TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN MATEMÁTICAS

Análisis Real-Análisis Complejo, tan parecidos y tan diferentes.

Autor
Antonio Jesús López Trujillo

Tutor
Antonio Cañada Villar
Departamento de Análisis Matemático

Facultad de Ciencias
Curso Académico 2021-2022

Granada, 15 de junio de 2022.

Tabajo fin de grado. Curso académico 2021-2022

Responsable de tutorización:

Antonio Cañada Villar.

Departamento de Análisis Matemático.

Declaración de originalidad

D. Antonio Jesús López Trujillo

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2021-2022, es original, entendida esta, en el sentido de que no se ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 15 de junio de 2022

Fdo: Antonio Jesús López Trujillo

Índice general

Introducción **VII**

Summary **XI**

1 Estudio comparativo del origen de los números reales y números complejos **15**

1.1 Origen y nacimiento de los números complejos 15
Girolamo Cardano 15
Contribuciones de Cardano a la ecuación cúbica 15
Bombelli: el nacimiento de los números complejos 20
1.2 Los números reales: construcción y formalización. 22
Ideas de Weierstrass 22
Ideas de Dedekind 23
Heine 24
Cantor 24
1.3 Conclusión 25

2 Estudio comparativo de diversos conceptos y resultados importantes del Análisis Real y Análisis Complejo **27**

2.1 Introducción básica a los números complejos. Primeras diferencias y similitudes 27
Construcción formal de los números complejos 27
Nociones básicas sobre complejos 28
Orden, la primera gran diferencia 29
Topología 30
Funciones clásicas del análisis 30
2.2 Diferenciabilidad, tan parecidos y tan diferentes 38
Definiciones y primeras diferencias 38
Holomorfía y Analiticidad 43
2.3 Otros resultados importantes 59

3 Ecuaciones diferenciales lineales complejas de variable compleja. Núcleo de la ecuación del calor **63**

3.1 Ecuaciones diferenciales lineales complejas de variable compleja . . 63
Introducción y algunos resultados en ecuaciones lineales reales de variable real 63
Otra gran diferencia entre el análisis real y el análisis complejo . . . 65

3.2 Núcleo de la ecuación del calor 69
Definiciones y conocimientos previos 69
Deducción del núcleo de la ecuación del calor 71

Bibliografía

Introducción

En este Trabajo de fin de grado, con título *Análisis Real-Análisis Complejo, tan parecidos y tan diferentes*, se han tratado, de acuerdo con la propuesta original, los objetivos siguientes:

- Estudiar, de forma comparativa, el origen de los números reales y los números complejos.
- Estudiar y comparar diversos conceptos y resultados importantes del Análisis Real y Análisis Complejo.
- Más utilidades del Análisis Complejo: ecuaciones diferenciales lineales complejas de variable compleja y el núcleo de la ecuación del calor.

Con este propósito, se han realizado tres capítulos, uno para cada objetivo:

- Estudio comparativo del origen de los números reales y números complejos.
- Estudio comparativo de diversos conceptos y resultados importantes del Análisis Real y Análisis Complejo.
- Ecuaciones diferenciales lineales complejas de variable compleja y el núcleo de la ecuación del calor.

Vamos a dar a continuación una breve descripción de lo que se trata en cada capítulo.

Capítulo 1. Estudio comparativo del origen de los números reales y números complejos.

En este capítulo comenzamos dando un paseo por el estudio pionero de las ecuaciones cúbicas, con las contribuciones de Girolamo Cardano en este ámbito. Quizás lo más conocido sea su fórmula para resolver la ecuación cúbica (reducida), aunque como veremos, basta para resolver cualquier ecuación cúbica. Pasar por este campo no es, para nada, algo sin importancia, y es que es en el problema de resolver las ecuaciones cúbicas donde surgen los números complejos. Bombelli se percató de que, incluso en los casos en los que Cardano pensaba que su fórmula carecía de sentido, esta seguía teniéndolo. Fue el primero en dar una forma de manipular estos "nuevos números" y dio métodos para realizar las operaciones básicas con ellos, situándose aquí como ya hemos dicho el origen de los números complejos.
Posteriormente, pasamos a los números reales. Estos números se estuvieron usando mucho tiempo sin tener una idea rigurosa de qué eran realmente. La necesidad de rigor en la matemática hizo que grandes matemáticos intentasen dar una definición

