Universidad de Granada

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

TRABAJO FIN DE GRADO

Principio del máximo-mínimo para operadores elípticos. Aplicaciones

Presentado por:
Olga Albaladejo Cerezo

Curso académico 2019/2020

Trabajo de Fin de Grado. Curso académico 2019-2020.

Responsable de tutorización:
Antonio Cañada Villar
Departamento de Análisis Matemático

Índice general

Introducción

Este trabajo fin de grado titulado *Principios del máximo-mínimo para operadores elípticos. Aplicaciones*, tiene los siguientes objetivos:

- Resumen de los principales resultados relacionados con el Principio del máximo-mínimo para el laplaciano, estudiados en la asignatura Ecuaciones en Derivadas Parciales, optativa del Grado en matemáticas.
- Principio del máximo para operadores elípticos. Principio del máximo fuerte (Hopf). Otros Principios del máximo.
- Aplicaciones: unicidad y aproximación de soluciones de problemas de contorno.

Estos objetivos hemos ido afrontándolos a lo largo del trabajo, y los hemos alcanzado. El trabajo consta de cuatro capítulos:

1. *Algunos resultados en dimensión uno.* En este capítulo vamos a estudiar resultados sobre el Principio del máximo en dimensión uno, sus consecuencias y posteriormente su generalización.
2. *Algunos resultados importantes relacionados con el Principio del máximo-mínimo para el laplaciano.* En este capítulo llegaremos al primer objetivo. Partimos de resultados como el Teorema de Green, de la divergencia y la propiedad del valor medio para funciones armónicas para dimensión dos. Posteriormente generalizaremos estos resultados a dimensión n. Y finalmente llegaremos al Principio del máximo-mínimo para funciones armónicas en $\mathbb{R}^n$ y su demostración.
3. *Principio del máximo para operadores elípticos. Principio del máximo fuerte (Hopf). Otros principios del máximo.* En este capítulo encontraremos por primera vez la definición de operador elíptico y el Principio del máximo para estos operadores. Además veremos el Principio del máximo fuerte y como consecuencia otros principios del máximo. Es decir, en este capítulo llegamos al segundo objetivo.
4. *Aplicaciones.* Encontraremos resultados relacionados con la unicidad de solución y su aproximación para problemas de contorno y generalizaremos el Principio del máximo. Con esto llegamos al tercer y último objetivo del trabajo.

Algunos de estos resultados se basan en otros previos, de la asignatura *Análisis vectorial* y de algunos libros como [6] y [8], los cuales han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

Summary

In this work we have several objectives, which we have discussed previously in the introduction and, as we will see, which we have reached.
We will start this project by focusing on the one dimensional result all of them with the Maximum-minimum principle itself. We will do this in Chapter One, and we will find results like the following:

Theorem (One-dimensional Maximum Principle). *Suppose that $u(x)$ satisfies the differential inequality*

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0, \text{ for } x \in (a, b),$$

where $g(x)$ is a bounded function. If $u(x) \leq M$ in (a, b) and if the maximum M of u is attained at an interior point c of (a, b), then $u \equiv M$. Here u is a C^2 function in $[a, b]$.

In this Chapter we will find two different sections titled *One-dimensional Maximum Principle* and *Generalized one-dimensional Maximum Principle.* As the main result in the first section in this chapter we will prove the One dimensional maximum principle and we will take a look at some consequences of this theorem.
We will be able to generalize this result, asking for less restrictive hypothesis in the second (and last) section in this first chapter. In this generalization of the theorem we will find that it is only necessary to ask for the function $g(x)$ to be bounded from below, which is less restrictive than asking for $g(x)$ to be bounded, as we had before.
After that, in the second chapter, we will use very important results like Green's Theorem, the Divergence Theorem, or the Mean-value property for harmonic functions taking their values in the 2-dimensional plane. Moreover, we will study their respective generalizations when the dimension is equal to an arbitrary natural number n. All of these results will help us prove the Maximum principle for harmonic functions.
Let us recall that harmonic functions are solutions $u \in C^2$ to the Laplace equation

$$\Delta u = 0.$$

In this second chapter we will also prove the first and second Green formulas, which are key in order to prove some other important results like the Mean-value property for harmonic funcitions, and therefore, the Maximum-minimum principle for these functions in $\mathbb{R}^n$.
Some two-dimensional results in this chapter can also be found in *Análisis Vectorial*, a subject inside the Mathematics Degree at University of Granada. Besides, one can study these results meticulously in [4] and in [5].
The last two chapters of this project are the most complex, and important of all of them.
We begin the third chapter by giving the rigorous definition of second order elliptic operators and of second order uniformly elliptic operators.

Definitions. *The operator*

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

is called elliptic at a point $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *if and only if there is a positive real number* $\mu(x)$ *such that*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu(x) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

for ξ_i, $i = 1, 2, ...n$ *arbitrary real numbers.*
The operator $\mathcal{L}$ *is said to be elliptic in a domain* D *if it is elliptic at each point of* D.
The operator $\mathcal{L}$ *is said to be uniformly elliptic in* D *if*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu(x) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

holds for each point of D *and if there is a positive constant* μ_0 *such that* $\mu(x) \geq \mu_0$, *for all* x *in* D.

The most important theorem in this chapter is E. Hopf's (1902-1983) Maximum Principle. This result is from 1927 and it is one of the most important results in the theory of partial differential equations. We are talking about the following result.

Theorem. *Let* $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ *satisfy the differential inequality*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

in a domain D *where* L *is uniformly elliptic. Suppose that the coefficients* a_{ij} *and* b_i *are uniformly bounded in* D. *If* u *attains a maximum* M *at a point of* D, *then* $u \equiv M$ *in* D.

Throughout this chapter we will see its proof, which is difficult and quite long. Due to this result, we will find other kind of Maximum principles, as the stated below.

Theorem. *Let* u *satisfy the differential inequality*

$$(L + h)[u] \geq 0,$$

with $h \leq 0$, *with* L *uniformly elliptic in* D, *and with the coefficients of* L *and* h *bounded. If* u *attains a nonnegative maximum* M *at an interior point of* D, *then* $u \equiv M$.

To understand some of the hypothesis in some other theorems, we will need the definition of directional derivatives. Let us recall that the directional derivative of the function u at a point P in the boundary of a certain domain in the υ direction is defined as

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv \lim_{x \to P} [\nu \cdot \nabla u(x)] = \lim_{x \to P} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + \nu_n \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

To go into further research of these results, as well as to find the proof to the Strong version of the Maximum principle, one can consult H. Protter and F. Weinberger's book [6] on Maximum

Principles in Differential Equations.
Finally, we conclude this Final Degree Project giving applications of the Maximum principle related to the uniqueness of a solution to an elliptic equation, and approximation in boundary value problems. In the fourth chapter, we will have three sections titled *Uniqueness theorems for boundary value problems*, *Generalized Maximum Principle* and *Approximations to solutions in boundary value problems.* As we can see, these last sections correspond to the last goal of my problem.
In the first section, we will prove the uniqueness of solution in the case of a boundary value problem for the Laplace equation. In addition, we will derive an analogous result in a more general case, which corresponds to the following theorem.

Theorem. *Suppose v_1 y v_2 satisfy*

$$\begin{cases} (L+h)[v] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + h(x)v = f \ \ in \ D, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha(x)v = g_1 \ \ in \ \Gamma_1, \\ v = g_2 \ \ in \ \Gamma_2 \end{cases}$$

in a bounded domain D. Assume that Γ_1 and Γ_2 are disjoint sets whose union comprises ∂D, the boundary of D and that each point of Γ_1 lies on the boundary of a ball in D. If L is uniformly elliptic, the function $h(x) \leq 0$ is bounded and nonpositive, and $\alpha(x) \geq 0$, then $v_1 \equiv v_2$, except when $h \equiv \alpha \equiv 0$ and Γ_2 is vacuous, in which case $v_1 - v_2$ must be constant.

In the section titled *Generalized Maximum Principle* we will also find other uniqueness theorems that are proved to by this generalization of the Maximum principle. In this generalization we can see, as always, that the hypothesis are much more relaxed. In fact, this is the main aim of obtaining a more generalized version of the Maximum principle.
In the last section of the fourth chapter, we have two results that provide us with both a lower and an upper bound for the solution to a boundary value problem. This is to say, we find an approximation for this solution. Previously given results in chapter 3 will lead to this approximations of solutions. Having this lower and upper bound for the solution can also imply the uniqueness for the solution to the problem.

Capítulo 1

Algunos resultados en dimensión uno

En este capítulo nos centraremos en estudiar resultados en dimensión uno como el principio del máximo unidimensional y alguna generalización. Estos resultados pueden verse en [6] y motivarán los resultados que mostraremos en los capítulos siguientes, en dimensión arbitraria.

1.1. Principio del máximo unidimensional. Consecuencias

Recordemos que una función continua $u(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza el máximo en un punto de este intervalo. En el caso de que $u(x) \in C^2[a, b]$ y alcance un máximo relativo en un punto $c \in (a, b)$ se cumple que

$$u'(c) = 0 \text{ y } u''(c) \leq 0.$$

Esto se puede ver con la definición de primera y segunda derivada y utilizando que $u \in C^2[a, b]$.

Supongamos que u verifica la desigualdad

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' > 0$$

en un intervalo abierto (a, b), con $g(x)$ una función acotada y que $u \in C^2[a, b]$. Entonces podemos observar que esta desigualdad no puede cumplirse si u alcanza un máximo relativo en $c \in (a, b)$, ya que

$$u'(c) = 0 \text{ y } u''(c) \leq 0$$

y esto contradice $L[u] > 0$, y por tanto u alcanzará el máximo en los extremos del intervalo. Este es el caso más simple del principio del máximo.

Es primordial que tengamos la desigualdad estricta. Para la desigualdad no estricta

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0$$

tenemos el resultado siguiente

Teorema 1.1.1 (Principio del máximo unidimensional)**.** *Supongamos que $u(x)$ verifica*

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0, \ \text{para } x \in (a,b),$$

donde $g(x)$ es una función acotada. Si $u(x) \leq M$ en (a,b) y el máximo M se alcanza en un punto interior c de (a,b), entonces $u \equiv M$.

Demostración. Supongamos que u alcanza el máximo en c, es decir, $u(c) = M$ y que hay un punto $d \in (a,b)$ tal que $u(d) < M$. No es restrictivo suponer $d > c$ y defino la función

$$z(x) = e^{\alpha(x-c)} - 1,$$

con α una constante positiva que se determinará más adelante. Observemos que

$$\begin{cases} z(x) < 0, & x \in (a,c) \\ z(x) = 0, & x = c \\ z(x) > 0, & x \in (c,b) \end{cases}$$

Vamos a calcular $L[z]$, para ello derivamos y sustituimos en $L[z] \equiv z'' + g(x)z'$.

$$z'(x) = \alpha e^{\alpha(x-c)}$$

y

$$z''(x) = \alpha^2 e^{\alpha(x-c)}.$$

Luego,

$$L[z] \equiv z'' + g(x)z' = \alpha^2 e^{\alpha(x-c)} + g(x)\alpha e^{\alpha(x-c)} = \alpha e^{\alpha(x-c)} \left(\alpha + g(x)\right).$$

Tomamos α lo suficientemente grande para que $L[z] > 0$, es decir, como tenemos $\alpha > 0$ despejamos de $L[z] > 0$ y tomamos α para que

$$\alpha > -g(x).$$

Dado que $g(x)$ es una función acotada no tendremos ningún problema en escoger esta constante. Ahora definimos

$$w(x) = u(x) + \varepsilon z(x),$$

donde $\varepsilon > 0$ es una constante que verifica

$$\frac{M - u(d)}{z(d)} > \varepsilon.$$

Es posible encontrar este ε ya que $u(d) < M$ y $z(d) > 0$. Dado que $z(x) < 0$ para $x \in (a,c)$ tenemos que

$$w(x) = u(x) + \varepsilon z(x) < u(x) + \frac{M - u(d)}{z(d)} z(x) < u(x) < M, \ x \in (a,c).$$

Por la definición de ε tenemos que

$$w(d) = u(d) + \varepsilon z(d) < u(d) + \frac{M - u(d)}{\cancel{z(d)}} \cancel{z(d)} = \cancel{u(d)} + M - \cancel{u(d)} = M$$

y además

$$w(c) = u(c) + \varepsilon z(c) = M.$$

En resumen, tenemos que $w(x) < M$ en (a, c), $w(d) < M$ y $w(c) = M$. Luego, w alcanza el máximo en un punto interior de (a, d). Pero tenemos que

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0$$

Por el razonamiento visto al inicio del capítulo tenemos que w no puede alcanzar el máximo en un punto interior del intervalo y por tanto, hemos llegado a una contradicción.

