VARIABLE COMPLEJA I, GRUPO A, Antonio Cañada

EXAMEN FINAL, 26/Enero/2021

- El examen ha de entregarse escrito a mano.
- Escribir DNI, Nombre y 2 Apellidos, Firma en la 1ª línea del texto
- No se admitirán exámenes después de las 18h.

① Demuestra que
1 Punto

$$\frac{(1-i)^{49}\left(\cos\frac{\pi}{40}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{40}\right)^{10}}{(8i-8\sqrt{3})^{6}}=-\sqrt{2}$$

② Sea $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, $z\longrightarrow\bar{z}\,e^{-|z|^2}$ ($\bar{z}$ indica el conjugado de z y $|z|$ indica el módulo de z).
2 Puntos

Calcula, razonadamente, el conjunto $A=\{z\in\mathbb{C} : \exists\, f'(z)\}$

Para cada $z\in A$, determina, razonadamente, el valor de $f'(z)$.

③ Demuestra, razonadamente, que no existe ninguna función $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorfa, t. q.
2 Puntos

$f(z)=f(x+iy)=(x^2+y^2)+i\,v(x,y)$

④ Sea $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, cerrada, simple, $C^1_{tr}[a,b]$ y $z_0\notin\gamma^*$ (traza de γ). Encuentra el valor de $\displaystyle\int_{\gamma^+}\frac{z^3+7z}{(z-z_0)^3}\,dz$
1 Punto

⑤ Encuentra la serie de Laurent de $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, alrededor de $z=1$
3 Puntos

Calcula el residuo de f en $z=1$

⑥ Sean $f,g:\Omega\to\mathbb{C}$, holomorfas, Ω abierto no vacío y conexo.
1 Punto

Demuestra que si $f(z)\cdot g(z)=0$, $\forall z\in\mathbb{C}$, entonces $f\equiv 0$ ó $g\equiv 0$ en $\mathbb{C}$. Nota: Si $h:\Omega\to\mathbb{C}$, entonces $h\equiv 0$ en $\mathbb{C}\iff h(z)=0$, $\forall z\in\mathbb{C}$