Universidad de Granada
Facultad de Ciencias

Seminario de Historia de las Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas

Una pequeña novela histórica sobre

Series de Taylor y Series de Fourier

o
diálogos de dos estudiantes en Gotinga

Curso académico 2004-2005

Óscar Cortadellas Izquierdo

Índice

Introducción

Este trabajo ha sido escrito en forma de novela. Ya que estamos en una asignatura de Historia de las Matemáticas, se trata de una historia sobre Historia de las Matemáticas.

La temática del trabajo son las series de Taylor y de Fourier, así que he introducido dos personajes de manera que cada uno represente uno de los dos temas.

Aprovechando la conyuntura de que Taylor era inglés y Fourier francés, los personajes son un estudiante inglés y uno francés, que por causas del destino cruzan sus vidas en Gotinga, ciudad mítica en la Historia de las Matemáticas.

El estudiante inglés es Luke, y como todo buen inglés es una persona educada, correcta, elegante y ordenada. Es tímido, no suele ponerse nervioso y procura tener todas las cosas controladas. Se supone que procede de una buena familia y quiere aprovechar su estancia en Gotinga para aprender todo lo que le sea posible.

Pierre, el francés, es más jovial y expresivo. Es dicharachero, comunicativo, irónico, más distraído que Luke, suele gastar bromas y siente un gran apego por su patria, a la que defiende a capa y espada. Él sabe que es un estudiante inteligente y que puede hacer carrera dentro de las Matemáticas, y ve su estancia en Gotinga también como una ocasión para crecer como persona.

La historia no discurre en ninguna fecha concreta, pero se supone que será entre finales del siglo XX o principios de XXI. Las referencias históricas que hacen los personajes, las demostraciones que exponen y las biografías que explican son completamente ciertas, si bien cualquier parecido de las vidas de los protagonistas con la realidad es pura coincidencia.

Llegada a Gotinga. La vida de Taylor

No resultaba fácil la vida en la universidad de Gotinga. La gente camina muy pensativa, siempre llevan libros bajo el brazo y no se detienen demasiado a conversar con las personas con las que se tropiezan. Debe ser el peso de la historia. Gauss aún se percibe fuertemente en el ambiente. Hay algo que te obliga a esforzarte, un espíritu de superación que no te permite ser uno más de los estudiantes. Si has llegado hasta aquí es porque tienes que destacar.

Este es el caso de Luke y Pierre. Ambos son estudiantes de un importante programa europeo de matemáticas. Luke procede de Inglaterra y es estudiante de Cambridge. En su tercer año en la universidad y con una capacidad para las matemáticas fuera de la media, sus profesores le invitaron a presentarse para el programa, ya que era una oportunidad que no podía dejar pasar. Pierre es francés, procede de la Escuela Normal Superior y también estaba en su tercer año de carrera cuando ganó el concurso que le otorgaba plaza para el programa .

Ambos se conocen. Son compañeros en la residencia de estudiantes que han habilitado para los alumnos del programa. Se guardan un gran repesto, pero no tienen mucha relación entre ellos. Como ya hemos dicho, la vida en Gotinga tiende a la soledad y al pensamiento.

Pierre impresionó gratamente a Luke cuando en el segundo día de clase salió a la pizarra y demostró que para la ecuación del calor y bajo las condiciones habituales, la solución dada por Fourier era única. Luke no tardó en demostrar su valía, y en la cuarta sesión de la clase de análisis, en el tema de cálculo de variaciones, demostró la ecuación de Lagrange en $\mathbb{R}^n$.

Pero, como en casi todas las convivencias, no tardó la discordia en aparecer entre ellos. Fue a la conclusión de una conferencia. El tema a tratar fue el desarrollo del cálculo durante los siglos XVIII y XIX. A la salida de la misma, Pierre se encontraba en un corro hablando con otros compañeros del programa, y no paraba de comentar la importancia de las series de Fourier y de la matemática francesa durante esos siglos, con cierto aire de superioridad y fingida elegancia. Aunque Luke era una persona más bien reservada, no pudo evitar escuchar los comentarios de Pierre, y acercándose le comentó:

- "Eso no es del todo cierto. No puedes estar hablando sobre la historia del cálculo y obviar el gran papel de los matemáticos ingleses, empezando por Newton y pasando, por ejemplo, por Taylor".

Mentiría si no dijese que en ese momento se creó un molesto silencio, mientras los alumnos se miraban unos a otros preguntándose el porqué de esa reacción. Viendo esta situación, Luke, sonrojado, optó por retirarse y volver a la residencia.