□

Si consideráramos en la demostración anterior $d < c$ tendríamos que definir $z(x)$ como

$$z(x) = e^{-\alpha(x-c)} - 1,$$

con $\alpha > g(x)$ para llegar a la misma conclusión.

Cabe destacar que la definición de $z(x)$ es esencial para la demostración y que esta función no es única, para la demostración basta definir una función $z(x)$ que cumpla

$$\begin{cases} (i) & L[z] > 0 \\ (ii) & z(x) < 0,\ x \in (a, c) \\ (iii) & z(x) = 0,\ x = c \\ (iv) & z(x) > 0,\ x \in (c, b) \end{cases}$$

que en el caso de que $d < c$ las desigualdades (ii) y (iv) se invertirán. Por ejemplo, la función

$$z(x) = (x - a)^\alpha - (c - a)^\alpha$$

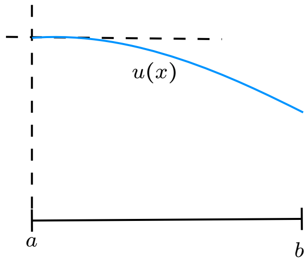
con α suficientemente grande también cumple las propiedades necesarias.

Para obtener el principio del mínimo basta con aplicar el principio del máximo a $-u$. Además, la condición de que $g(x)$ sea acotada en (a, b) se puede suavizar con la condición de que $g(x)$ sea acotada en cualquier intervalo $[a', b']$ contenido en (a, b) y el principio del máximo seguirá cumpliéndose. Es posible que $g(x)$ esté acotado en cualquier subintervalo cerrado de (a, b) y que no lo esté cuando x tienda a a o b.

El método que hemos utilizado para la demostración nos proporciona información adicional sobre las funciones que verifican la desigualdad

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0, \text{ para } x \in (a, b).$$

Podríamos pensar que una solución de esa desigualdad es de la siguiente forma,



donde es fácil observar que $u'(a) = 0$, pero esto nunca se va a dar. En el siguiente resultado veremos cómo son las soluciones en el caso de que tenga el máximo en a o en b.

Teorema 1.1.2. *Supongamos que $u(x)$ es una función no constante que verifica*

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0, \ \text{para } x \in (a,b),$$

que u tiene derivadas laterales en a y b y que $g(x)$ está acotada en todo subintervalo cerrado de (a,b). Si el máximo se alcanza en $x = a$ y $g(x)$ está acotada inferiormente en $x = a$, entonces $u'(a) < 0$. Si el máximo se alcanza en $x = b$ y $g(x)$ está acotada superiormente en $x = b$, entonces $u'(b) > 0$.

Demostración. Supongamos que u alcanza el máximo en el extremo izquierdo del intervalo, es decir $u(a) = M$, que $u(x) \leq M, \ \forall x \in [a,b]$ y que para algún punto $d \in (a,b)$ $u(d) < M$. Volvemos a definir $z(x)$ como

$$z(x) = e^{\alpha(x-a)} - 1, \ \alpha > 0,$$

tomamos $\alpha > -g(x), \ x \in [a,d]$ y por tanto, $L[z] > 0$. Considero $w(x) = u(x) + \varepsilon z(x)$, donde $\varepsilon > 0$ satisface

$$\varepsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}.$$

$L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0$ en el intervalo $[a,d]$ y por tanto w alcanza el máximo en los extremos del intervalo. Teníamos que $\varepsilon > 0$ verificaba

$$\varepsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}$$

luego,

$$w(d) = u(d) + \varepsilon z(d) < M.$$

Y observemos que

$$w(a) = u(a) + \varepsilon z(a) = u(a) = M,$$

por tanto $w(a) = M > w(d)$, luego el máximo se alcanza en $x = a$. Entonces,

$$w'(a) = u'(a) + \varepsilon z'(a) \leq 0$$

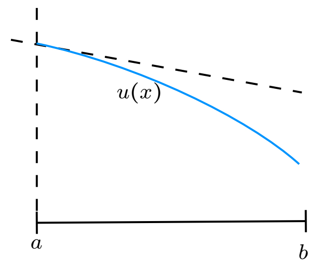
y derivando tenemos que

$$z'(x) = \alpha e^{\alpha(x-a)},$$

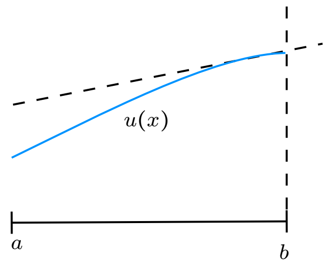
esto implica que $z'(a) = \alpha > 0$ y por tanto $u'(a) < 0$.

En el caso de que el máximo se alcance en $x = b$ el razonamiento es similar. □

Por lo visto en el teorema anterior hemos obtenido que $u(x)$ será de la siguiente manera,



en el caso de que el máximo se alcance en $x = a$ y en el caso de que el máximo se alcance en $x = b$



Observaciones.

(i) Si una función que verifica

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0, \text{ para } x \in (a,b)$$

alcanza un máximo relativo en un punto interior c del intervalo (a,b), entonces hay un intervalo (a_1, b_1) que contiene a c y tal que $u(x) \leq u(c)$.
Aplicando el teorema 1.1.1 tenemos que $u(x) = u(c)$, $\forall x \in (a_1, b_1)$. Y además, si aplicamos el teorema 1.1.2 a todos los intervalos en los que c es el extremo final obtenemos que $u(c)$ es un mínimo en el intervalo (a,b).

(ii) Si una función que verifica

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0, \text{ para } x \in (a,b)$$

tiene dos mínimos relativos c_1 y $c_2 \in (a,b)$, entonces habrá un máximo relativo en un punto entre c_1 y c_2 y por tanto $u(x)$ será constante en el intervalo (c_1, c_2).

(iii) Una función que verifica

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0, \text{ para } x \in (a,b)$$

no puede tener un punto de inflexión horizontal c (u tiene un punto de inflexión horizontal en $x = c$ si $u'(c) = 0$ mientras que u es estrictamente creciente o decreciente en un intervalo que contiene a c). Si existiese tal punto podriamos considerar un subintervalo con este punto como extremo, inicial o final, según convenga para que u alcance su máximo en c y, por tanto, contradecimos el teorema 1.1.2.

(iv) Se puede deducir un resultado análogo para las funciones que satisfacen $L[u] < 0$, produciendo un principio del mínimo asociado. Este resultado se obtiene al aplicar el teorema 1.1.2 a $-u$.

(v) Podemos demostrar el teorema 1.1.2 antes que el teorema 1.1.1. Si u alcanza un máximo relativo en $c \in (a, b)$, es decir $u'(c) = 0$, y aplicamos el teorema 1.1.2 a los intervalos (a, c) y (c, b) obtenemos que u es constante y por este razonamiento tendríamos el teorema 1.1.1 inmediatamente.

(vi) La acotación de g es fundamental para los teoremas 1.1.1 y 1.1.2. Veamos un ejemplo. consideremos la ecuación

$$u'' + g(x)u' = 0$$

con

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-3}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

tiene como solución $u(x) = 1 - x^4$, $-1 \leq x \leq 1$. u alcanza el máximo en $x = 0$ lo que contradice el teorema 1.1.1. Y el teorema 1.1.2 también ya que $u'(0) = 0$. Luego, estos resultados no se pueden aplicar si $g(x)$ no está acotada inferiormente en $(0, 1)$.

Ahora vamos a pasar a una desigualdad mas general

$$(L + h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0.$$

Veamos un par de ejemplos

$$u'' + u = 0$$

tiene como solución particular $u(x) = \operatorname{sen}(x)$ ya que el polinomio característico $\lambda^2 + 1 = 0$ tiene como soluciones $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$ y por tanto cualquier solución será combinación lineal de $u_1(x) = \cos(x)$ y $u_2(x) = \operatorname{sen}(x)$. Y $u(x) = \operatorname{sen}(x)$ alcanza el máximo en $x = \frac{\pi}{2}$.

En el caso de que tengamos

$$u'' - u = 0$$

tiene como solución $u(x) = -e^x - e^{-x}$ ya que el polinomio característico $\lambda^2 - 1 = 0$ tiene como soluciones $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y por tanto, cualquier solución es combinación lineal de $u_1(x) = e^x$ y $u_2(x) = e^{-x}$. Y esta solución $u(x)$ escogida alcanza el máximo en $x = 0$ con $u(0) = -2$. Escogemos esta solución ya que si escogiéramos, por ejemplo, $e^x + e^{-x}$ no podríamos hablar de máximo, tendríamos que hablar de mínimo.

De hecho, vamos a demostrar que si $h(x) \leq 0$, $u(x)$ no podrá alcanzar el máximo con valores positivos.

Si para $h(x) \leq 0$ se verifica

$$(L+h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u > 0$$

en el intervalo (a,b), entonces u no alcanzará ningún máximo positivo en el interior del intervalo.

Esto es porque para cualquier máximo c que tiene valor positivo tenemos que

$$u'(c) = 0, \;\; u''(c) \leq 0 \text{ y } h(c)u(c) \leq 0$$

y por tanto,

$$u''(c) + h(c)u(c) \leq 0$$

lo que contradice que $(L+h)[u] > 0$.

Esto nos permitirá extender los teoremas 1.1.1 y 1.1.2 únicamente escogiendo α suficientemente grande para que $(L+h)[z] > 0$ con

$$z(x) = e^{\alpha(x-c)} - 1$$

en el caso de que $c < d$ y en caso contrario

$$z(x) = e^{-\alpha(x-c)} - 1.$$

$$(L+h)[z] \equiv \alpha^2 e^{\alpha(x-c)} + \alpha g(x) e^{\alpha(x-c)} + h(x)\left(e^{\alpha(x-c)} - 1\right) > 0$$

dado que $e^{\alpha(x-c)} > 0, \;\; \forall x \in (a,b)$

$$\alpha^2 + \alpha g(x) + h(x)\left(1 - e^{-\alpha(x-c)}\right) > 0.$$

Si $d < c$, tenemos

$$(L+h)[z] \equiv \alpha^2 e^{-\alpha(x-c)} - \alpha g(x) e^{-\alpha(x-c)} + h(x)\left(e^{-\alpha(x-c)} - 1\right) > 0$$

de la misma manera que en el caso anterior, obtenemos

$$\alpha^2 - \alpha g(x) + h(x)\left(1 - e^{\alpha(x-c)}\right) > 0.$$

En resumen, α tiene que cumplir

$$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha g(x) + h(x)\,(1 - e^{-\alpha(x-c)}) > 0, & \text{si } d > c, \\ \alpha^2 - \alpha g(x) + h(x)\,(1 - e^{\alpha(x-c)}) > 0, & \text{si } d < c. \end{cases}$$

Dado que $h(x) \leq 0$ tenemos que

$$\alpha^2 + \alpha g(x) + h(x)\left(1 - e^{-\alpha(x-c)}\right) \geq \alpha^2 + \alpha g(x) + h(x)$$

$$\alpha^2 - \alpha g(x) + h(x)\left(1 - e^{\alpha(x-c)}\right) \geq \alpha^2 - \alpha g(x) + h(x).$$

Luego nos basta con que $\alpha > 0$ verifique

$$\alpha^2 - \alpha|g(x)| + h(x) > 0.$$

Esto se cumplirá si $g(x)$ y $h(x)$ están acotadas, de hecho será suficiente con que estén acotadas en cada subintervalo cerrado de (a,b). Los siguientes resultados son una extensión de los teoremas 1.1.1 y 1.1.2.

Teorema 1.1.3. *Si $u(x)$ verifica*

$$(L+h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0$$

en (a,b) con $h(x) \leq 0$, si $h(x)$ y $g(x)$ están acotados en cada subintervalo cerrado y suponemos que u alcanza un máximo no negativo M en un punto interior c de (a,b), entonces $u(x) \equiv M$.

Observemos que si $h(x)$ no es idénticamente 0, el único máximo no negativo que satisface la desigualdad es $M = 0$.

Teorema 1.1.4. *Supongamos que u es una función no constante que verifica*

$$(L+h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0$$

con derivadas laterales en a y b, que $h(x) \leq 0$ y que g y h están acotadas en todo subintervalo cerrado de (a,b). Si u alcanza un máximo no negativo en a y la función $g(x) + (x-a)h(x)$ está acotada inferiormente en un entorno a la derecha de a, entonces $u'(a) < 0$. Si u alcanza un máximo no negativo en un entorno a la izquierda de b y la función $g(x) - (b-x)h(x)$ está acotada superiormente en $x = b$, entonces $u'(b) > 0$.