rigurosa de qué eran los números reales. Weierstrass, con su afán por las series, los definió como "sumas infinitas" de otros números (los racionales), y fue el primero en preocuparse por el tema de la "convergencia" . A continuación vemos la construcción de Dedekind y sus conocidos "cortes", así como su representación en la recta real. Quizás esta versión sea de las más conocidas en la actualidad. Por último, vemos las aportaciones de Heine y Cantor. Cantor introdujo los números reales a partir de un tipo de sucesiones (sucesiones de Cauchy en la actualidad) de números racionales, dándoles estructura de cuerpo.
Para este primer capítulo ha sido fundamental la bibliografía indicada, [1] y [2].

Nos gustaría hacer un énfasis especial en aquellos aspectos donde el Análisis Real y el Análisis Complejo caminan juntos, tratando de aportar soluciones a los problemas planteados, y también en aquellos otros donde los "caminos son diferentes" (aunque, al final, muchas veces se descubra que, en realidad, son complementarios). Esto es lo que tratamos de ver con los siguientes capítulos.

Capítulo 2. Estudio comparativo de diversos conceptos y resultados importantes del Análisis Real y Análisis Complejo.

Continuamos comparando diversos conceptos y resultados del análisis real y el análisis complejo. Comenzamos desde las definiciones y conceptos más básicos donde aparecen las primeras diferencias entre ambos, como la no existencia de un orden adecuado en $\mathbb{C}$ que lo haga ser un cuerpo totalmente ordenado, como lo es $\mathbb{R}$. Posteriormente pasamos a ver que, topológicamente, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ son idénticos, y las consecuencias analíticas que esto conlleva. Para terminar esta primera parte del capítulo, estudiamos algunas funciones clásicas del análisis desde ambos campos, el real y el complejo.
El núcleo del capítulo se basa en la que es quizás la diferencia más significativa, aunque pueda parecer de partida lo contrario: la diferenciabilidad. Veremos cómo en el análisis complejo, ser diferenciable es equivalente a ser analítica y a ser infinitamente diferenciable, equivalencias que no se dan en los reales. Por último, veremos otros resultados importantes del análisis complejo que no tienen una versión similar en los reales, como por ejemplo el Teorema Fundamental del Álgebra o el Principio de Identidad, entre otros.
Para el desarrollo de todo este capítulo han sido importantes los apuntes proporcionados por mi tutor Antonio Cañada, [5], así como [8] y [9].

Capítulo 3. Ecuaciones diferenciales lineales complejas de variable compleja y el núcleo de la ecuación del calor.

En el tercer y último capítulo de este trabajo pretendemos ver algunas de las aplicaciones que tiene la variable compleja a ecuaciones diferenciales. Comenzamos el capítulo con otra gran diferencia entre el análisis real y el complejo, en el ámbito de

las ecuaciones diferenciales lineales. Esta es, que la dimensión del espacio vectorial de soluciones de una ecuación diferencial lineal real de variable real y homogénea, es igual al orden de la ecuación solo con que los coeficientes sean continuos, pero en el caso de tratarse de ecuaciones complejas de variable compleja, se necesita más, que sean analíticos.
Para acabar, deduciremos el núcleo de la ecuación del calor, en dimensión 1, gracias a la demostración de una fórmula que relaciona una integral compleja con una real. Para ello utilizaremos un resultado esencial en análisis complejo, el Teorema de Cauchy. Cabe mencionar que, el estudio del núcleo de la ecuación del calor es una muy buena forma de introducir la transformada de Fourier de una función, aunque no nos meteremos mucho en este tema.
En este capítulo se han utilizado, principalmente, las referencias [14] y [15].

Con la realización de estos tres capítulos creo que se han conseguido los objetivos propuestos de forma satisfactoria, siempre con la ayuda y la bibliografía proporcionada por mi tutor, Antonio Cañada.

Summary

In this final degree project, entitled *Real Analysis-Complex Analysis, so similar and yet so different*, we have considered the following objectives:

- A comparative study about the origin of real numbers and complex numbers.
- To study and to compare several important concepts and results of Real Analysis and Complex Analysis.
- Additional utilities of Complex Analysis: complex linear differential equations of complex variable and the kernel of the heat equation.