Pierre continuó unos minutos más charlando con sus compañeros, pero no estaba tranquilo.Tenía que buscar a Luke y hablar con él.

Cuando llegó a la residencia, buscó el cuarto de Luke y le dio unos toques en la puerta:

- "¿Puedo pasar?"

- "Adelante".

- "Siento si alguno de mis comentarios de antes te han ofendido. No eran en serio, no tenía intención de parecer grosero".

- "No tiene importancia, tampoco ha sido para tanto. Además, creo que he perdido un poco los nervios".

- "De todas maneras, me gustaría que me comentaras algo sobre Taylor", le comentó Pierre para tratar de compensar su actuación de antes. "No creo que sea malo que aprenda algo nuevo".

Luke no sabía que hacer. No es que no supiera que contestar, ya que le gustaba mucho la historia de la matemática y conocía muy bien el desarrollo histórico del cálculo, sino que la pregunta le había tomado completamente por sorpresa. Al cabo de un rato acertó a decir:

- "¿Qué sabes sobre Taylor?"

- "Pues que era inglés... y el teorema de Taylor, naturalmente".

- "!Qué desastre! Hay que ver lo mal que trata la historia a algunas personas. Taylor es mucho más que el Teorema que lleva su nombre. Se trata de uno de los grandes del inicio del análisis. Aparte también trabajó en soluciones particulares de ecuaciones en derivadas parciales, la fórmula del cambio de variable, las relaciones entre la derivada de una función y la derivada de su inversa, el problema de la cuerda vibrante y tiene un tratado sobre perspectiva lineal que marcó un hito en su época por la perfección y rectitud de sus definiciones.

Verás, como bien dices, Taylor era Inglés. Su nombre era Brook Taylor, y nació en 1685 en Edmonton, viniendo a morir en Londres, en 1731. No fue una vida muy larga ni fácil, ya que su madurez estuvo cargada de desgracias, pero suficiente para dejar un legado para la historia. Su trabajo fue tan importante que Lagrage, en 1772 comentó que el Teorema de Taylor era el principio básico del cálculo diferencial.

Nació en una familia de bien, lo que permitió estudiar y en 1709 se licenció en Cambridge. Su primer gran trabajo lo escribió en 1708, pero no pudo ser publicado hasta 1715, cuando ya era miembro de la Royal Society..."

- "Ahí te gustaría acabar a tí, ¿no?", dijo Pierre viendo el aire de aristócrata que había puesto Luke al empezar su relato.

- "Tampoco aspiro a tanto. Bueno, la obra de la que estaba hablando es el *Methodus incrementorum directa e inversa*, donde aparece su famoso teorema. También en 1715 publicó *Linear Perspective*, la obra sobre perspectiva que ya te había comentado antes. Durante 1712 y 1724, publicó otros trece artículos sobre experimentos con capilares, magnetismo y termómetros. Ésta es la época de mayor producción de Taylor, ya que a partir de aquí empezaron sus desgracias".

- "Ya me imagino que no tiene que ver con las matemáticas, pero ¿qué le pasó exactamente?"

- "Pues en 1721 rompe relaciones con su padre, debido a que decide casarse con una mujer de menor posición social. Al cabo de dos años, ésta fallece durante el parto, y el hijo que esperaban también. Consigue recuperarse a duras penas, y a los dos años, en 1725, encuentra el amor con su segunda esposa, Sabetta Sawbridge. A los cuatro años muere su padre, y solo un año después Sabetta muere, nuevamente durante el parto, aunque en este caso la hija que esperaban sobrevive. Es normal que su vida quedara destrozada".

Los dos se miraron, con una mirada de quien conoce los hechos pero que no puede cambiarlos.

- "Gracias por la historia. Me ha servido para saber un poco más sobre Taylor. A lo mejor también existen matemáticos ingleses que merezcan la pena", dijo Pierre mientras se daba la vuelta y salía del cuarto, esbozando media sonrisa.

Camino a su habitación, pensaba sobre lo que le había contado Luke. Él sí conocía la historia de las matemáticas, pero no conocía mucho sobre la historia de los matemáticos. Decidió ponerse al día, para al poco tiempo poder hablar con Luke sobre historia. No le costó mucho tiempo decidir que se centraría en la figura de Fourier, ya que además de francés (claro), conocía sus resultados de análisis y le parecían bastante interesantes.

La réplica. La vida de Fourier y su trabajo

El río Leine estaba congelado. Era invierno y las condiciones en Gotinga ya no eran tan apacibles. No resultaba agradable dar paseos, y la gran mayoría del tiempo libre procuraban pasarlo en la residencia. Al menos allí tenían calefacción, aunque funcionara de manera bastante aleatoria.

