VARIABLE COMPLEJA I, grupo A
12/Noviembre/2020

PRUEBA

2 puntos

① Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, donde

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad v(x,y) \equiv 0$$

Prueba que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $(0,0)$ y que, sin embargo, no existe $f'(0)$ (es decir, no existe $f'(0+i\,0)$)

3 puntos

② Encuentra, razonadamente, alguna función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorfa, tal que su parte imaginaria sea la función $v(x,y) = e^{-y}\,\text{sen}(x)$ (Es decir, debes encontrar $u(x,y)$ tal que la función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, sea holomorfa en $\mathbb{C}$)

③ Encuentra el radio de convergencia de las series de potencias:

2 puntos

a) $$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n (z-4-i)^n$$

¿Converge la serie anterior para $z=0$? ¿Y para $z=4$?

3 puntos

b) $$\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{2^n}$$