Demostración. Supongamos que u alcanza el máximo en el extremo izquierdo $x = a$, $u(a) = M \geq 0$ y que para algún $d \in (a,b)$ $u(d) < M$.

Defino $z(x)$ como

$$z(x) = e^{\alpha(x-a)} - 1,$$

con α lo suficientemente grande para que $(L+h)[z] > 0$. Es decir, $\alpha > 0$ tiene que cumplir

$$(L+h)[z] \equiv \alpha^2 e^{\alpha(x-a)} + \alpha g(x) e^{\alpha(x-a)} + h(x)\left[e^{\alpha(x-a)} - 1\right] > 0.$$

Para determinar lo que debe satisfacer α primero vamos a demostrar que $1 - e^{-\alpha(x-a)} \leq \alpha(x-a)$.

Defino $f(x) = \alpha(x-a) + e^{-\alpha(x-a)} - 1$ y veamos que $f(x) \geq 0$.

$$f'(x) = \alpha - \alpha e^{-\alpha(x-a)} \geq 0,\ x \in [a,b]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

Luego, $f(x)$ tiene un mínimo en a y $f(a) = 0$. Por tanto, $f(x) \geq 0,\ x \in [a,b]$ y como $h(x) \leq 0$

$$(L+h)[z] = e^{\alpha(x-a)}\left[\alpha^2 + \alpha g(x) + h(x)\left(1 - e^{-\alpha(x-a)}\right)\right] \geq e^{\alpha(x-a)}\left[\alpha^2 + \alpha g(x) + \alpha(x-a)h(x)\right].$$

Entonces, tenemos

$$(L+h)[z] \equiv \alpha^2 e^{\alpha(x-a)} + \alpha g(x)e^{\alpha(x-a)} + h(x)\left[e^{\alpha(x-a)} - 1\right] =$$

$$= e^{\alpha(x-a)}\left[\alpha^2 + \alpha g(x) + h(x)\left(1 - e^{-\alpha(x-a)}\right)\right] \geq e^{\alpha(x-a)}\left[\alpha^2 + \alpha g(x) + \alpha(x-a)h(x)\right] > 0.$$

Despejando de

$$e^{\alpha(x-a)}\left[\alpha^2 + \alpha g(x) + \alpha(x-a)h(x)\right] > 0$$

obtenemos

$$\alpha > -g(x) - (x-a)h(x),\ x \in [a,d].$$

Considero $w(x) = u(x) + \varepsilon z(x)$, con $0 < \varepsilon < \frac{M-u(d)}{z(d)}$.

$$(L+h)[w] = (L+h)[u] + \varepsilon(L+h)[z] > 0$$

y por el teorema 1.1.3 sabemos que w alcanza el máximo no negativo en los extremos de $[a,d]$, esto es porque w no es constante ya que

$$w(d) < u(d) + \varepsilon z(d) < M$$

y

$$w(a) = u(a) + \varepsilon z(a) = u(a) = M.$$

Luego, w alcanza el máximo en $x = a$, esto es que

$$w'(a) = u'(a) + \varepsilon z'(a) \leq 0$$

y

$$z'(a) = \alpha > 0,$$

lo que implica que $u'(a) < 0$.

□

Si el máximo se alcanzara en $x = b$ aplicaríamos un razonamiento similar.

Corolario 1.1.1. *Si u verifica*

$$(L+h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0$$

en (a,b) con $h(x) \leq 0$, u es continua en (a,b) y $u(a) \leq 0$, $u(b) \leq 0$, entonces $u(x) \leq 0$ en (a,b) a no ser que $u \equiv 0$.

1.2. Principio del máximo unidimensional generalizado

En esta sección vamos a estudiar la desigualdad

$$(L+h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0, \;\; a \leq x \leq b$$

sin exigir que $h(x) \leq 0$, pero sí seguimos exigiendo que $h(x)$ y $g(x)$ estén acotados en cada subintervalo cerrado de (a,b). Supongamos que existe una función $w \in C^2([a,b])$ que cumple

$$w > 0 \text{ en } [a,b]$$

y

$$(L+h)[w] \leq 0 \text{ en } (a,b).$$

Defino $v = \frac{u}{w}$ y por hipótesis $(L+h)[u] \geq 0$, por tanto

$$(L+h)[u] = (L+h)[vw] = v''w + 2v'w' + vw'' + g(x)\left(v'w + vw'\right) + h(x)vw =$$

$$= \left(w'' + g(x)w' + h(x)\right)v + v''w + \left(2w' + g(x)w\right)v' = v''w + \left(2w' + g(x)w\right)v' + (L+h)[w]v \geq 0.$$

Dado que $w > 0$ en $[a,b]$ tenemos que v cumple

$$v'' + \left(2\frac{w'}{w} + g(x)\right)v' + \frac{v}{w}(L+h)[w] \geq 0.$$

Como $w \in C^2([a,b])$, w y w' alcanzan el máximo y el mínimo en $[a,b]$, es decir, los tenemos controlados. Esto implica que $2\frac{w'}{w} + g(x)$ y $\frac{v}{w}(L+h)[w]$ están acotadas en cada subintervalo cerrado de (a,b) ya que $g(x)$ y $h(x)$ lo están, $w > 0$ y w' alcanzan el máximo en $[a,b]$ y además también w'' es continua en $[a,b]$, luego alcanza máximo y mínimo y por tanto $\frac{1}{w}(L+h)[w]$ está acotado.

Luego, v verifica los teoremas 1.1.3 y 1.1.4.

Veamos que si $h(x)$ está acotado, $g(x)$ está acotado inferiormente y $[a,b]$ es suficientemente pequeño hay una función que cumple

$$w > 0 \text{ en } [a,b]$$

y

$$(L+h)[w] \leq 0 \text{ en } (a,b),$$

esta función viene dada por

$$w = 1 - \beta(x-a)^2$$

donde β se elige para que se cumpla $w > 0$ en $[a,b]$ y $(L+h)[w] \leq 0$ en (a,b). Para ver como escoger β calculamos

$$(L+h)[w] = -2\beta - 2\beta g(x)(x-a) + h(x)\left(1-\beta(x-a)^2\right) =$$

$$= -2\beta\left(1+g(x)(x-a)\right) + h(x)\left(1-\beta(x-a)^2\right) = -2\beta\left(1+g(x)(x-a)+\frac{1}{2}(x-a)^2h(x)\right) + h(x).$$

Hemos supuesto que $h(x)$ y $g(x)$ están acotadas inferiormente, luego existen constantes tales que $g \geq G$ y $h \geq H$. Consideramos a y b suficientemente cercanos para que

$$1 + G(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 H > 0, \;\; a \leq x \leq b.$$

Dado que $h(x)$ está acotado superiormente, podemos escoger β tal que

$$\beta \geq \frac{1}{2}\frac{h(x)}{1+G(x-a)+\frac{1}{2}(x-a)^2H}.$$

Por tanto, tenemos que $(L+h)[w] \leq 0$ en (a,b). Si (a,b) es suficientemente pequeño para que

$$\beta(b-a)^2 < 1$$

entonces tendríamos $w > 0$ en $[a,b]$. De esta manera siempre podremos construir la función w con las propiedades deseadas. Esta discusión nos lleva a la generalización del principio de máximo.

Teorema 1.2.1. *Supongamos que el operador $(L+h)$ está definido de la forma*

$$(L+h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0, \;\; a \leq x \leq b$$

donde $h(x)$ está acotada y $g(x)$ está acotada inferiormente. Para un intervalo $[a,b]$ suficientemente pequeño podemos encontrar una función w que cumple

$$w > 0 \;\; en \;\; [a,b]$$

y

$$(L+h)[w] \leq 0 \;\; en \;\; (a,b).$$

Entonces, si u es una función que satisface $(L+h)[u] \geq 0, \;\; x \in [a,b]$, la función $v = \frac{u}{w}$ satisface el principio del máximo dado en los teoremas 1.1.3 y 1.1.4.

Observaciones.

Este teorema nos muestra que una función u que satisface

$$(L+h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0, \;\; a \leq x \leq b$$

no puede oscilar muy rápido, ya que si $u > 0$ entre dos de sus ceros $x = a$ y $x = b$, entonces $\frac{u}{w}$ debe tener un máximo positivo entre estos ceros y por tanto, violaría el teorema 1.2.1 (ya que $\frac{u}{w}$ no satisface el teorema 1.1.3) a no ser que la distancia entre a y b sea grande lo que no se da en el teorema. Luego, si el teorema se cumple en un intervalo (a,b) podemos encontrar una función u que tenga como mucho dos ceros y que $u < 0$ entre ellos.

Si u es solución de

$$u'' + g(x)u' + h(x)u = 0$$

podemos aplicar el mismo razonamiento a u y $-u$, obteniendo que si u y $-u$ tienen dos ceros, entonces $u < 0$ y $-u < 0$, imposible. Por tanto puede tener como mucho un cero en el intervalo donde se satisface el teorema 1.2.1.

Sea $r(x)$ una solución de la ecuación diferencial

$$r'' + g(x)r' + h(x)r = 0,$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son funciones acotadas. Supongamos que r no es constantemente cero y que $r(a) = 0$. Por la observación sabemos que r no puede anularse a cierta distancia a la derecha de a. Si r tiene ceros a la derecha de a denotaremos a^* al primer cero a la derecha de a y lo llamaremos punto conjugado de a. Luego, r será positiva o negativa en (a, a^*), supongamos que es positiva. Si $w > 0$ en $[a, a^*]$ la función $\frac{r}{w}$ se anula en a y en a^* y es positivo en (a, a^*), luego tiene un máximo en (a, a^*). Podemos ver que el teorema 1.1.3 no se cumple ya que si se cumpliera tendríamos que r es constantemente igual a cero, lo que contradice la hipótesis. Entonces por el teorema 1.2.1 se tiene que w no puede cumplir $(L + h)[w] \leq 0$ en (a, a^*).

Observemos que $r(x)$ está acotado inferiormente por una constante positiva en algún subintervalo cerrado $[c, b]$ contenido en (a, a^*) lo que implica que para una constante suficientemente pequeña $\varepsilon > 0$ la función

$$w(x) = r(x) + \varepsilon\left[2 - e^{\alpha(x-a)}\right]$$

es positiva en $[a, b]$. Si consideramos α tal que $(L + h)[2 - e^{\alpha(x-a)}] \leq 0$ en (a, b), entonces se satisface el teorema 1.2.1 en (a, b) ya que

$$(L + h)[r] = 0,$$

$h(x)$ y $g(x)$ están acotadas,

$$w > 0 \text{ en } [a, b],$$

y

$$(L + h)[w] = \cancel{(L + h)[r]} + \varepsilon(L + h)[2 - e^{\alpha(x-a)}] = \varepsilon(L + h)[2 - e^{\alpha(x-a)}] \leq 0 \text{ en } (a, b).$$

En resumen, si a^* es el punto conjugado de a, existe $w > 0$ tal que verifica el teorema 1.2.1 en el intervalo $[a, b]$ si, y solo si, $b < a^*$. Si $r(x)$, que recordamos que es la solución de

$$r'' + g(x)r' + h(x)r = 0 \text{ con } r(a) = 0,$$

no tiene ningún cero a la derecha de a consideramos $a^* = \infty$ y se verifica el teorema 1.2.1 en todo intervalo $[a, b]$.

Capítulo 2

Algunos resultados importantes relacionados con el principio del máximo-mínimo para el laplaciano

Los resultados de este capítulo pueden verse en [2] salvo la demostración del Teorema del Principio del Máximo-Mínimo para funciones armónicas. Otras demostraciones pueden verse en [6] y [8]. Para los resultados usados de Análisis Vectorial se puede consultar [4] y [5]. Otras demostraciones pueden verse en [1], [3] y [7].

2.1. El teorema de Green y el teorema de la divergencia en dimensión 2. Propiedad del valor medio para funciones armónicas

Para empezar vamos a ver unos conceptos que aparecerán en estos teoremas:

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un camino continuo, cerrado ($\gamma(a) = \gamma(b)$) y simple (γ inyectiva en $[a,b)$).
Decimos que $\Gamma = \{\gamma(t)/t \in [a,b]\}$ es la curva de Jordan recorrida por el camino γ.
Por el teorema de la curva de Jordan tenemos que $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$ con Ω_1, Ω_2 abiertos no vacíos, conexos, disjuntos, con frontera común Γ y Ω_1 acotado. Decimos que Ω_1 es la región interior a Γ.