Era ya mediados de diciembre, y todos en la residencia estaban más o menos pendientes de la llegada de las vacaciones para volver a casa. Pero no todos. Pierre andaba bastante ocupado poniéndose al día sobre la vida de Fourier y su legado matemático. Por fin, a los pocos días se presentó en el cuarto de Luke:

- "Hola, Luke. ¿Tienes frío?", dijo con sorpresa cuando vio a Luke envuelto en mantas sentado frente a la mesa llena de papeles.

- "Eres muy observador", le respondió con sorna. "Dime, ¿qué necesitas?"

- "Vengo a darte lo que es tuyo".

- "¿Es qué me has cogido algo y no me he dado cuenta?"

- "No es eso. Te acuerdas que hace dos meses me contaste la vida de Taylor? Pues ahora me toca a mí comentarte la vida de algún matemático".

La verdad es que Luke estaba bastante aburrido. Llevaba tres horas delante de un ejercicio, y estaba tan cargado que empezaba a dudar que tuviera solución. Un poco de descanso no le vendría mal.

- "Cuéntame, ¿a quién voy a tener el honor de conocer?", dijo haciendo una reverencia.

- "A Jean Baptiste Joseph Fourier".

Luke recordaba haber leído algo sobre la vida de Fourier, pero en este momento no era capaz de poner su mente en orden y aclarar las ideas.

- "Como te iba contando", dijo Pierre antes de hacer un carraspeo para aclarar su garganta, "Fourier nació en 1768 en Auxerre, y murió el 16 de Mayo de 1830, en París. Es por lo tanto, posterior a Taylor, quizá una o dos "generaciones matemáticas" posteriores a él. Se trata de uno de los "matemáticos aplicados", más preocupado por la aplicación práctica de las matemáticas que en la claridad y trasparencia de las demostraciones.

Su infancia no fue tan cándida, ya que tenía catorce hermanos y quedó huérfano cuando tenía diez años. Gracias al obispo de Auxerre, consiguió entrar en el Colegio Militar de Auxerre, donde empezó a interesarse por las matemáticas. En 1787 sintió la llamada e inició su camino al sacerdocio. Pero su interés por las matemáticas era más fuerte y decidió dejar el seminario.

Al volver a Auxerre fue nombrado profesor de matemáticas en el colegio de los Benedictos, y en 1794, cuando fue creada la Escuela Normal, fue nombrado profesor como premio a sus trabajos en Auxerre. Tras la Normal, Fourier fue destinado a la Politécnica.

Fourier preparaba ingenieros y matemáticos en la Politécnica cuando Napoleón, en 1798, decidió que formara parte de la Legión de la Cultura para civilizar Egipto. Permaneció en Egipto forzadamente, y cuando los franceses reconocieron que debían ser los británicos y no ellos los que regeneraran a los egipcios, el devoto pero desilusionado Fourier volvió a Francia".

En este momento de la conversación Pierre se detuvo a ver si Luke quería comentar algo sobre la persona de Napoleón, su campaña sobre Egipto y el papel de los ingleses en la campaña, pero viendo que Luke no hablaba, continuó:

- "A su vuelta de Egipto, Fourier fue nombrado, prefecto del Departamento de Isère. Estando en Grenoble, Fourier compuso su obra inmortal, la *Theoria analytique de la chaleur*. Ofrecía tantas perspectivas que la Academia alentó a Fourier para que la continuase, acordando que la teoría matemática del calor fuese propuesta para el Gran Premio en 1812. Fourier ganó el premio, aunque su trabajo no fue bien digerido por la Academia por su falta de rigor".

- "Algo parecido ocurrió con los trabajos de Taylor", dijo Luke. "Muchos matemáticos se quejan de la falta de formalismo de sus trabajos, pero hay que decir en su defensa que muchos de los conceptos que ahora conocemos no existían y ni siquiera tenían definido lo que era una función".

- "Ya, tenemos que ser un poco condescendientes con ellos. Pero volviendo al tema, un detalle de la personalidad de Fourier es el siguiente: él no digirió muy bien las críticas a su trabajo, y menos aún que, aunque le concedieron el premio del concurso, no publicaran su trabajo. Lo guardó celosamente, y cuando en 1822 fue elegido secretario de la sección de matemáticas de Academia de las Ciencias, aprovechó su posición para publicar su trabajo, del cual no cambió ni una coma".

- "Todo un personaje".

