdots=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\cdots=$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\cdots=$$

$$1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)\cdots=1$$

El gran matemático Leonhard Euler

- Leonhard Euler (Basilea, Suiza, 1707-San Petersburgo, Rusia, 1783) escribió casi 900 artículos, de los que 355 corresponden a los años 1773-1782, los últimos diez años de su vida, en los que estaba ciego. Realizó importantes descubrimientos en Matemáticas y Física, incluyendo geometría analítica, trigonometría, geometría, cálculo y teoría de números. Fue uno de los primeros matemáticos en observar que las herramientas del análisis matemático podían aplicarse a la teoría de números. Entre otras cosas, demostró:
- $e^{\pi i} + 1 = 0$
- Caras + Vértices = Aristas + 2, para los poliedros convexos.
- $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = +\infty$
- Si p es un número primo de la forma $4n + 1$, entonces p puede escribirse, de manera única, como la suma de dos cuadrados. Por ejemplo $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, etc.

Planteamiento del problema de Basilea

Calcular el valor de la suma

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Intentos previos sin éxito: Jacob Bernouilli, Johan Bernouilli, Daniel Bernouilli, Leibniz, Stirling, de Moivre, etc.

Euler, 1735 (28 años) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

¡Quién se podía imaginar que aquí saldría (también) el número π!

Otras sumas que calculó Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945},$$

$$\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{26}} = 1 + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \frac{1}{4^{26}} + \cdots = \frac{2^{24}76977927\pi^{26}}{27!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots = \pi^{2k} B(k),$$

donde $B(k)$ es un número racional. Por tanto la anterior suma es irracional, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Algunas series que siguen siendo misteriosas

¿Qué sabemos de series como las siguientes?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7} = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} + \cdots$$

Algunas series que siguen siendo misteriosas

(¡algo sabemos, pero poco!)

- 1978, R. Apéry: La suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots$$

es un número irracional.

Algunas series que siguen siendo misteriosas

(¡algo sabemos, pero poco!)

- 1978, R. Apéry: La suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots$$

  es un número irracional.

- 2011, 25 de Noviembre (11h. 30m.), La suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^3} + \cdots$$

  no sabemos aún si es un número racional o irracional.

Algunas series que siguen siendo misteriosas

(¡algo sabemos, pero poco!)

- 1978, R. Apéry: La suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots$$

  es un número irracional.

- 2011, 25 de Noviembre (11h. 30m.), La suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^3} + \cdots$$

  no sabemos aún si es un número racional o irracional.

- 2004, S. Fischler: el conjunto de los valores de k para los que la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}}$ es un número irracional es un conjunto infinito.

La función Zeta de Riemann (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826, Breselenz, Hanover, ahora Alemania-1866,Selasca, Italia)

¿Sabes algo de la función zeta de Riemann, de su relación con la distribución de números primos, de la conjetura de Riemann (sin resolver desde 1859), y lo más importante: del dinero que obtendrías si la resolvieras?

Si conoces la respuesta a la pregunta anterior, estás muy avanzado para tu edad y puedes llegar muy lejos. Ánimo con la conjetura de Riemann, pues podrías jubilarte muy joven.

Una miniexcursión a la actualidad (y la función zeta de Riemann)

La función Zeta de Riemann $\zeta(s)$, está íntimamente conectada con la distribución de números primos

De hecho se tiene, $\forall\ s \in \mathbb{C}:\ Re\ s > 1$, (Euler: Introductio in Analysin Infinitorum, 1748)

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} \cdots =$$

$$(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \cdots)(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{3^{3s}} + \cdots) \cdots =$$

Euler: *"Descubrir algún orden en la progresión de los números primos es un misterio que el espíritu humano no penetrará nunca"*.
Conjetura (Bernhard Riemann, 1859) : *"Todos los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ están en la recta Re $s = 1/2$"* Aquél que la demuestre obtendrá un millón de dólares.

Los números primos y la Criptografía

La palabra “Criptografía” viene del griego: “Kryptos” (oculto) y “Graphos” (escritura). “Criptografía” significa pues “escritura oculta (escritura escondida)”.