Una curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es regular a trozos si y solo si

$$\exists \ a = t_0 < t_1 < ... < t_{i-1} < t_i < ... < t_{n-1} < t_n = b$$

tal que $\gamma \in C^1 [t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n$.

Teorema 2.1.1. *Teorema de Green Sean $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cerrada, simple, regular a trozos, $\Gamma = \gamma[a,b]$ curva de Jordan regular a trozos, Ω abierto de $\mathbb{R}^2$ tal que $D \cup \Gamma \subset \Omega$ donde D es la región interior de Γ y $P, Q \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Entonces, se cumple:*

$$\int_{(\partial D)^+} (Pdx + Qdy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

donde $(\partial D)^+$ es la orientación positiva.

Teorema 2.1.2 (Teorema de la divergencia)**.** *Sean $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cerrada, simple, regular a trozos, $\Gamma = \gamma[a,b]$ curva de Jordan regular a trozos, Ω abierto de $\mathbb{R}^2$ tal que $D \cup \Gamma \subset \Omega$ donde D es la región interior de Γ y $P, Q \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Entonces, se cumple:*

$$\int_{(\partial D)^+} (-Qdx + Pdy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

A veces, es conveniente escribir estos teoremas con otra notación. Las hipótesis son las mismas que en dichos teoremas.

Sean $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ y $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Se cumple:

Teorema de Green.

$$\int_a^b < F(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = \int_{\gamma^+} F \cdot d\gamma = \int_D (rot\ F)(x,y) dxdy,$$

donde $\gamma^+ = (\partial D)^+$ y $rot\ F = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$.

Teorema de la divergencia.

$$\int_a^b < F(\gamma(t)), N(t) > dt = \int_{\gamma^+} F \cdot N = \int_D (div\ F)(x,y) dxdy,$$

donde $\gamma^+ = (\partial D)^+$ y $N(t) = (y'(t), -x'(t))$ es el vector normal exterior.

Vamos a ver, por último la propiedad del valor medio para funciones armónicas. Para ello, primero vamos a dar el concepto de función armónica.

Las soluciones C^2 de la ecuación de Laplace ($\Delta u = 0$) se llaman funciones armónicas.

Teorema 2.1.3 (Propiedad del valor medio para funciones armónicas en dimensión 2). *Sean $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$ y u cualquier función armónica en $B_{\mathbb{R}^2}(p; R)$ y continua en $\overline{B_{\mathbb{R}^2}(p; R)} = \{x \in \mathbb{R}^2; \|p - x\| \leq R\}$ donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea. Entonces, se tiene que:*

$$u(p) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{\|p-x\|\leq R} u(x)dx = \frac{1}{2\pi R} \int_{\|p-s\|=R} u(s)ds.$$

Demostración. Consideremos $r > 0$ tal que $r < R$. Dado que $\Delta u = div(\nabla u)$, aplicando el teorema de la divergencia en $D = B_{\mathbb{R}^2}(p; r)$ con $F = (u_{x_1}, u_{x_2}) = \nabla u$, nos queda que:

$$\int_{(\partial D)^+} F \cdot N = \int_D divF = \int_D \Delta u = 0.$$

Tomando la parametrización $(\partial D)^+ = \begin{cases} x_1 = p_1 + r\cos(\theta) \\ x_2 = p_2 + r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

tenemos que $N = (x_2', -x_1') = (r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta))$, luego:

$$\int_{(\partial D)^+} F{\cdot}N = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (u_{x_1}(p_1{+}r\cos(\theta), p_2{+}r\,\text{sen}(\theta))r\cos(\theta){+}u_{x_2}(p_1{+}r\cos(\theta), p_2{+}r\,\text{sen}(\theta))r\,\text{sen}(\theta))d\theta =$$

$$= r\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{d}{dr}\left[u(p_1 + r\cos(\theta), p_2 + r\,\text{sen}(\theta))\right] d\theta = 0.$$

Por tanto,

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{d}{dr}\left[u(p_1 + r\cos(\theta), p_2 + r\,\text{sen}(\theta))\right] d\theta = 0.$$

Luego, integrando respecto a r nos queda:

$$\int_{r=0}^{R}\left[\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{d}{dr}\left[u(p_1 + r\cos(\theta), p_2 + r\,\text{sen}(\theta))\right] d\theta\right] dr =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[\int_{r=0}^{R} \frac{d}{dr}\left[u(p_1 + r\cos(\theta), p_2 + r\,\text{sen}(\theta))\right] dr\right] d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (u(p_1 + r\cos(\theta), p_2 + r\,\text{sen}(\theta))|_{r=0}^{r=R} d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (u(p_1{+}R\cos(\theta), p_2{+}R\,\text{sen}(\theta)){-}u(p_1, p_2))d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} u(p_1 + R\cos(\theta), p_2 + R\,\text{sen}(\theta))d\theta - 2\pi u(p_1, p_2) = 0.$$

Por tanto, despejando $u(p_1, p_2)$, tenemos:

$$u(p_1, p_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(p_1 + R\cos(\theta), p_2 + R\,\text{sen}(\theta))d\theta.$$

Por la definición de integral de línea de un campo escalar:

$$u(p_1, p_2) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} Ru(p_1 + R\cos(\theta), p_2 + R\,\text{sen}(\theta))d\theta = \frac{1}{2\pi R}\int_{\|p-x\|=R} u(s)ds.$$

Hemos demostrado la propiedad del valor medio para esferas (circunferencias).

Veamos la propiedad del valor medio para bolas:

$$\forall \ r \in (0, R)\,, \qquad 2\pi r u(p_1, p_2) = \int_{\|p-x\|=r} u(s)ds,$$

por tanto $\int_0^R 2\pi r u(p_1,p_2)dr = \int_0^R \left(\int_{\|p-x\|=r} u(s)ds\right) dr$.

Por el teorema de Fubini nos queda:

$$\frac{\cancel{2}\pi R^2}{\cancel{2}} u(p_1, p_2) = \int_{\|p-x\|\leq R} u(x)dx.$$

Luego, $u(p_1,p_2) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{\|p-x\|\leq R} u(x)dx$.

Hemos demostrado la propiedad del valor medio para bolas a partir de la propiedad del valor medio para esferas.

Veamos que también la propiedad del valor medio para bolas implica la propiedad del valor medio para esferas:

Tenemos $u(p_1,p_2) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{\|p-x\|\leq R} u(x)dx$. Despejando, nos queda:

$$\pi R^2 u(p_1, p_2) = \int_{\|p-x\|\leq R} u(x)dx = \int_{r=0}^{r=R} \left[\int_{\|p-x\|=r} u(s)ds\right] dr = \int_0^R v(r)dr,$$

donde $v(r) = \int_{\|p-x\|=r} u(s)ds$ es continua en r. Aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$2\pi R u(p_1, p_2) = v(R) = \int_{\|p-x\|=R} u(s)ds.$$

Por tanto, $u(p_1,p_2) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\|p-x\|=R} u(s)ds$.

$\square$

Podemos generalizar este resultado a cualquier dimensión, para ello primero vamos a ver otros resultados previos:

Busquemos soluciones radiales de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$:

Consideramos $n \geq 2$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo, queremos encontrar $u : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ para que la función

$$v(x) = u(\|x - \xi\|) = u(\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + ... + (x_n + \xi_n)^2}), \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$$

sea solución de la ecuación de Laplace $\Delta v(x) = 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$.

Denotaremos $r(x) = \|x - \xi\| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + ... + (x_n + \xi_n)^2}$, luego $v(x) = u(r(x))$ y aplicando la regla de la cadena nos queda:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = u'(r)\frac{\partial r(x)}{\partial x_i}, \ \frac{\partial r(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{\cancel{2}}(r^2)^{-\frac{1}{2}}\cancel{2}(x_i - \xi_i) = \frac{x_i - \xi_i}{r}, \ 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto, $\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = u'(r)\frac{\partial r(x)}{\partial x_i} = u'(r)\frac{x_i-\xi_i}{r}$, $1 \leq n$.

Apliquemos de nuevo la regla de la cadena

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i^2} = u''(r)\frac{\partial r(x)}{\partial x_i}\frac{x_i - \xi_i}{r} + u'(r)\frac{r - (x_i - \xi_i)\frac{\partial r(x)}{\partial x_i}}{r^2} = u''(r)\frac{(x_i - \xi_i)^2}{r^2} + u'(r)\frac{r - \frac{(x_i-\xi_i)^2}{r}}{r^2} =$$

$$= u''(r)\frac{(x_i - \xi_i)^2}{r^2} + u'(r)\frac{r^2 - (x_i - \xi_i)^2}{r^3}.$$

Luego,

$$\Delta v(x) = \frac{u''(r)}{r^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2 + \frac{u'(r)}{r^3}\sum_{i=1}^{n}(r^2 - (x_i - \xi_i)^2) = \frac{u''(r)}{\cancel{r^2}}\cancel{r^2} + \frac{u'(r)}{r^3}\left(\sum_{i=1}^{n} r^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2\right) =$$

$$= u''(r)+\frac{u'(r)}{r^3}\left(nr^2 - r^2\right) = u''(r)+\frac{u'(r)nr^2}{r^3}-\frac{u'(r)r^2}{r^3} = u''(r)+n\frac{u'(r)}{r}-\frac{u'(r)}{r} = u''(r)+\frac{n-1}{r}u'(r).$$

Por tanto, obtenemos la ecuación $u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) = 0$. Vamos a resolver esta ecuación, para ello haremos el cambio de variable $z(r) = u'(r)$. Entonces tenemos que resolver:

$$z'(r) + \frac{n-1}{r}z(r) = 0.$$

Esto lo haremos por variables separadas:

$$\frac{z'(r)}{z(r)} = \frac{1-n}{r}.$$

Integramos respecto a r, quedando:

$$\ln|z(r)| = \int \frac{z'(r)}{z(r)}dr = \int \frac{1-n}{r}dr = (1-n)\ln r = \ln r^{1-n}.$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos $u'(r) = r^{1-n}$ y volviendo a integrar respecto a r:

$$u(r) = \int r^{1-n}dr = \begin{cases} \ln r, & n = 2 \\ \frac{r^{2-n}}{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

Estas funciones son soluciones radiales de la ecuación de Laplace, también cualquier función constante será solución.

Definición 2.1.1. *La solución fundamental de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ se define:*

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \ln\frac{1}{\|x-y\|}, & n = 2 \\ \frac{1}{n-2}\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases},$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$.

El siguiente resultado proporciona la fórmula de Green para Δ:

Teorema 2.1.4. *Sea Ω un dominio (abierto y conexo) acotado y regular de $\mathbb{R}^n$; notaremos por $n(s)$ el vector normal exterior a Ω en cada punto $s \in \partial\Omega$. Entonces:*

(i) Si $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, se cumple:

$$\int_\Omega [u(x)\Delta v(x) + < \nabla u(x), \nabla v(x) >]\, dx = \int_{\partial\Omega} u(s)\frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} ds.$$

*Que llamaremos **primera fórmula de Green**.*

(ii) Si $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, entonces:

$$\int_\Omega [u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)]\, dx = \int_{\partial\Omega} \left[u(s)\frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} - v(s)\frac{\partial u(s)}{\partial n(s)}\right] ds.$$

*Que llamaremos **segunda fórmula de Green**.*

Demostración. (i) Consideramos el campo vectorial $A : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$A(x) = u(x)\nabla v(x), \ \forall \ x \in \overline{\Omega}$$

Por el Teorema de la divergencia tenemos que:

$$\int_\Omega divA(x)dx = \int_{\partial\Omega} < n(s), A(s) > ds.$$

Teniendo en cuenta que

$$div(A)(x) = u(x)div(\nabla v(x)) + < \nabla u(x), \nabla v(x) >= u(x)\Delta v(x) + < \nabla u(x), \nabla v(x) >,$$

$$< n(s), A(s) >=< n(s), u(s)\nabla v(s) >= u(s) < \nabla v(s), n(s) >= u(s)\frac{\partial v(s)}{\partial n(s)}$$

obtenemos

$$\int_\Omega [u(x)\Delta v(x) + < \nabla u(x), \nabla v(x) >]\, dx = \int_{\partial\Omega} u(s)\frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} ds.$$

(ii) Por la primera fórmula de Green tenemos

$$\int_\Omega [u(x)\Delta v(x) + < \nabla u(x), \nabla v(x) >]\, dx = \int_{\partial\Omega} u(s)\frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} ds$$

intercambiando u por v nos queda

$$\int_\Omega [v(x)\Delta u(x) + < \nabla v(x), \nabla u(x) >]\, dx = \int_{\partial\Omega} v(s)\frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} ds.$$

Restando estas dos fórmulas obtenemos la segunda fórmula de Green:

$$\int_\Omega [u(x)\Delta v(x) + < \nabla u(x), \nabla v(x) > - v(x)\Delta u(x) - < \nabla v(x), \nabla u(x) >]\, dx =$$

$$\int_\Omega [u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)]\, dx = \int_{\partial\Omega} \left[u(s)\frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} - v(s)\frac{\partial u(s)}{\partial n(s)}\right] ds$$

$\square$

El teorema anterior nos servirá para probar la fórmula fundamental integral de Green:

Teorema 2.1.5. *Sea Ω un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ una función armónica en Ω. Entonces se cumple:*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \Phi(x,y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} \right] ds(y)$$

para cualquier $x \in \Omega$, donde ω_n es el área de la esfera $n-1$ dimensional de radio 1 en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, $S^{n-1}(1)$.