- "Pues sí. Al fin y al cabo, era francés, ¿no?"

- "Gracias por la conversación. Ha sido muy interesante conocer todos esos detalles".

- "No estarás intentando echarme, ¿verdad? Lo digo porque aún no he acabado".

- "¿Qué te queda entonces?", inquirió Luke.

- "Me gustaría comentarte cómo nacieron las series de Fourier. Tienes por ahí un folio? Creo que lo voy a necesitar".

Y Pierre adoptó la mejor de sus poses de profesor. Tomando el papel y el lápiz comenzó diciendo:

- "Como ya te dije antes, el concurso que ganó Fourier trataba sobre proporcionar una teoría matemática de las leyes de la propagación del calor. Cuando Fourier entregó su trabajo el jurado emitió el siguiente informe", dijo sacándose una cuartilla del bolsillo:

"Este trabajo contiene las ecuaciones diferenciales correctas que gobiernan la transmisión del calor, tanto en el interior de los cuerpos como en su superficie, y la novedad del tema junto con su importancia, ha motivado la concesión del premio... Sin embargo, la forma como el autor obtiene sus ecuaciones ... y el análisis de su solución deja algo que desear tanto en lo concerniente a la generalidad (de la solución) como al rigor."

- "Las ecuaciones que obtuvo Fourier fueron las siguientes", y tomando uno de los folios escribió:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad k(\frac{\partial^2 u}{\partial^x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

"según sea una barra o un recinto plano. A la resolución de cada uno de estos casos dedicó Fourier una serie de artículos que culminaron con su *Theoria analytique de la chaleur*.

Para llegar hasta la formulación de las soluciones de sus ecuaciones, Fourier utiliza su método favorito de separación de variables".

- "El mismo que ya habían empleado por D'Alembert y Bernouilli con anterioridad, ¿verdad?"

- "Efectivamente. Tomando $u(x,y) = v(x)w(y)$, demuestra que $u_k(x,y) = e^{-(2k-1)x}cos(2k-1)y$, con k perteneciente a los naturales. Ya que él tampoco tuvo un gran rigor en sus explicaciones, espero que tú tampoco me tengas en cuenta que obvie los detalles engorrosos", trató de disculparse Pierre.

Luke asintió con la cabeza, sin apenas levantar la vista de los folios donde Pierre trazaba las ecuaciones y las igualdades con un trazo bastante irregular.

- "Fourier trata entonces de buscar una solución como "superposición" de las anteriores, es decir, de la forma

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x,y),$$

para ciertos coeficientes a_n.

Sin embargo, el mismo Fourier observa que hay detalles que se le escapa, y llega a comentar en alguno de sus artículos:

“Como estos resultados parecen desviarse de las consecuencias ordinarias del cálculo, es necesario examinarlos con cuidado e interpretarlos en su verdadero sentido.”

Por otro lado, como cualquier función arbitraria f podría expresar la temperatura en el segmento $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, resulta que por la existencia de solución del problema físico, toda función arbitraria en un intervalo puede desarrollarse en serie de senos y cosenos, suponiendo por comodidad que el intervalo es el $[-\pi, \pi]$. Esto es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$$

Nos queda ahora acometer el cálculo de los coeficientes a_n y b_n. Para ello, el método más sencillo y directo está basado en las relaciones de ortogonalidad de las funciones trigonométricas:

$$\begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)cos(mx)dx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)sen(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)cos(mx)dx = 0 \qquad (n \neq m) \\ \int_{-\pi}^{\pi} cos^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} sen^2(nx)dx = \pi \qquad (n \neq 0) \end{array}$$

Multiplicando ambos miembros de $f(x)$ sucesivamente por $sen(nx)$ y $cos(mx)$ e integrando entre $-\pi$ y π ambas expresiones, si admitimos la validez de la integración término a término de la serie, resulta, con relativamente poco esfuerzo, que

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx$$

y que

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx.$$

De esta manera, queda totalmente definida la serie de Fourier de f”.

- “Es muy interesante, pero como tu mismo has dicho, bastante poco rigurosa”.

- “Ya, pero no deja de ser cierta, y se puede rigorizar con las técnicas actuales sin mucho esfuerzo, como ya hicieron Dirichlet, Weierstrass y algún matemático más”.

- “Bueno, tampoco te pongas así, no estaba criticando tu trabajo. En realidad, me parece una buena exposición. Considera saldada tu cuenta sobre historia conmigo”, bromeó Luke.