To achieve these objectives it has been made three chapters, one per objective. We are now going to give a brief description of each chapter.

Chapter 1. A comparative study about the origin of real numbers and complex numbers.

We start this chapter walking through the early study of cubic equations, with Girolamo Cardano's contributions to this topic. Perhaps, what is most known is his formula to solve the depressed cubic equation, althoug as we will see, it is enough to solve any cubic equation. It is here, solving the cubic equation, where we find the first appearance of complex numbers. Bombelli noted that, even when Cardano thought his formula were meaningless, it goes perfectly working. He was a pioneer in manipulating these "new numbers", and he gave techniques for doing the basic operations. As we have said, it is considered the beginning of complex numbers as we know them today.
After that, we continue with real numbers. These numbers were being used many time without having a solid idea about what they really are. The duty of rigor in mathematics got many mathematicians' attention to this topic, and they gave some rigorous definition about what real numbers could be. On the one hand, Weierstrass, and his interest for series, defined real numbers as infinite sums of other known numbers (rational in this case), and he was the first one who was concerned about convergence problem of such series. After, We go on Dedekind's construction and his cuts. His version is probably the most known one, especially the real numbers line representation. On the other hand, we are goin to have a look of Heine and Cantor's version. Cantor introduced real numbers as a particular kind of rational sequences (Cauchy sequences), and built them an appropiate field structure.
In this chapter we mainly use the references [1] and [2].

We would like to emphasise those aspects in which Real Analysis and Complex Analysis walk in the same direction, providing solutions together to many problems, and also those ones where they aparently walk in different directions, although we find out later that both complement each other. In second and third chapter we apreciate that.

Chapter 2. A comparative study on some important concepts and results of real and complex analysis.

We begin this chapter giving basic definitions and concepts about the complex numbers. It is here where we find the first differences among the real and the complex analysis. For instance, the non-existence of an appropriate order that makes $\mathbb{C}$ be a ordered field, contrary to what happens in $\mathbb{R}$. However, we find out that $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{C}$ are topologically identical, and we comment the analytic consequences of this fact. We finish this first part of the chapter studying classic functions of analysis from both points of view, real a complex.
The main part of the chapter is based on what we think is the most significative difference, although in a first look it could seem they are identical: the differentiability. We will see in this chapter that, if we talk about complex functions of complex variable, the property of being differenciable, being infinitely differenciable and being analytic are equivalent, but this is not true in real analysis. Eventually, we will see some important complex results for which there are not a similar version in real world, such as Fundamental theorem of Algebra or the Identity Principle for analytic functions.
In this chapter we have used [5], as well as [8] and [9].

Chapter 3. Complex linear differential equation of complex variable and the kernel of the heat equation.

In the last chapter of this project we describe some applications of complex analysis to differential equations. We begin with another remarkable difference between Real and Complex Analysis, now in the differential equations field. This is, the following: the vector space of the solutions' dimension of a homogeneous real linear differential equation of real variable is equal to the equation's order only with the hypothesis that the coefficients are continuous. In complex field, we need more restrictive conditions. In fact, we need the coefficients be analytics.
Finally, we will deduce the one-dimensional kernel of the heat equation, using a interesting formula which relates a complex integral with a real one. To achieve this, we will use a fundamental theorem in Complex Analysis, the Cauchy's Theorem. We also have to say that the study of the kernel of the heat equation is one of the best ways to introduce Fourier transform. We mainly use [14] and [15] as references in this chapter.

In my opinion the proposed objectives have been successfully reached with the elaboration of each chapter, always bearing in mind the help and bibliography provided by my tutor Antonio Cañada.

Capítulo 1
Estudio comparativo del origen de los números reales y números complejos

En este capítulo vamos a ver como aparecieron los números complejos en la historia de la matemática, así como varias versiones de las primeras definiciones rigurosas de los números reales. Se emplearán [1], [2], [3] y [4].

1.1. Origen y nacimiento de los números complejos

Ciertamente la primera aparición escrita de lo que hoy consideraríamos un número complejo data de aproximadamente la mitad del siglo I, en la obra *Stereometría* de Herón de Alejandría. En ella aparece la operación $\sqrt{81-144}$ aunque se toma como $\sqrt{144-81}$, no se sabe si por error de Herón o de la transcripción. A lo largo de los siguientes siglos siguen apareciendo problemas en los que surgen raíces de cantidades negativas, pero la única explicación lógica que se da es que una cantidad negativa no es un cuadrado luego no puede existir su raíz.