Notas previas a la demostración. La esfera $n-1$ dimensional se define de la siguiente forma:

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1\}$$

y como hemos dicho ω_n es el área de S^{n-1}, luego $\omega_n = \int_{S^{n-1}} ds$. Se cumple que $\omega_n = n v_n$ con v_n el volumen de la bola unidad de $\mathbb{R}^n$. El volumen de la bola unidad de $\mathbb{R}^n$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$v_n = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}, \text{ si } n \text{ es par} \\ \\ \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Demostración. Para la demostración del teorema aplicaremos la segunda fórmula de Green.

Sea $x \in \Omega$, aplicando la segunda fórmula de Green, tenemos

$$\int_{\Omega} [u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)] \, dx = \int_{\partial\Omega} \left[u(s) \frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} - v(s) \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} \right] ds,$$

con $v(y) = \Phi(x,y)$ y $u(y)$ en el dominio $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x;\varepsilon)}$ con ε suficientemente pequeño obtenemos:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} [u(y)\Delta v(y)] \, ds(y) - \int_{\Omega_\varepsilon} [v(y)\Delta u(y)] \, ds(y) = 0$$

dado que $\Phi(x,y)$ es simétrica y que fijado $x \in \Omega$ la función $\Phi(x,y)$ es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. Por tanto

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} - \Phi(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \right] ds(y) + \int_{\partial B_{\mathbb{R}^n}(x;\varepsilon)} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} - \Phi(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \right] ds(y)$$

Despejamos y nos queda

$$\int_{\partial B_{\mathbb{R}^n}(x;\varepsilon)} \left[\Phi(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} \right] ds(y) = \int_{\partial\Omega} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} - \Phi(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \right] ds(y)$$

Acabaremos la demostración haciendo tender ε a 0.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_{\mathbb{R}^n}(x;\varepsilon)}\left[\Phi(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)}\right]ds(y) = -\omega_n u(x)$$

donde en $\partial B_{\mathbb{R}^n}(x;\varepsilon)$, $\Phi(x,y)$ es

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} -\ln\varepsilon \ , \text{ si } n = 2 \\ \frac{\varepsilon^{2-n}}{n-2} \ , \text{ si } \ n \geq 3 \end{cases}$$

Veamos que $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} = \varepsilon^{1-n}$.

Para $n = 2$

$$\Phi(x,y) = \ln\left(\frac{1}{||x-y||}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(||x-y||^2\right).$$

Luego, derivando respecto y_k obtenemos

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y_k} = -\frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{-\cancel{2}\,(x_k-y_k)}{||x-y||^2}\right] = \frac{x_k-y_k}{||x-y||^2} = \frac{x_k-y_k}{\varepsilon^2}.$$

Por tanto,

$$\nabla_y\Phi(x,y) = \left(\frac{x_1-y_1}{\varepsilon^2},\frac{x_2-y_2}{\varepsilon^2}\right) = \frac{x-y}{\varepsilon^2}$$

Y tenemos, entonces

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} =< \nabla_y\Phi(x,y), n(y) >=< \nabla_y\Phi(x,y), \frac{x-y}{\varepsilon} >= \frac{1}{\varepsilon^2} < x-y, \frac{x-y}{\varepsilon} >= \frac{1}{\varepsilon^3}||x-y||^2 = \frac{1}{\varepsilon}$$

Para $n \geq 3$

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{n-2}\frac{1}{||x-y||^{n-2}} = \frac{1}{n-2}\frac{1}{\left((x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Derivando respecto de y_k obtenemos

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y_k} = \frac{1}{n-2}\frac{\frac{n-2}{2}\left[2\,(x_k-y_k)\right)\left((x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2\right)^{\frac{n-4}{2}}}{||x-y||^{2(n-2)}} = \frac{x_k-y_k}{||x-y||^n} = \frac{x_k-y_k}{\varepsilon^n}.$$

Luego,

$$\nabla_y\Phi(x,y) = \frac{x-y}{\varepsilon^n}$$

Y finalmente llegamos a

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} =< \nabla_y\Phi(x,y), n(y) >= \frac{1}{\varepsilon^n} < x-y, \frac{x-y}{\varepsilon} >= \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\varepsilon^2 = \varepsilon^{1-n} = \varepsilon^{n-1}.$$

Por tanto,

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \left[\Phi(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} \right] ds(y)$$

□

La fórmula del teorema anterior nos permitirá demostrar la propiedad del valor medio para funciones armónicas en $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.1.6 (Propiedad del valor medio para funciones armónicas)**.** *Sean $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ y u cualquier función armónica en $B_{\mathbb{R}^n}(x;R)$ y continua en $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(x;R)}$. Entonces, se tiene que:*

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{||y-x|| \leq R} u(y) dy = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{||y-x||=R} u(s) ds,$$

donde tenemos que tener en cuenta que $\frac{\omega_n R^n}{n}$ es el volumen de la bola $B_{\mathbb{R}^n}(x;R)$ y $\omega_n R^{n-1}$ es el área de la esfera correspondiente a la bola citada.

Demostración. Considero $\rho \in (0,R)$ y utilizamos el teorema anterior, es decir, la fórmula

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \Phi(x,y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} \right] dy.$$

Por la definición de $\Phi(x,y)$ que hemos dado anteriormente y considerando Ω como $B_{\mathbb{R}^n}(x;\rho)$ nos queda que

$$u(x) = \frac{c}{\omega_n} \int_{||x-y||=\rho} \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} ds + \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{||x-y||=\rho} u(s) ds,$$

donde c es una constante real.

Teniendo en cuenta la segunda fórmula de Green

$$\int_{\Omega} \left[u(x) \Delta v(x) - v(x) \Delta u(x) \right] dx = \int_{\partial\Omega} \left[u(s) \frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} - v(s) \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} \right] ds,$$

que u es armónica y considerando $v(x) = c, \ \forall \ x \in \partial B_{\mathbb{R}^n}(x;\varepsilon)$ obtenemos

$$\int_{||x-y||<\rho} \left[u(s) \cdot 0 - c \cdot \Delta u(s) \right] ds = 0 =$$

$$= \int_{||x-y||=\rho} \left[u(s) \cdot 0 - c \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} \right] ds.$$

Por tanto,

$$\int_{||x-y||=\rho} \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} ds = 0.$$

Esto implica que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{||x-y||=\rho} u(s) ds.$$

Para llegar a que $u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\|y-x\|=R} u(s)ds$ tenemos que hacer tender ρ a R en la igualdad anterior.

Para llegar a que $u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\|x-y\|\leq R} u(y)dy$, integro en la igualdad siguiente respecto a ρ entre 0 y R

$$\omega_n \rho^{n-1} u(x) = \int_{\|x-y\|=\rho} u(s)ds$$

obteniendo

$$\int_0^R \omega_n \rho^{n-1} u(x) d\rho = \omega_n \frac{R^n}{n} u(x) = \int_0^R \left[\int_{\|x-y\|=\rho} u(s)ds \right] d\rho \overset{Fubini}{=} \int_{\|x-y\|\leq R} u(y)dy.$$

Por tanto,

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\|x-y\|\leq R} u(y)dy.$$

□

De esta propiedad se deduce inmediatamente el principio del máximo-mínimo para funciones armónicas.

Teorema 2.1.7 (Principio del máximo-mínimo para funciones armónicas en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u = 0$ en Ω. Entonces se cumple*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Además, si u no es constante, ni el máximo ni el mínimo de u en $\overline{\Omega}$ se alcanzan en Ω.

Demostración. Dado que $u \in C(\overline{\Omega})$ y $\overline{\Omega}$ es compacto existe el máximo de u en $\overline{\Omega}$.
Si existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ vamos a demostrar que $u \equiv u(x_0)$. Para ello vamos a ver que el conjunto $\mathcal{A} = \{x \in \Omega; u(x) = u(x_0)\}$ es cerrado, abierto y no vacío en Ω.

La demostración de que $\mathcal{A}$ es no vacío es trivial ya que $x_0 \in \mathcal{A}$.

Veamos que $\mathcal{A}$ es cerrado: Si $\{x_n\} \subset \mathcal{A}$, $\{x_n\} \longrightarrow y$ tenemos que probar que $y \in \mathcal{A}$.
Dado que $\{x_n\} \subset \mathcal{A}$ se tiene que $u(x_n) = u(x_0)$ y por hipótesis u es continua, por tanto tenemos que

$$u(x_n) = u(x_0) \longrightarrow u(y).$$

Luego por unicidad del límite se cumple que $u(y) = u(x_0)$, y por tanto $y \in \mathcal{A}$. Con esto hemos demostrado que $\mathcal{A}$ es cerrado.

Veamos que $\mathcal{A}$ es abierto, para ello vamos a demostrar que $int(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Por definición tenemos que $int(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Veamos que $\mathcal{A} \subset int(\mathcal{A})$:

Sea $x \in \mathcal{A}$, $u(x) = u(x_0)$. Tomamos $R > 0$ tal que $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(x;R)} = \overline{B_1} \subset \Omega$. Por la propiedad del valor medio se cumple que

$$u(x) = \max_{\overline{\Omega}} u = u(x_0) = \frac{1}{vol(B_1)} \int_{B_1} u(y)dy.$$

Si $u \equiv u(x_0)$ en B_1, entonces $B_{\mathbb{R}^n}(x;R) \subset \mathcal{A}$. Por tanto $x \in int(\mathcal{A})$. Veamos que ocurre esto.
Si existe $y_0 \in B_1$ tal que $u(y_0) < u(x_0)$ por continuidad existe $\overline{B_2} = \overline{B_{\mathbb{R}^n}(y_o;r)} \subset B_{\mathbb{R}^n}(x;R)$ tal que $u(y) < u(x_0),\ \forall y \in B_{\mathbb{R}^n}(y_0;r)$.

Entonces,

$$u(x) = u(x_0) = \frac{1}{vol(B_1)} \int_{B_1} u(y)dy =$$

$$= \frac{1}{vol(B_1)} \left[\int_{B_2} u(y)dy + \int_{B_1 \setminus B_2} u(y)dy \right] < \frac{1}{vol(B_1)} \left[u(x_0)vol(B_2) + u(x_0)vol(B_1 \setminus B_2) \right] =$$

$$= \frac{u(x_0)}{\cancel{vol(B_1)}} \cancel{vol(B_1)} = u(x_0).$$

Por tanto, $u(x_0) < u(x_0)$ y hemos llegado a una contradicción.
En el caso del Principio del Mínimo la demostración es análoga considerando la función $-u$. $\square$

Capítulo 3

Principio del máximo para operadores elípticos. Principio del máximo fuerte (Hopf). Otros principios del máximo

Los resultados de este capítulo podemos verlos en [6].

Nos ocuparemos del operador diferencial de segundo orden de la forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$, para funciones u que sean de clase C^2, definiendo $a_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji})$, podemos observar que $a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1, 2, ..., n$ y escribiremos el operador diferencial anterior como:

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

es decir, no hay pérdida de generalidad en suponer que los coeficientes de dicho operador son simétricos.

Definición 3.0.1. *El operador $\mathcal{L}$ se dice elíptico en el punto $(x_1, x_2, ..., x_n)$ si, y solo si, existe algún número real positivo $\mu(x)$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu(x) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

con $\xi_i,\ i = 1, 2, ...n$ números reales arbitrarios. El operador $\mathcal{L}$ se dice elíptico en un dominio D si es elíptico en cada punto de D. Se dice que es uniformemente elíptico en D si $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu(x) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ se cumple para cada punto de D y si existe una constante positiva μ_0 tal que $\mu(x) \geq \mu_0,\ \forall\ x \in D$.