Tras unos quince minutos hablando sobre qué harían durante las vacaciones, Pierre abandonó el cuarto de Luke para irse al suyo. Luke miró los folios escritos con la deducción de Fourier y pensó que las cuentas no estaban realmente saldadas. Pierre se había esforzado en comentar la vida y el desarrollo histórico de las series de Fourier, y él no lo había hecho. Se propuso que en vacaciones trataría de encontrar los trabajos de Taylor para poder explicárselos a Pierre a la vuelta.

Cuando se puso a ordenar la mesa y recoger todos los folios, encontró el ejercicio en el que estaba trabajando. Se fijó bien en el enunciado. Quizá usando un cambio trigonométrico y las relaciones de ortogonalidad podría resolverlo.

La vuelta de las vacaciones
La deducción de Taylor

Al incio del nuevo año poco o nada había cambiado en Gotinga. El clima seguía siendo invernal, la facultad seguía pareciendo un gigante de piedra, y las personas parecían seguir perdidas en sus mundos interiores.

Las vacaciones le habían venido bien a Luke. Se encontraba más despejado, había tenido la ocasión de ver a los suyos y de tomar buena comida casera. Y había encontrado el tiempo y las ganas suficientes para estudiar los trabajos de Taylor.

No dejó pasar ni un día. Tras asistir por la mañana los dos a clase, se fueron juntos a la residencia para comer. La comida no era mala, hoy tenían Knoedel, que venían a ser una especie de albóndigas de patata, y eran una de las especialidades de la cocinera. Luke no quiso precipitarse, y dejó pasar la comida tranquilamente mientras hablanban de lo que habían hecho durante las vacaciones. Fue después de la comida, durante la sobremesa, cuando encontró el momento adecuado para darle la "sorpresa".

La sobremesa solían realizar en el salón común de la residencia. Había butacas y mesas, una televisión y siempre había periódicos de casi todos los países. Así podían estar más o menos al día de lo que pasaba en cada uno de sus lugares de procedencia.

Al llegar a la mesa donde siempre se ponían ellos, Luke sacó folios y su pluma.

- "Hoy va a ser disitinto, comentó. Te voy a explicar una cosa curiosa que he hecho estas vacaciones", dijo Luke.

- "Sorpréndeme", dijo con cierto aire de cansancio Pierre, que había llegado la noche anterior de París y llevaba ya cinco horas de clase encima.

- "Me toca ahora a mí contarte cómo llegó Taylor a su famosa fórmula".

Pierre sabía que tenía que ver con las diferencias finitas, pero no sabía exactamente de qué forma lo había hecho Taylor. Pierre, de naturaleza curioso, pareció desperezarse y se puso firme sobre el asiento, dispuesto a escuchar la lección que Luke estaba a punto de comenzar.

- "Taylor, como buen inglés (él también sabía defender a los que eran de su patria), era una persona recta y disciplinada. Se había formado bajo la alargada sombra de Newton, que hacía unas pocas décadas había iniciado el cálculo diferencial, y cuando llegó a su madurez matemática era una eminencia en ese campo. Su fórmula la publicó en su libro *Methodus incrementorum directa e inversa*, y la usó para resolver uno de los problemas de Kepler.

Como entenderás, los trabajos que publicó Taylor seguían la notación de Newton de puntos, superíndices y subíndices, pero yo te la voy a explicar de la manera actual.

Lo primero que hizo Taylor fue tomar un función f y una cantidad r positiva y fija. Con estos datos definió...", y tomando el papel escribió:

$$\Delta f(x) = f(x+r) - f(x),$$

"la diferencia finita de f de primer orden. De igual manera escribe

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = f(x+2r) - 2f(x) + f(x)$$

para la diferencia finita de segundo orden y así sucesivamente. Si ahora x pasa a valer $x+nr$, entonces $f(x)$ pasa a valer $f(x+nr)$. De esta manera podemos escribir

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{n}{1}\Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f(x) + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\Delta^n f(x).$$

- "Un momento. Esto no me queda nada claro", dijo con cara contrariada Pierre.