Así, se trata de escribir algo de tal forma que otra persona que quiera leerlo no pueda, a no se que conozca cómo se ha ocultado

Las propiedades y distribución de los números primos proporcionan métodos para ello

¿Hay Matemáticas Puras y Matemáticas Aplicadas, o simplemente Matemáticas?

Fíjate en la cadena siguiente:
Euler calculó explícitamente diferentes valores de la función de Riemann $\zeta(s)$, usando métodos de análisis matemático.
Esta función fue introducida por Riemann, quien estableció relaciones fundamentales entre ella y la distribución y propiedades de números primos.
Estas propiedades de los números primos son fundamentales para la Criptografía, que se usa en miles y miles de transmisiones de datos y operaciones económicas hoy en día, donde la seguridad en la transmisión es clave.
¿Te atreverías a decir, después de esto que hay Matemáticas puras y Matemáticas aplicadas? Yo desde luego diría que no.

Algunas reflexiones bonitas para acabar

Marcus du Sautoy (profesor de Matemáticas de la Universidad de Oxford)

Desde que los humanos evolucionamos en este planeta, hemos estado tratando de comprender el mundo que nos rodea. Hemos intentado explicar la razón de que el mundo se vea y se comporte de la manera en que lo hace, para predecir qué nos espera en el futuro. Y, al buscar las respuestas, hemos descubierto un código que le da sentido a la enorme complejidad que nos confronta: las Matemáticas.

Algunas reflexiones bonitas para acabar

Miguel de Guzmán Ozámiz (1936-2004) (profesor de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid)

Las Matemáticas no tratan de verdades insondables ni infalibles. La Matemática es una actividad del hombre, vieja como la música y la poesía, y que, como ellas, persigue una cierta armonía y belleza, ésas que puede proporcionar la estructura mental ágil, limpia y elegante de las construcciones matemáticas. La causa profunda de esta incomplección de la matemática es la presencia en ella de procesos infinitos.

Algunas reflexiones bonitas para acabar

Una última reflexión, que creo que es mía, Antonio Cañada Villar (1957-????)

Si volviera a nacer, pero con la experiencia que ya tengo, tendría más capacidad de discernir sobre qué estudios universitarios podría cursar (esto lo hice allá por 1974, y no es broma).
No obstante, estoy seguro de que volvería a elegir Matemáticas,
¿Por qué? Por situaciones como la presente.

¡MUCHAS GRACIAS A TODOS!

Principales ideas de la demostración de Euler

- ¿Puede reconstruirse un polinomio $p(x)$ a partir de sus raíces? Tomaremos siempre $p(0) = 1$.
- Por ejemplo el polinomio

$$\frac{x^2}{6} - \frac{5x}{6} + 1$$

tiene como raíces $x = 2$ y $x = 3$ y se descompone de la forma

- $$\frac{x^2}{6} - \frac{5x}{6} + 1 = \left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right)$$

- El polinomio

$$\frac{-x^2}{2\pi} - \frac{(2-\pi)x}{2\pi} + 1$$

tiene como raíces $x = \pi$ y $x = -2$ y se descompone de la forma

- $$\frac{-x^2}{2\pi} - \frac{(2-\pi)x}{2\pi} + 1 = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-2}\right)$$

Principales ideas de la demostración de Euler

En general, si tenemos un polinomio $p(x)$ tal que

- $p(x)$ tiene grado m
- $p(0) = 1$.
- Las raíces de $p(x)$ son $x_1, x_2, \cdots, x_m$, entonces

$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$

Principales ideas de la demostración de Euler

Euler: *"He encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \cdots$$

que depende de la cuadratura del círculo"

- Brook Taylor, 1715:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$ Poner transparencia

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- Las raíces de este "polinomio infinito" son conocidas:

$$\cdots -3\pi, -2\pi, -\pi, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$$

Principales ideas de la demostración de Euler

- Euler afirmó ahora que "La descomposición en factores, válida para polinomios finitos, es también válida para polinomios infinitos" Por tanto
-

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots =$$

$$\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdots =$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots =$$

$$1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right)x^2 + \cdots$$

Principales ideas de la demostración de Euler

Así obtenemos

- $$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)x^2+\cdots$$
- Igualando los coeficientes de x^2 deducimos
$$\frac{1}{3!}=\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\right)$$
- Finalmente
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$