En lenguaje matricial la condición de elipticidad en un punto x implica que la forma cuadrática asociada a la matriz simétrica

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

es definida positiva para todo punto.

Teorema 3.0.1. *El operador de segundo orden $\mathcal{L}$ es elíptico en un punto $\overline{x}$ si, y solo si, hay una transformación lineal*

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_j, \;\; k = 1, 2, ..., n.$$

tal que en $\overline{x}$, $\mathcal{L}$ es el Laplaciano en las coordenadas z_k.

Debemos destacar que hemos asumido que d_{ki} es una matriz que depende de $\overline{x}$.

El operador

$$(L + h) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + h$$

se dice elíptico en $\overline{x}$ si, y solo si,

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

es elíptico en $\overline{x}$. Es uniformemente elíptico en D si $\mathcal{L}$ es uniformemente elíptico en D. El operador $\mathcal{L}$ se llama parte principal de $L + h$.

3.1. El principio del máximo de E. Hopf

Consideremos la siguiente desigualdad diferencial estricta

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$$

en el dominio D, donde u es una función de clase $C^2(D)$. Suponemos además que L es elíptico en D. Si u tiene un máximo relativo en $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$, sabemos que en tal punto

$$\frac{\partial u}{\partial z_k} = 0 \;\; \text{y} \;\; \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2} \leq 0, \;\; k = 1, 2, ..., n$$

donde las coordenadas $z_k, \;\; k = 1, 2, ..., n$ se han obtenido mediante una transformación lineal de $x_k, \;\; k = 1, 2, ..., n$.

En particular, si $\mathcal{L}$, la parte principal de L es el Laplaciano en las coordenadas z_k entonces $L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$ no se cumple para $\overline{x}$ (sabemos que cuando L es elíptico podemos encontrar una transformación en las coordenadas que hace que $\mathcal{L}$ sea el Laplaciano en $\overline{x}$).

En resumen, si L es elíptico, una función u que satisface la desigualdad dada al inicio de la sección en un dominio D no tendrá máximo en D.

Como en el caso unidimensional, podemos extender el principio del máximo para incluir la posibilidad de que $L[u]$ satisfaga la desigualdad no estricta.

Teorema 3.1.1. *Sea $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisface la desigualdad*

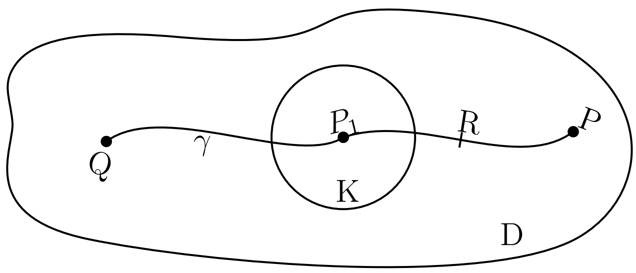
$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

en un dominio D donde L es uniformemente elíptico. Supongamos que los coeficientes a_{ij} y b_i están uniformemente acotados en D. Si u alcanza el máximo M en un punto de D, entonces $u \equiv M$ en D.

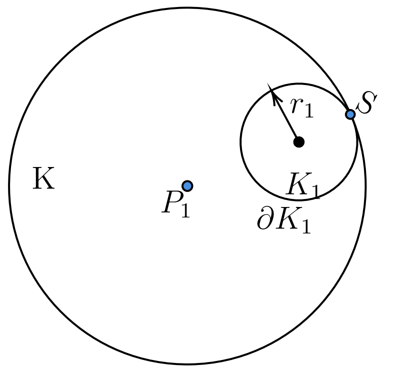
Demostración. Supongamos que $u = M$ en algún punto P de D y que $u < M$ en algún otro punto Q de D. Consideremos un arco contenido en D de Q a P que denotaremos por γ. Sea R el primer punto de γ, desde Q, donde $u = M$. Es decir, $u < M$ en los puntos de γ situados entre Q y R y $u(R) = M$.

Sea $d > 0$ el ínfimo de la distancia entre los puntos de γ y la frontera de D. Consideremos el punto P_1 de γ entre Q y R a distancia $\frac{d}{2}$ del punto R y sea una bola K, con centro P_1 en la que $u < M$.

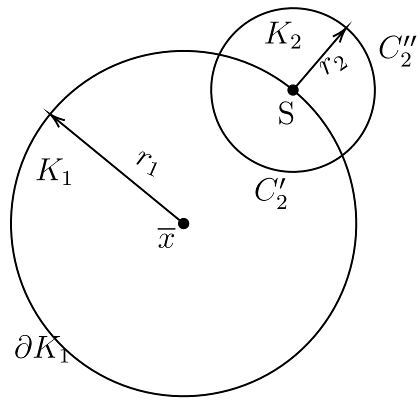
Esta bola tendrá un radio menor que $\frac{d}{2}$ y por tanto, estará contenida en D. Sea S un punto de la frontera de K tal que $u(S) = M$ (por continuidad, debería haber al menos uno).



Construimos una bola K_1 tangente a la frontera de K en S.



Observamos que $u < M$ en K_1 y en su frontera, excepto en S, donde $u = M$. Denotaremos r_1 al radio de K_1.
Construiremos otra bola K_2 de radio $r_2 = \frac{r_1}{2}$ con centro S.



Notaremos C_2' a la parte de la frontera de K_2 dentro de K_1 y en ∂K_1. La parte de ∂K_2 que está en el exterior de ∂K_1 la llamaremos C_2''.

Dado que $u < M$ en C_2' que es compacto, existe una constante positiva ξ tal que

$$u \leq M - \xi \text{ en } C_2'.$$

Por otro lado $u \leq M$ en todos los puntos, luego

$$u \leq M \text{ en } C_2''.$$

Denotaremos $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ al centro de K_1. Y definimos la función auxiliar

$$z(x) = e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_i)^2} - e^{-\alpha r_1}$$

donde α es una constante positiva a determinar. Entonces, es claro que

$$z > 0 \text{ en } K_1$$

$$z = 0 \text{ en } \partial K_1$$

$$z < 0 \text{ fuera de } K_1$$

.

Derivo respecto de x_i y x_j obteniendo

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -2\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_i) e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_i)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = 4\alpha^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_i) \sum_{j=1}^n (x_j - \overline{x}_j) e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_i)^2} - 2\alpha e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_i)^2} =$$

$$= \left[4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n (x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j) - 2\alpha \right] e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_i)^2}.$$

Por tanto,

$$L[z] = e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_i)^2}\left(4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j) - 2\alpha \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} b_i(x_i-\overline{x}_i)\right).$$

Considerando un α suficientemente grande se tiene $L[z] > 0$ en K_2 (veánse los detalles en [6]).

Consideramos ahora la función $w = u + \varepsilon z$, con ε donde

$$0 < \varepsilon < \frac{\xi}{1 - e^{-\alpha r_1^2}}.$$

w tiene un máximo en el interior de la K_2 (véase, de nuevo, [6] para los detalles). Además

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0 \text{ en } K_2.$$

Por tanto, el máximo no se alcanzará en K_2 puesto que L es elíptico, luego hemos llegado a una contradicción. □

Observaciones.

(i) Las hipótesis sobre la elipticidad uniforme del operador L y la acotación de los coeficientes pueden ser más amplias. Por ejemplo, es suficiente con asumir que las cantidades

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)}{\mu(x)} \text{ y } \frac{\sum_{i=1}^{n} |b_i(x)|}{\mu(x)}$$

están acotadas en toda bola cerrada que está en el interior de D.

(ii) Tampoco es necesario que el dominio D esté acotado.

(iii) El principio del mínimo para funciones tales que $L[u] \leq 0$ se obtiene aplicando el principio del máximo a la función $-u$. Por tanto, una solución no constante de la ecuación diferencial elíptica $L[u] = 0$ no puede alcanzar el máximo y el mínimo en un punto interior de D.

Para operadores de la forma $(L + h)$, con restricciones sobre el signo de h, tenemos un resultado análogo al caso unidimensional (véase [6]).

Teorema 3.1.2. *Sea u cumpliendo la desigualdad diferencial*

$$(L + h)[u] \geq 0,$$

con $h \leq 0$, L uniformemente elíptico en D y con los coeficientes de L y la función h acotados. Si u alcanza el máximo $M \geq 0$ en un punto interior de D, entonces $u \equiv M$.

Sea $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ el vector normal unitario exterior en un punto P en la frontera de D. Decimos que el vector $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ apunta hacia fuera si

$$\nu \cdot \eta > 0$$

definimos, si existe, la derivada direccional de u en el punto de la frontera P en la dirección ν como

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv \lim_{x \to P} [\nu \cdot \nabla u(x)] = \lim_{x \to P} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + \nu_n \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

La derivada direccional se dice exterior si ν apunta hacia fuera de D. Entonces si u tiene un máximo en P, tenemos que $\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0$ en P.

Dos derivadas direccionales exteriores importantes son la derivada normal en la que $\nu = n$ y la derivada conormal en la que $\nu_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j$.

Veamos ahora que a no ser que u sea constante, la desigualdad estricta $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ se cumple en P.

Teorema 3.1.3. *Sea u satisfaciendo la desigualdad*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

en un dominio D en el cual L es uniformemente elíptico. Supongamos que $u \leq M$ en D y que $u = M$ en un punto de la frontera P. Supongamos que P está en la frontera de alguna bola K_1 contenida en D. Si u es continua en $D \cup P$ y la derivada direccional $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ existe en P, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0 \text{ en } P$$

a no ser que que $u \equiv M$.

Finalmente tenemos el siguiente teorema

Teorema 3.1.4. *Sea u cumpliendo la desigualdad*

$$(L + h)[u] \geq 0,$$

donde L es un operador como en el teorema anterior, y $h(x) \leq 0$ en D. Supongamos que $u \leq M$ en D, que $u = M$ en un punto frontera P y que $M \geq 0$. Entonces, si P está en la frontera de una bola contenida en D y u es continua en $D \cup P$, cualquier derivada direccional exterior de u en P es positiva a no ser que $u \equiv M$ en D.

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capítulo veremos unicidad de solución, el principio del máximo generalizado y la aproximación de soluciones junto con algunos ejemplos. Todo esto se puede ver en [6].

4.1. Teoremas de unicidad para problemas de contorno

Vamos a empezar estudiando un problema de contorno simple para ecuaciones elípticas. Plantearemos el problema de determinar una función $v(x,y)$ que es C^2 en un dominio acotado y bidimensional D y continua en $D \cup \partial D$, donde ∂D es la frontera de D y satisface la ecuación

$$\Delta v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x,y) \text{ en D}$$

con condición de contorno

$$v(s) = g(s) \text{ en } \partial D.$$

La ecuación $\Delta v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x,y)$ en D es conocida como la ecuación de Poisson. La función f está definida en todo D y la función g está dada en términos de la longitud de arco s y definida en ∂D.

El problema de determinar esta v se conoce como primer problema de contorno. Por el principio del máximo-mínimo, es posible demostrar que si existe una solución del problema anterior, será única. Probaremos, entonces, que a lo sumo hay una solución del problema.

Consideremos $v_1(x,y)$ y $v_2(x,y)$ soluciones de

$$\begin{cases} \Delta v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x,y) \text{ en D} \\ \\ v = g(s) \text{ en } \partial D \end{cases}$$

Defino $u(x,y) = v_1(x,y) - v_2(x,y)$ que satisface

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en D} \\ u = 0 \text{ en } \partial D. \end{cases}$$

Por el principio del máximo sabemos que si u no es constantemente cero, entonces no puede alcanzar el máximo en el interior de D. Sin embargo, el máximo de una función continua en un dominio cerrado y acotado se alcanza. Dado que u es continua en $D \cup \partial D$ y $u = 0$ en ∂D llegamos a la conclusión de que $u \leq 0$ en D. Aplicando el mismo razonamiento para $-u$ obtenemos que $u \geq 0$ en D. Luego, $u(x,y) = v_1(x,y) - v_2(x,y) = 0$ en D, es decir, $v_1(x,y) = v_2(x,y)$. Por tanto la solución será única.

Observación. Es fundamental tomar un dominio D acotado para garantizar la existencia de máximo en la clausura de D.