- "Espera un instante", le calmó Luke. "Ahora pensaba demostrarte que esa fórmula es correcta. Suponte que tenemos la siguiente tabla", dijo mientras dibujaba una cuadrícula en el folio:

$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
$f(x)+\Delta f(x)$	$\Delta f(x)+\Delta^2 f(x)$	$\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x)$	$\cdots$
$f(x)+2\Delta f(x)+\Delta^2 f(x)$	$\Delta f(x)+2\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x)$	$\cdots$	$\cdots$
$f(x)+3\Delta f(x)+3\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

tal que para pasar de una columna a la siguiente se aplica Δ y para pasar de una fila a la siguiente se suma cada elemento de la fila anterior con el que está situado a su derecha en la misma fila. De aquí podemos comprobar que el primer elemento de la segunda fila es $f(x+r)$, y así con todos los elementos de la segunda fila hasta llegar a la fila $n+1$, que es $f(x+nr)$. Si nos fijamos, los coeficientes de los términos $f(x)$, $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, ... , se forman de la misma manera que los coeficientes del desarrollo de Newton del binomio $(a+b)$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, ... , y por tanto, usando las fórmulas de Newton tenemos que estos coeficientes son

$$1, \frac{n}{1!}, \frac{n(n-1)}{2!}, \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}, \ldots.$$

Luke paró aquí un momento para descansar la voz y permitir que Pierre siguiera el razonamiento. Tras unos instantes, siguió con la explicación:

- "Ahora viene la parte más complicada de la deducción. No es que sea difícil de entender, ya que de hecho es muy intuitiva, pero es que, como en el caso de Fourier, no acomete los pasos con mucho rigor. Tampoco es que fuera culpa suya, como ya comentamos antes de las vacaciones, es que las bases del análisis aún no habían sido fijadas.

La idea de Taylor era tomar límites cuando $n \to \infty$, y $r \to 0$ pero no actuando directamente sobre la fórmula que vimos antes de $f(x+nr)$. Él dice que puede tomar un h número positivo tal que $h = nr$. Despejando r, podemos comprobar que r tiende a cero cuando n tiende a infinito y recíprocamente. Escribamos la fórmula de $f(x+nr)$ de la siguiente forma

$$f(x+nr) = f(x)+\frac{nr}{1}\frac{\Delta f(x)}{r}+\frac{n(n-1)r^2}{2!}\frac{\Delta^2 f(x)}{r^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1\cdot r^n}{n!}\frac{\Delta^n f(x)}{r^n},$$

y ahora, haciendo tender r a cero, n tenderá a infinito y obtendremos la fórmula de Taylor, que es

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2\frac{f''(x)}{2!} + \cdots$$

La cara de satisfacción de Luke lo decía todo. Sabía que lo había explicado bien. Había ido paso a paso, explicando cada idea, cada detalle. La prueba de que lo había hecho bien era la postura de concentración de tenía Pierre sobre mirando los folios, quedádose con la simpleza de la idea y de lo fácil que lo había hecho Luke.

- "Muy bien", dijo por fin. "Estoy impresionado. Veo que Taylor tenía las cosas claras. Sobre todo el concepto de paso al límite que realiza para la conclusión de la deducción".

- "Ése es el paso clave. En esa época todavía no estaba rigorizado ese concepto, pero ya Taylor rondaba la idea. Aunque su trabajo no es del todo correcto, fue MacLaurin quien más tarde le daría forma a la demostración con todo lujo de detalles".

- "Por eso el desarrollo de Taylor en cero se llama de MacLaurin, ¿no?", preguntó Pierre.

- "Efectivamente, debido a las contribuciones que hizo a la teoría de Taylor".

- "Me encantaría quedarme para que pudiéramos seguir hablando un rato sobre series de Taylor y Fourier", dijo Pierre, "pero tengo clase dentro de media hora. Curso de Álgebras de Lie. Es una clase que me encanta", dijo insistiéndo en la palabra encanta, con una gran mueca en la cara. "Quedamos un día de estos para seguir charlando, ¿vale?", le gritó Pierre mientras se alejaba del salón.

Luke se quedó pensando una rato sentado en su silla. Intentaba discurrir cómo se le pudo ocurrir a Taylor la deducción de su fórmula. Qué motivos le impulsaron a dedicarse a esa rama nueva de las matemáticas. Por qué usar diferencias finitas y relacionar los coeficientes con la expresión del binomio de Newton. Cuando más absorto estaba, una voz le hizo regresar del limbo.

- "Se me olvidaban los folios", dijo Pierre recogiendo de la mesa las hojas con la deducción de la fórmula de Taylor. "Me gustaría echarle un vistazo luego con más calma. ¡Hasta luego!"