Girolamo Cardano

Girolamo Cardano (1501-1576) planteó en su obra *Ars Magna* expresar el número 10 como la suma de dos números cuyo producto fuese 40. En la notación actual esto sería $x(10-x)=40$, que tiene las soluciones $5+\sqrt{-15}$ y $5-\sqrt{-15}$. Pero no solo esto, se atrevió a probar que su producto era ciertamente 40, literalmente dijo (adaptado a nuestra notación):

"$5+\sqrt{-15}$ *por* $5-\sqrt{-15}$*, despreciando los productos cruzados, da* $25-(-15)$*, qué es* 15*, luego el producto es 40.* "

Es decir Cardano fue el primero en utilizar y hacer cálculos con raíces cuadradas de números negativos. Hay que notar que esto no fue lo que motivó la aparición de los números complejos, pues las ecuaciones cuadráticas ya llevaban tiempo bien asentadas. Pero antes de esto vamos a hablar de las importantes contribuciones de Cardano a este ámbito.

Contribuciones de Cardano a la ecuación cúbica

Antes de continuar, fijaremos alguna notación.

Definición.

- Llamaremos **ecuación cúbica reducida** a la ecuación

$$x^3 + px = q, \ p, q \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

- Llamaremos **ecuación cúbica general** a

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0, \ b, c, d \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

El problema de encontrar una solución general para estas ecuaciones ya estaba presente en el siglo XI, cuando el matemático Omar Jayam (1048-1131) identificó 19 tipos de ecuaciones cúbicas según sus coeficientes. Consiguió resolver de forma numérica algunas de ellas, considerando intersecciones de hipérbolas y circunferencias, pero no llegó a obtener una fórmula general para dichas soluciones.
Aproximadamente 400 años después, Scipione del Ferro (1465-1526), halló un método para resolver un tipo de ecuaciones cúbicas reducidas. Mantuvo en secreto que conocía dicha solución hasta que, antes de morir, se la dijo a su discípulo Antonio Maria del Fiore. La ambición de Fiore hizo que desafiara al matemático Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557). Este desafío constaba de presentar 30 problemas al rival. Fiore le presentó 30 ecuaciones cúbicas reducidas de las que sabía resolver, ya que pensaba que él era el único que sabía resolverlas. Sin embargo, Tartaglia, poco antes del desafío, se enteró de que Fiore conocía como resolver algunas cúbicas reducidas, así que se puso a tratar de encontrar una solución y consiguió resolver la ecuación cúbica reducida de cualquier tipo. Esto le hizo ganar el desafío y mantener su reputación.
Girolamo Cardano se enteró de que Tartaglia conocía la forma de resolver las ecuaciones cúbicas reducidas, y tras mucho insistir consiguió que este le contase su secreto con la condición de que siguiese siendo un secreto. Tartaglia le enseñó una formula, pero no le dió demostración alguna, así que Cardano la demostró por su cuenta. Vamos a enunciar y demostrar esta bonita fórmula en términos y notación actuales, pues los empleados por el propio Cardano son bastantes tediosos.

Proposición 1.1.1 (Fórmula de Tartaglia-Cardano-Del Ferro)**.** *Dada la ecuación cúbica reducida $x^3 + px = q$ con p, q reales positivos, entonces*

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

es una solución. De hecho, es la única solución real de esta ecuación.

Demostración.
Ver que solo tiene una solución real es sencillo, pues si se considera la función definida en todo $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + px - q$ tiene derivada estrictamente positiva. De esta forma

es estrictamente creciente, y por Bolzano como tiene un cambio de signo tiene una única raíz en $\mathbb{R}$.
Vamos a buscar una solución del tipo $x = y - z$, de forma que

$$x^3 = (y-z)^3 = y^3 - z^3 - 3y^2z + 3yz^2 = y^3 - z^3 + 3yz(z-y).$$

Comparando las dos expresiones obtenidas para x^3 tenemos

$$x^3 = -px + q \qquad (y-z)^3 = y^3 - z^3 + 3yz(z-y).$$

Teniendo en cuenta que $x = y - z$, entonces debe darse que

$$p = 3yz, \;\; q = y^3 - z^3. \tag{1.3}$$

Nótese que $y, z \neq 0$ pues $p > 0$. Como $z = \frac{p}{3y}$ sustituimos y obtenemos

$$q = y^3 - \frac{p^3}{3^3y^3} \Rightarrow y^6 - qy^3 - \frac{p^3}{3^3} = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{t=y^3} t^2 - qt - \frac{p^3}{3^3} = 0.$$