Ejemplo. Consideremos la función $v(x,y) = e^y \cos(x)$ en

$$D = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$$

que satisface la ecuación de Laplace ya que

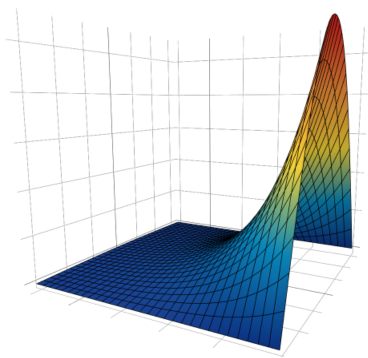
$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = e^y \cos(x) - e^y \cos(x) = 0$$

y como

$$v\left(\frac{-\pi}{2}, y\right) = v\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0, \;\; \forall y \in (-\infty, +\infty)$$

tenemos que $v(x,y)$ se anula en la frontera de D. Además $v(x,y) > 0$ en el interior de D y

$$v(0,y) = e^y \overset{y \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$



Luego, no existe el máximo en $\overline{D}$ y por tanto no puedo aplicar el principio del máximo.

Para obtener un teorema de unicidad para dominios no acotados tendríamos que especificar algunas condiciones sobre v.

La demostración de la unicidad de solución de un problema como el anterior para la ecuación de Laplace en cualquier dimensión es idéntica que en el caso bidimensional hecho anteriormente.

Podemos tratar con problemas más generales. Por ejemplo, para un dominio n-dimensional D con frontera ∂D, consideramos el problema de encontrar una función $v(x) = v(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisface en D la ecuación

$$(L+h)[v] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + h(x)v = f$$

con condiciones de contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha(x)v = g_1 \text{ en } \Gamma_1, \\ v = g_2 \text{ en } \Gamma_2, \end{cases}$$

donde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ es la derivada direccional exterior en cada punto de Γ_1. Suponemos que el operador L es elíptico en D y Γ_1 y Γ_2 son conjuntos disjuntos cuya unión es la frontera de D, ∂D. Γ_1 o Γ_2 puede ser vacío.

Teorema 4.1.1. *Supongamos que v_1 y v_2 satisfacen*

$$\begin{cases} (L+h)[v] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + h(x)v = f \text{ en } D, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha(x)v = g_1 \text{ en } \Gamma_1, \\ v = g_2 \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

en un dominio acotado D y que cada punto de Γ_1 está en la frontera de una bola contenida en D. Si L es uniformemente elíptico, $h(x) \le 0$ y está acotado y $\alpha(x) \ge 0$, entonces $v_1 \equiv v_2$ excepto cuando $h \equiv \alpha \equiv 0$ y Γ_2 es vacío, en cuyo caso $v_1 - v_2$ es constante.

Demostración. Considero $u = v_1 - v_2$ que satisface

$$\begin{cases} (L+h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + h(x)u = 0 \text{ en D}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = 0 \text{ en } \Gamma_1, \\ u = 0 \text{ en } \Gamma_2. \end{cases}$$

Si u fuera positiva en algún punto, entonces el máximo sería positivo. Por el teorema 3.1.2 sabemos que este máximo debe alcanzarse en un punto P de Γ_1. En el caso de que u no sea constante, sabemos por el teorema 3.1.4 que $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ en P, lo que contradice la condición $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = 0$ en Γ_1. Luego $u \le 0$ o es constante en D. Aplicando el mismo argumento a $-u$, observamos que u es constante.
Pero ninguna constante distinta de 0 satisface las condiciones a menos que $h \equiv \alpha \equiv 0$ y Γ_2 sea vacío, en cuyo caso cualquier constante las satisface.

□

Cuando Γ_1 es vacío, el teorema establece un resultado de unicidad del problema de Dirichlet. Si Γ_2 es vacío, $\alpha \equiv 0$ y $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ es la derivada conormal, y llamamos problema de Neumann o segundo problema de contorno al problema

$$\begin{cases} (L+h)[v] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + h(x)v = f \text{ en D}, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = g_1 \text{ en } \Gamma_1, \\ v = g_2 \text{ en } \Gamma_2. \end{cases}$$

El teorema anterior establece la unicidad de solución para este problema (salvo constantes). Si α no es idénticamente nula decimos que el problema

$$\begin{cases} (L+h)[v] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + h(x)v = f \text{ en D}, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha(x)v = g_1 \text{ en } \Gamma_1, \\ v = g_2 \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

es el tercer problema de contorno.

Si Γ_1 y Γ_2 son no vacíos decimos que el problema es de condiciones mixtas de contorno.

Como en el caso de la ecuación de Laplace, un teorema de unicidad para la ecuación

$$(L+h)[v] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + h(x)v = f$$

cuando el dominio es acotado requiere una hipótesis adicional sobre el comportamiento de las soluciones radiales en el infinito.

4.2. Principio del máximo generalizado

La condición $h(x) \leq 0$ es importante para el teorema 3.1.4, no podemos quitarla así como así, por ejemplo, la función

$$u(x,y) = \cos(x)\cos(y)$$

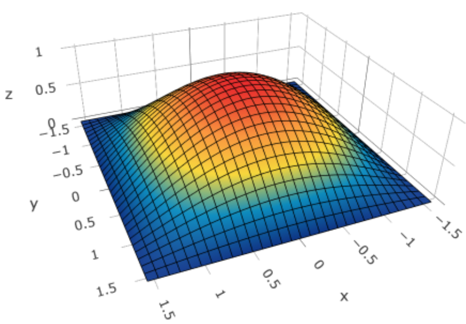
es solución de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2u = 0$$

en

$$D = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

y u cumple $u = 0$ en ∂D, por tanto u alcanza el máximo en un punto interior de D ya que $u(0,0) = 1 > 0$.



Por tanto, no podemos aplicar el teorema 3.1.4, ya que para aplicar este teorema el máximo tenía que estar en la frontera.

Supongamos que $u \in C^2(D)$ verifica

$$(L+h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + h(x)u \geq 0$$

en un dominio D donde L es uniformemente elíptico y donde no suponemos que h es negativo. Sea $w(x)$ una función positiva dada en $D \cup \partial D$ y definimos

$$v(x) = \frac{u(x)}{w(x)}.$$

Despejando, tenemos $u(x) = v(x)w(x)$. Y derivando

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}w + v\frac{\partial w}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}w + \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{w}(L+h)[u] \equiv \frac{1}{w}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}w + \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\right) +$$

$$+\frac{1}{w}\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}w + v\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{w}h(x)vw =$$

$$= \frac{1}{\cancel{w}}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\cancel{w} + \frac{1}{w}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{\cancel{w}}\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\cancel{w} +$$

$$+\frac{v}{w}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial w}{\partial x_i} + h(x)w\right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{w}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{1}{w}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i} + \frac{v}{w}(L+h)[w]$$

Y dado que $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}$ nos queda que

$$\frac{1}{w}(L+h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{w}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i} + b_i\right)\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{1}{w}(L+h)[w]v \geq 0$$

en D. Luego, si w satisface

$$(L+h)[w] \leq 0$$

en D, podemos aplicar el Principio del máximo dado en los teoremas 3.1.2 y 3.1.4 a la función $v(x)$, obteniendo el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1. *Sea $u \in C^2(D)$ satisfaciendo la desigualdad*

$$(L+h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + h(x)u \geq 0$$

en un dominio D donde L es uniformemente elíptico. Si existe una función $w(x)$ tal que

$$w(x) > 0 \text{ en } D \cup \partial D$$

$$(L+h)[w] \leq 0 \text{ en } D$$

entonces $\frac{u(x)}{w(x)}$ no puede alcanzar un máximo no negativo en D a menos que $\frac{u(x)}{w(x)}$ sea constante. Si $\frac{u(x)}{w(x)}$ no es constante y alcanza un máximo no negativo en un punto P de ∂D el cual está en la frontera de una bola en D, entonces

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{u}{w} > 0 \text{ en } P,$$

donde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ es cualquier derivada direccional exterior.

Si existe una función w con dichas propiedades y $u = 0$ en ∂D, entonces por el teorema anterior tenemos unicidad de solución del primer problema de contorno. En efecto, tenemos el siguiente teorema

Teorema 4.2.2. *Supongamos que existe una función $w(x)$ tal que $w(x) > 0$ en $D \cup \partial D$ y $(L+h)[w] \leq 0$ en D con D un dominio acotado. Entonces el problema*

$$\begin{cases} (L+h)[u] = f(x) \text{ en } D \\ u = g(x) \text{ en } \partial D \end{cases}$$

tiene como mucho una solución.

No siempre es posible encontrar una función w satisfaciendo las condiciones pedidas en los teoremas 4.2.1 y 4.2.2. Veamos un método para encontrar una función $w(x)$ satisfaciendo las condiciones pedidas siempre que el dominio D esté contenido entre dos hiperplanos paralelos.

Supongamos que la frontera del dominio D está contenida en una franja $a < x_1 < b$, donde x_1 es la primera coordenada de $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Consideraremos

$$w(x) = 1 - \beta e^{\alpha(x_1 - a)}.$$

con α y β números que escogeremos para que se cumplan las condiciones.

Derivando obtenemos

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = -\beta\alpha e^{\alpha(x_1-a)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = -\beta\alpha^2 e^{\alpha(x_1-a)}$$

Y por tanto,

$$(L+h)[w] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial w}{\partial x_i} + h(x)w = -\beta\left[\alpha^2 a_{11}(x) + \alpha b_1(x) + h(x)\right]e^{\alpha(x_1-a)} + h(x).$$

Por la elipticidad uniforme tenemos que $a_{11}(x) \geq \mu_0$. Supongamos que $h(x)$ está acotado y que $b_1(x)$ está acotado inferiormente, es decir

$$-m < h(x) < M,$$

$$-m < b_1(x),$$

donde m y M son constantes positivas. Tomamos α lo suficientemente grande para que

$$\alpha^2\mu_0 - (\alpha+1)\,m > 0.$$

Y escogemos

$$\beta = \frac{M}{\alpha^2\mu_0 - (\alpha+1)\,m}.$$

Podemos comprobar que con estos α y β

$$(L+h)[w] \leq 0 \text{ en } D \cup \partial D.$$

Pero para asegurarnos de que $w > 0$ en $D \cup \partial D$ se tiene que cumplir

$$\beta e^{\alpha(x_1-a)} < 1.$$

Es decir, se debe satisfacer la desigualdad

$$M < \left[\alpha^2\mu_0 - (\alpha+1)\,m\right]e^{-\alpha(x_1-a)}.$$

Cabe destacar que es posible aumentar el valor de α. Debemos escoger α para que el lado derecho de la desigualdad anterior sea máximo. El mejor valor posible de α está dado por la desigualdad

$$M < \frac{2\mu_0 + \left(4\mu_0^2 + (m^2 + 4m\mu_0)\,(b-a)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(b-a)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\mu_0}\left(m(b-a)+2\mu_0+\left(4\mu^2+\left(m^2+4m\mu_0\right)(b-a)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)}.$$

Podemos ver que la parte derecha de la desigualdad es más grande cuanto más pequeño es $b-a$. Además la condición $M < [\alpha^2\mu_0 - (\alpha+1)\,m]\,e^{-\alpha(x_1-a)}$ es menos restrictiva ya que M se hace más pequeño. El principio del máximo se cumple para $w(x)$ dado por $w(x) = 1 - \beta e^{\alpha(x_1-a)}$ siempre que α y β satisfagan $\beta = \frac{M}{\alpha^2\mu_0-(\alpha+1)m}$ y $M < [\alpha^2\mu_0 - (\alpha+1)\,m]\,e^{-\alpha(x_1-a)}$.

Por lo tanto, dado el operador $L+h$, siempre hay un número $b-a$ tal que si $D \cup \partial D$ está en una franja de ancho $b-a$, el primer problema de contorno tiene una única solución.

Alternativamente, la condición

$$M < \left[\alpha^2\mu_0 - (\alpha+1)\,m\right]e^{-\alpha(x_1-a)}$$

asegura que, para cualquier dominio acotado $D \cup \partial D$, si el máximo M positivo de $h(x)$ es suficientemente pequeño, entonces la solución del primer problema de contorno es única.

