Variable Compleja I (Prueba especial)

3^0 Grado en Matemáticas. Grupo A

Granada, 19 de Enero de 2022

1. Demostrar que existe una única función holomorfa $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ verificando

- $f(0) = 0$,
- $f(z) = z + f(z^2),\ \forall z \in D(0,1)$.

Demostrar que $f(1/10) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. De forma más general, demostrar que $f(1/n)) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para cualquier número natural $n > 1$.

2. ¿Para qué valores $a \geq 0$ se verifica la siguiente propiedad?:

Si Ω es un abierto conexo acotado no vacío y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ es una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω verificando $\min_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = a$ entonces podemos deducir que $\min_{z \in \partial\Omega} |f(z)| = a$.

3. Sea $k \in \mathbb{N}$ y f una función entera verificando

$$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^k} = 0.$$

Demostrar que f es un polinomio de grado menor estricto que k.

4. Sea $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$. Calcular, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada de vértices $-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i, -R$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(e^x + 1)^2}\, dx$$