Aplicaciones, analogías y diferencias

Tan sólo pasaron dos días cuando Luke se encontró una nota en el suelo de su habitación. En ella, la letra curva y desgastada de Pierre rezaba: *pásate esta tarde por mi habitación y hablamos un poco sobre "nuestros" temas. He encontrado una multitud de situaciones donde son útiles las series de Fourier.*

Pasadas las seis de la tarde, Luke se encontraba en la puerta de Pierre. Golpeó con los nudillos en la puerta y abrió. El cuarto de Pierre estaba como siempre, ordenado localmente. Un montón de libros en un lado, ropa en el otro, una cantidad enorme de papeles garabateados encima de la mesa, Pierre sobre la mesa escribiendo afanosamente sobre un folio con una diminuta bombilla justo al lado de su cabeza ... , y la bandera de Francia bien grande sobre toda la pared del fondo. Hay cosas que Luke pensaba que nunca cambiarían.

- "Hola, mi joven amigo", saludó Pierre.

- "Buenas, *champiòn*", le espoleó Luke. "Aquí estoy de nuevo para que sigamos "departiendo". ¿Qué tienes ahora que contarme?"

- "Verás, he estado consultado algunos libros y he encontrado muchos campos donde las series de Fourier tienen una importancia relevante. Por ejemplo, cualquier proceso ondulatorio puede ser modelado mediante una serie de Fourier, en acústica, en estudios de rayos X, en cardiología, en confección de imágenes digitales... Y, por supuesto y como ya sabemos, en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Un detalle curioso de aplicación de las series de Fourier lo tenemos en la compresión de archivos en formato JPG. Sabemos que un archivo en JPG ocupa mucho menos que un archivo, por ejemplo, BMP. Pero ¿sabes por que?", le inquirió Pierre.

- "Pues la verdad, no tengo ni idea", se sinceró Luke.

- "Verás, a grandes rasgos, esta es la idea. Cada imagen se subdivide en imágenes más pequeñas, y cada una se codifica según el color usando series de Fourier, y esos datos son introducidos en una matriz. Lo que se hace al pasar a formato JPG es que algunos datos de la matriz se pierden, consiguiéndose ahorrar espacio en la memoria del ordenador, pero con el handicap de que al abrir el fichero faltan algunos datos, con lo que al reconstruir la imagen, la aproximación no es tan exacta".

- "Tiene sentido", dijo Luke, mirando hacia el techo con la mano puesta en la barbilla. "Yo también me he estado informando sobre aplicaciones de las series de Taylor. Por ejemplo, se utilizan para calcular límites indeterminados, en problemas de máximos y mínimos, en procedimientos de aproximación de funciones... También se usa para calcular la exponencial de una matriz, por ejemplo, y es pieza básica en cualquier rama del cálculo numérico".

- "En el fondo no son tan diferentes", interrumpió Pierre. "Se trata de dos representaciones en serie de una función".

- "Ambas son series infinitas, y sus coeficientes se pueden calcular mediante fórmulas conocidas", le siguió Luke.

- "Sí, pero no todo son similitudes. En primer lugar, la serie de Taylor es un serie de potencias, y la serie de Fourier es trigonométrica, por lo que los criterios de convergencia son diferentes para cada uno".

- "Y la gran diferencia entre ambas es que la serie de Taylor, en los puntos donde representa la función de la que proviene, es una función analítica, de modo que toda ella está determina por su comportamiento en cualquier pequeño intervalo; mientras que la serie de Fourier, cuya procedencia es mucho más general, tiene carácter local".

- "Es verdad. También se diferencian en que, como has dicho, las series de Fourier permiten un mayor grado de generalidad en cuanto a las funciones a las que se puedan aplicar, ya que aunque existan puntos donde no exista la derivada de la función e incluso donde la función no sea continua, aún podrá la función admitir un desarrollo en serie de Fourier".

- "Eso también, pero no por ello pierden importancia las series de Taylor", dijo Luke tratando de defender a su paisano.

- "En absoluto he intentado decir eso", se disculpó Pierre, "son sólo las diferencias que existen entre ellas. Ambas tienen su importancia, y aunque las de Fourier sean más generales, no pongo en duda la importancia y la utilidad de las series de Taylor en la historia de las matemáticas. A fin de cuentas, ¿quién no conoce la fórmula de las series de Taylor? Incluso hay resultados que las conectan a ambas. Por ejemplo, el otro día vimos en clase que dos series de Fourier son conjugadas si representan las parte real y la parte imaginaria de la misma serie de Taylor. ¿No es maravilloso?"

Luke se quedó absorto. De repente le entró una especie de vértigo. Abrió la boca y dijo: "la verdad es que nos queda mucho por aprender, ¿no es así?"

Y Pierre asintió con la cabeza. Lentamente, sin decir nada.