La unicidad de solución en otros problemas de contorno pueden probarse también mediante el principio del máximo generalizado. Sea u una solución de

$$(L+h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + h(x)u = 0$$

en un dominio D. Supongamos que u satisface las condiciones de contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = 0 \text{ en } \Gamma_1 \\ u = 0 \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

donde la frontera ∂D está compuesta por dos partes Γ_1 y Γ_2, que $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ es cualquier derivada direccional exterior y que cada punto de Γ_1 está en la frontera de una bola contenida en D. Sea $w(x)$ positiva en $D \cup \partial D$ y definimos

$$v(x) = \frac{u(x)}{w(x)}.$$

Entonces v cumple que

$$\frac{1}{w}(L+h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{w}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i} + b_i\right)\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{1}{w}(L+h)[w]v = 0$$

en D. Además v satisface la condiciones de contorno, esto es

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{1}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x)w\right)v = 0 \text{ en } \Gamma_1, \\ v = 0 \text{ en } \Gamma_2. \end{cases}$$

Por lo visto en el teorema 4.1.1, si $(L+h)[w] \leq 0$ en D y $\frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x)w \geq 0$ en Γ_1, entonces $v \equiv 0$ en D a no ser que $(L+h)[w] \equiv 0$, $\frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x)w \equiv 0$ en Γ_1 y Γ_2 sea vacío, en cuyo caso v será constante.

El razonamiento anterior nos da el siguiente teorema de unicidad.

Teorema 4.2.3. *Supongamos que existe una función $w(x) > 0$ en $D \cup \partial D$ tal que*

$$(L+h)[w] \leq 0 \text{ en } D$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x)w \geq 0 \text{ en } \Gamma_1,$$

donde ∂D está compuesta por dos partes Γ_1 y Γ_2, que cada punto de Γ_1 está en la frontera de una bola contenida en D y que D está acotado. Entonces existe como mucho una solución $u(x)$ del problema

$$\begin{cases} (L+h)[u] = f(x) \text{ en } D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ v = g_2(x) \text{ en } \Gamma_2. \end{cases}$$

a no ser que $(L+h)[w] \equiv 0$, $\frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x)w \equiv 0$ en Γ_1 y Γ_2 sea vacío, en cuyo caso u está determinada por un múltiplo de w.

4.3. Aproximación para las soluciones de problemas de contorno

Sea $u(x)$ una solución de

$$(L+h)[u] = f(x) \text{ en } D$$

satisfaciendo las condiciones de contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + \alpha(x)u(x) = g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ v(x) = g_2(x) \text{ en } \Gamma_2. \end{cases}$$

Supongamos que L es uniformemente elíptico, que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial D$ y que $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ es una derivada direccional exterior en cada punto P de Γ_1 y que además cada punto de Γ_1 está en la frontera de una bola contenida en D un dominio acotado.

Además, suponemos que L, h y D son tales que existe una función $w(x)$ positiva en $D \cup \partial D$ satisfaciendo

$$(L+h)[w] \le 0 \text{ en } D$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x)w \ge 0 \text{ en } \Gamma_1,$$

(por ejemplo, si $h(x) \le 0$ y $\alpha(x) \ge 0$, entonces $w(x) \equiv 1$ satisface las condiciones pedidas).

Si $z_1(x)$ es una función que satisface

$$\begin{cases} (L+h)[z_1] \le f(x) \text{ en } D, \\ \frac{\partial z_1}{\partial \nu} + \alpha(x)z_1 \ge g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ z_1 \ge g_2(x) \text{ en } \Gamma_2, \end{cases}$$

entonces, la función

$$v = \frac{u - z_1}{w}$$

satisface las siguientes tres desigualdades

$$\frac{1}{w}(L+h)[vw] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \left(b_i + \frac{2}{w} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} + (L+h)[w]v \ge 0 \text{ en } D,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{1}{w}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha w \right) v \le 0 \text{ en } \Gamma_1,$$

$$v \le 0 \text{ en } \Gamma_2.$$

Por el teorema 3.1.2 sabemos que si v es no constante y el máximo es positivo entonces se alcanza en un punto de la frontera. Por el teorema 3.1.4 sabemos que v no puede tener un máximo positivo en Γ_1 a no ser que sea constante. Si Γ_2 es vacío, si $\frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha w \equiv 0$ en Γ_1 y si $(L+h)[w] \equiv 0$ en D, entonces v es constante. En los otros casos concluimos que $v \le 0$ de modo que

$$u(x) \leq z_1(x) \text{ en } D.$$

Es decir, una función $z_1(x)$ que satisface

$$\begin{cases} (L+h)[z_1] \leq f(x) \text{ en } D, \\ \frac{\partial z_1}{\partial \nu} + \alpha(x) z_1 \geq g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ z_1 \geq g_2(x) \text{ en } \Gamma_2. \end{cases}$$

nos proporciona una cota superior de $u(x)$.

Para obtener una cota inferior supongamos que tenemos una función $z_2(x)$ que satisface

$$\begin{cases} (L+h)[z_2] \geq f(x) \text{ en } D, \\ \frac{\partial z_2}{\partial \nu} + \alpha(x) z_2 \leq g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ z_2 \leq g_2(x) \text{ en } \Gamma_2. \end{cases}$$

Al definir $v = \frac{z_2 - u}{w}$ y por un razonamiento similar, obtenemos

$$z_2(x) \leq u(x) \text{ en } D.$$

Teorema 4.3.1. *Supongamos que existe una función $w > 0$ en $D \cup \partial D$ tal que*

$$\begin{cases} (L+h)[w] \leq 0 \text{ en } D, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x) w \geq 0 \text{ en } \Gamma_1, \end{cases}$$

donde L es uniformemente elíptico y $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ es una derivada direccional exterior y que no se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x) w \text{ en } \Gamma_1,$$

$$(L+h)[w] \equiv 0 \text{ en } D,$$

$$\Gamma_2 \text{ es vacío.}$$

Si $z_1(x)$ y $z_2(x)$ satisfacen

$$\begin{cases} (L+h)[z_1] \leq f(x) \text{ en } D, \\ \frac{\partial z_1}{\partial \nu} + \alpha(x) z_1 \geq g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ z_1 \geq g_2(x) \text{ en } \Gamma_2, \end{cases} \quad \begin{cases} (L+h)[z_2] \geq f(x) \text{ en } D, \\ \frac{\partial z_2}{\partial \nu} + \alpha(x) z_2 \leq g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ z_2 \leq g_2(x) \text{ en } \Gamma_2, \end{cases}$$

entonces la solución u del problema

$$\begin{cases} (L+h)[u] = f(x) \text{ en } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x) u = g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ v = g_2(x) \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

satisface

$$z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x) \text{ en } D.$$

Observación. Si $\overline{u}$ y u son soluciones de

$$\begin{cases} (L+h)[u] = f(x) \text{ en } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ v = g_2(x) \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

podemos tomar $z_1 = z_2 = \overline{u}$ y aplicando el teorema anterior llegamos a que $\overline{u} \leq u \leq \overline{u}$ y por tanto, $u \equiv \overline{u}$.

Podemos eliminar la función w del teorema anterior. Si tenemos $z_1,\ z_2$ tales que $z_1 \geq z_2$ y que satisfacen

$$\begin{cases} (L+h)[z_1] \leq f(x) \text{ en } D, \\ \frac{\partial z_1}{\partial \nu} + \alpha(x)z_1 \geq g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ z_1 \geq g_2(x) \text{ en } \Gamma_2, \end{cases} \quad \begin{cases} (L+h)[z_2] \geq f(x) \text{ en } D, \\ \frac{\partial z_2}{\partial \nu} + \alpha(x)z_2 \leq g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ z_2 \leq g_2(x) \text{ en } \Gamma_2, \end{cases}$$

entonces podemos construir una función w.
En efecto, en el caso de que $z_1 > z_2$, podemos definir $w = z_1 - z_2$.
Si $q \equiv z_1 - z_2 \geq 0$, entonces q no puede anularse en un punto interior o en Γ_1. Si $q = 0$ en Γ_2, tomamos $w = q + \varepsilon r$ con r solución de

$$\begin{cases} (L+h)[r] = 0 \text{ en } D, \\ \frac{\partial r}{\partial \nu} + \alpha(x)r = 0 \text{ en } \Gamma_1, \\ r = 1 \text{ en } \Gamma_2, \end{cases}$$

y escogemos ε lo suficientemente pequeño para que $w > 0$ en $D \cup \partial D$. La existencia de r se tiene si suponemos que el problema

$$\begin{cases} (L+h)[u] = f(x) \text{ en } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ v = g_2(x) \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

puede resolverse para cualquier condición de contorno $g_2(x)$ continua y arbitraria.

Teorema 4.3.2. *Sean z_1 y z_2 satisfaciendo*

$$\begin{cases} (L+h)[z_1] \leq f(x) \text{ en } D, \\ \frac{\partial z_1}{\partial \nu} + \alpha(x)z_1 \geq g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ z_1 \geq g_2(x) \text{ en } \Gamma_2, \end{cases} \quad \begin{cases} (L+h)[z_2] \geq f(x) \text{ en } D, \\ \frac{\partial z_2}{\partial \nu} + \alpha(x)z_2 \leq g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ z_2 \leq g_2(x) \text{ en } \Gamma_2, \end{cases}$$

de manera que no se de la igualdad en todas las desigualdades. Si el problema

$$\begin{cases} (L+h)[u] = f(x) \text{ en } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ v = g_2(x) \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

puede resolverse para cualquier condición de contorno $g_2(x)$ continua y arbitraria y si u es una solución particular del problema, entonces las cotas

$$z_2 \leq u \leq z_1$$

son válidas si, y solo si, $z_1 \geq z_2$.

Supongamos ahora que existe una función positiva w que satisface

$$\begin{cases} (L+h)[w] \leq -1 \text{ en } D \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x)w \geq 1 \text{ en } \Gamma_1, \\ w \geq 1 \text{ en } \Gamma_2. \end{cases}$$

Si u es solución del problema

$$\begin{cases} (L+h)[u] = f(x) \text{ en } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ u = g_2(x) \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

y definimos

$$A = \max\{\sup_D |f(x)|, \sup_{\Gamma_1} |g_1(x)|, \sup_{\Gamma_2} |g_2(x)|\},$$

entonces por lo visto anteriormente

$$|u(x)| \leq Aw(x).$$

Si $\overline{u}$ es solución de

$$\begin{cases} (L+h)[\overline{u}] = \overline{f}(x) \text{ en } D \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} + \alpha(x)\overline{u} = \overline{g_1}(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ \overline{u} = \overline{g_2}(x) \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

el argumento anterior demuestra que

$$|\overline{u}(x) - u(x)| \leq w(x) \max\{\sup_D |\overline{f}(x) - f(x)|, \sup_{\Gamma_1} |\overline{g_1}(x) - g_1(x)|, \sup_{\Gamma_2} |\overline{g_2}(x) - g_2(x)|\}$$

en D. En particular, si $\overline{f} - f$, $\overline{g_1} - g_1$ y $\overline{g_2} - g_2$ son pequeños $\overline{u} - u$ también será pequeño. Es decir, la solución del problema

$$\begin{cases} (L+h)[u] = f(x) \text{ en } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ u = g_2(x) \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

depende continuamente de los datos. Si el teorema 4.3.1 es válido y

$$\begin{cases} (L+h)[u] = f(x) \text{ en } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ u = g_2(x) \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

puede resolverse para datos continuos arbitrarios la solución del problema

$$\begin{cases} (L+h)[w] = -1 \text{ en } D \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x)w = 1 \text{ en } \Gamma_1, \\ w = 1 \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

satisface

$$\begin{cases} (L+h)[w] = -1 \text{ en } D \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x)w \geq 1 \text{ en } \Gamma_1, \\ w \geq 1 \text{ en } \Gamma_2. \end{cases}$$

Vemos que la solución de

$$\begin{cases} (L+h)[u] = f(x) \text{ en } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = g_1(x) \text{ en } \Gamma_1, \\ u = g_2(x) \text{ en } \Gamma_2 \end{cases}$$

depende continuamente de los datos siempre que se pueda resolver el problema para datos arbitrarios y continuos y se satisface el teorema 4.3.1.

Bibliografía

[1] A.V. Bitsadze: Equations of Mathematical Physics. Mir Publishers, Moskva, 1980.

[2] Antonio Cañada Villar. Apuntes de ecuaciones en derivadas parciales. https://www.ugr.es/~acanada/docencia/matematicas/edp/cuartoedp/capitulo30607.pdf

[3] F. John: Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York - Heidelberg -Berlin, 1980.

[4] Lang, Serge. Calculus of Several Variables, Third edition, Springer, 1987.

[5] Marsden, J. E y Tromba, A. J., Cálculo Vectorial, Pearson Educación, 2004.

[6] Murray H.Protter y Hans F.Weinberger. Maximum Principles in Differential Equations. Springer, 1984.

[7] A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

[8] Hans F.Weinberger. A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods. Dover Publications, INC. 1995.