Resolviendo esta ecuación llegamos a

$$y^3 = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{3^3}}}{2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{3^3}},$$

y de forma totalmente análoga, $y = \frac{p}{3z}$ y sustituyendo:

$$q = \frac{p^3}{3^3z^3} - z^3 \Rightarrow z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{3^3} = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{t=z^3} t^2 + qz - \frac{p^3}{3^3} = 0$$

$$\Rightarrow z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{3^3}}.$$

Para salvar la ambigüedad del signo, resultante de resolver la ecuación de segundo grado en cada caso, nos fijamos en 1.3, $q = y^3 - z^3$, y para que se cumpla esto deben cogerse ambas del mismo signo, o positivas o negativas. Nótese que da igual cual se escoja, pues el resultado al hacer $x = y - z$ es el mismo. Así tomamos el signo positivo en ambas y llegamos a que

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Además como $p, q > 0$ entonces $x \in \mathbb{R}$. ■

Observación. Lo que Cardano realmente probó fue que si existían y, z verificando 1.3 entonces $y - z = x$. Hay que notar que en nuestro caso son implicacciones reversibles.

Al contrario que sus antecesores, Cardano resolvió la ecuación cúbica general $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, subdividió el problema en distintos subcasos y para cada uno dio una demostración geométrica. Nosotros recogemos todo esto en un mismo resultado, pero antes probaremos un lema que nos será de utilidad.

Lema 1.1.2. *Dada la ecuación cúbica reducida 1.1, $x^3+px = q$, con $p < 0$, entonces:*

$$\textit{tiene 3 raíces reales} \Leftrightarrow |q| \leq 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ Definimos la función f en todo $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3 + px - q$. Si calculamos sus puntos críticos llegamos a:

$$f'(x) = 3x^2 + p = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Luego en $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ tiene un máximo (relativo) y en $x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ un mínimo (relativo). Llamemos $M = f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - q$ y $m = f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = -2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - q$. Si la ecuación tiene 3 raíces, puede darse que M o m fuesen 0, en ese caso se verifica que $|q| = 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$. Supongamos $M, m \neq 0$, entonces para que tenga 3 raíces debe darse que $M > 0$ y $m < 0$, pues en otro caso f solo tendría un cambio de signo y por tanto solo una raíz real. Entonces:

$$\left.\begin{array}{lllll} M & > & 0 & \Rightarrow & 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} > q \\ m & < & 0 & \Rightarrow & -2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} < q \end{array}\right\} \Leftrightarrow |q| < 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que $|q| \leq 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$. Siguiendo la notación de antes, si $q = 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ entonces $M = 0$ y $m < 0$. Como $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = M = 0$ y por construcción $f'\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = 0,\ f''\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \neq 0$ se tiene que f tiene un cero doble en $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Ahora como tiene un máximo (relativo) en dicho punto y $m < 0$, Bolzano nos asegura que tiene otro cero mayor que dónde se localiza el mínimo. De forma análoga si $q = -2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$. Ahora como

$$\left.\begin{array}{lll} M & > & 0 \\ m & < & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow |q| < 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

Bolzano nos asegura que tiene una raíz más pequeña que $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$, otra comprendida entre $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$ y $\sqrt{-\frac{p}{3}}$, y otra más grande que $\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Por tanto, tiene 3 raíces reales, como queríamos. ■

Proposición 1.1.3. *Dada la ecuación 1.1 se tiene que:*

i) Si $q < 0$ y $p > 0$ la proposición 1.1.1 sigue siendo válida.

ii) Si $p < 0$ y $q \neq 0$ la solución dada en la proposición 1.1.1 sigue siendo solución real, pero ya no se puede garantizar unicidad de solución real.

iii) Toda cúbica general 1.2 se puede expresar como una cúbica reducida 1.1.