Siguieron hablando hasta bien entrada la madrugada, pero ya no sólo de matemáticas. Hablaron sobre ellos, sobre el futuro, sobre qué harían cuando terminase el programa y tuvieran que volver a sus países. Era evidente que ambos tenían intención de seguir haciendo camino por el mundo de las matemáticas, pero no era fiable hacer cualquier tipo de aseveramiento acerca de lo que podría pasar.

El curso siguió su camino, y en julio se terminó el programa. Había sido un éxito, y tanto los profesores como los alumnos se habían quedado muy orgullosos por el trabajo bien hecho. Era de esperar que el programa se repitiese, pero ya con nuevos alumnos.

En el momento en que habían llegado los autobuses para llevar a los estudiantes a los respectivos aeropuertos, Luke y Pierre aprovecharon para despedirse.

- "Ha sido un placer, Pierre", empezó Luke. "Me alegra que hayamos coincido los dos aquí en este programa. He aprendido muchísimo, y te prometo que serán cosas que recordaré siempre".

- "Por la cuenta que te trae", sonrió Pierre. "Yo también lo he pasado muy bien. Es una lástima que eso se acabe. Pero en fin, espero que todo te vaya bien y se cumplan todos sus objetivos. Quién sabe, quizás algún día podamos encontrarnos de nuevo".

- "Quién sabe", repitió Luke, mientras se subía al autobús. "¡Hasta siempre!"

La Universidad Europea de las Ciencias

Los años pasaron. Tanto Luke como Pierre continuaron sus estudios, y ambos consiguieron acabar sus carreras con honores. Tras años de duro esfuerzo en completar sus doctorados y sus tesis, acabaron dando clases en sus respectivas facultades, tomando con el tiempo lugares de gran importancia y trascendencia en sus entornos.

Surgió entonces la propuesta de crear una Universidad Europea de las Ciencias, y como no, las Matemáticas formaban un parte importante del proyecto. Se necesitaban doctores para juzgar las pruebas de acceso a los nuevos profesores. Luke fue nombrado miembro del jurado para la cátedra de Análisis, en función de su cargo como jefe del departamente de Análisis de la Universidad de Cambridge.

Luke llegó cansado a la Universidad Europea. Había sido un mal viaje en avión, lleno de turbulencias. Cuando por fin entró en la facultad de Matemáticas y se dispuso a buscar el departamento de Análisis, encontró en el hall un grupo de personas que discutían sobre lo que creyó escuchar eran Matemáticas. Se acercó y pudo escuchar perfectamente como uno de los allí presentes defendía, con cierto aire burlón, que los matemáticos franceses eran los mejores geómetras, topólogos, probabilistas e incluso analistas. Luke no pudo evitar sonreir cuando, acercándose, no tuvo ninguna duda de que se trataba de Pierre.

- "¡Pierre!, ¿cómo estás? ¡Cuánto tiempo!"

- "¿Luke? ¿Eres tú? Ja, ja,ja, eres Luke! Por Dios, ¿cuantos años han pasado? ¿Veinte, veinticinco?"

- "No lo sé exactamente. Pero han sido muchos", dijo Luke mientras se daban un abrazo. "¿También tú has sido escogido como jurado para las nuevas cátedras?"

- "Pues sí, para el departamento de Matemática Aplicada. ¿Por qué no quedamos esta noche y recordamos viejos tiempos? Ahora todavía sé mucho más de series de Fourier", bromeó Pierre.

- "Perfecto, pero yo también he aprendido cosas nuevas sobre Taylor, algunas increíbles, ni te lo imaginas. Quedamos esta noche entonces, pero tú pones el vino, ¿eh?"

- "De acuerdo, pero que sepas que será francés".

Y es que, por mucho que se oponga Heráclito, hay cosas que nunca cambian.

Referencias

[AR] Juan Argüelles Rodríguez, *Historia de la Matemática*, Ediciones Akal, 1989

[BO] Carl Boyer, *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial, 1986

[CA] Antonio Cañada Villar, *Series de Fourier y aplicaciones*, Ediciones Pirámide, 2002

[GU] Miguel de Guzmán, *Impactos del Análisis Armónico*, Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1983

[BO] Fernando Bombal, *Las series de Fourier y el desarrollo del análisis en el siglo XIX*, Universidad Complutense de Madrid

[KA] Jean-Pierre Kahane, *A century of interplay between Taylor seires, Fourier series and Browmian Motion*, Bulletin of the London Mathematical Society

Algunos de los enlaces que he visitado en la realización de este trabajo han sido los siguientes:

- http://www.mat.uson.mx
- http://enciclopedia.us.es/index.php/Gotinga
- htpp://www-history.mcs.st-amdrews.ac.uk
- http://www.divulgamat.net