Variable Compleja I

3^0 Grado en Matemáticas y Doble Grado en Física y Matemáticas

Granada, 14 de Febrero de 2022

1. (2.5 puntos) Enunciar la relación entre la derivabilidad de una función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ y la diferenciabilidad de la parte real de f y la parte imaginaria de f, donde $\Omega\subset\mathbb{C}$ es un abierto (ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la función definida por

$$f(x+iy)=\begin{cases}\dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}\,, & \text{si } x+iy\neq 0\\ 0\,, & \text{si } x+iy=0\end{cases}$$

Demuestra que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z=0$, pero que, sin embargo, f no es derivable en $z=0$.

2. (2.5 puntos) Definir la serie de Laurent de una función holomorfa f en $A(a,R_1,R_2)=\{z\in\mathbb{C}:R_1<|z-a|<R_2\}$, donde $a\in\mathbb{C}$ y $0\le R_1<R_2\le+\infty$.

Obtener el desarrollo de Laurent de la función

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}\,,\quad \forall z\neq\pm1$$

en $A(1,2,+\infty)=\{z\in\mathbb{C}:2<|z-1|\}$.

3. (2 puntos)

a) Calcula el conjunto de las funciones enteras f que verifican

$$|f(z)|\le|e^z|\,,\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

b) Sea p un polinomio verificando

$$|p(z)|\le|e^z|\,,\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

Demostrar que $p\equiv 0$.

4. (3 puntos) Enunciar el Teorema de los Residuos. Como consecuencia, calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2+t}{(t^2+1)(t^2+4)}dt.$$