Demostración.

i) Si nos fijamos en la demostración de 1.1.1 no se necesita que q sea positivo, basta con que sea no nulo.

ii) De nuevo podríamos seguir la demostración de la fórmula de Cardano con $p < 0$ para llegar a que

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

es una solución de la ecuación. Ahora bien, tenemos dos preguntas. En primer lugar si esta solución es real y esto pasa por estudiar el término $\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$. Si $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$, que ocurre si y solo si $|q| \geq 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, entonces no hay duda de que es real. Ahora si $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ podría pensarse que la solución sería compleja, pero $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0 \Leftrightarrow |q| < 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ y por el lema 1.1.2 todas las raíces son reales.
En segundo lugar, la unicidad. En este caso de nuevo por el lema 1.1.2 si $|q| \leq 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ tenemos que hay tres soluciones reales y perdemos la unicidad. Solo tendríamos una única raíz real si $|q| > 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.

iii) Partimos de la ecuación $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ y hacemos el cambio de variable $x = y - \frac{b}{3}$. La idea de este cambio viene de que como la suma de las raíces de una ecuación cúbica es el opuesto del coeficiente que acompaña al término cuádrático, (hecho ya conocido por Cardano), entonces y debe de satisfacer una ecuación con coeficente del término cuadrático nulo. En efecto:

$$\left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 - 3y^2\frac{b}{3} + 3y\frac{b^2}{3^2} - \frac{b^3}{3^3} + by^2 + \frac{b^3}{3^2} - 2y\frac{b^2}{3} + cy - cb + d =$$
$$= y^3 + \left(\frac{3c - b^2}{3}\right)y + \frac{2b^3 - 9bc + 27d}{27} = 0.$$

Entonces tomando $p = \frac{3c-b^2}{3}$ y $q = \frac{-2b^3+9bc-27d}{27}$ se tiene que $y^3 + py = q$ es una ecuación del tipo buscado.

■

Observación.

1. Las proposiciones 1.1.1 y 1.1.3 proporcionan una solución real de cualquier ecuación cúbica. Una vez conocida una raíz, digamos α, entonces podemos expresar la ecuación como $(x-\alpha)(x^2+\beta x+\gamma)$ y resolver la ecuación cuadrática resultante. Todo esto era conocido por Cardano, aunque él no era consciente de todas las distinciones de soluciones (reales o no) que hemos hecho aquí.

2. En el caso de que $\frac{q^2}{2^2}+\frac{p^3}{3^3}<0$ en la fórmula de Cardano aparecerían raíces cuadradas de números negativos. Lo sorprendete de esto es que estas soluciones, como hemos probado, siguen siendo reales, pero esto para Cardano y Tartaglia era desconocido, y para ellos en estos casos no tenía sentido considerar su fórmula. Bombelli se dio cuenta de esto, y es aquí donde tienen origen lo que hoy conocemos como números complejos.

Bombelli: el nacimiento de los números complejos

Rafael Bombelli (1526-1572) consiguió probar que la fórmula de Cardano se podía utilizar en cualquier caso, incluso en el caso en el que el propio Cardano decía que no tenía sentido. Como ejemplo consideró la ecuación cúbica $x^3-15x=4$, y dio la solución que proporcionaba la fórmula de Cardano qué es

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{4-125}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{4-125}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}. \quad (1.4)$$

Aquí aparece $\sqrt{-121}$, que podemos expresar como $\sqrt{-121}=\sqrt{(11)^2(-1)}=11\sqrt{-1}$, y dado que $(\sqrt{-1})^2=-1, (\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$, tenemos

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3=8+12\sqrt{-1}+6(\sqrt{-1})^2+(\sqrt{-1})^3=2+11\sqrt{-1},$$

$$\left(2-\sqrt{-1}\right)^3=8-12\sqrt{-1}+6(\sqrt{-1})^2-(\sqrt{-1})^3=2-11\sqrt{-1}.$$

De esta forma, $x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$ es la solución proporcionada. Vamos a ver el proceso que siguió Bombelli para llegar a esto, pues con ello introdujo por primera vez en la historia cómo manipular los números imaginarios.

Primeros pasos en la manipulación de números complejos

Bombelli se percató de que cuando el argumento de la raíz cuadrada de la solución de Cardano era negativo, es decir cuando en una ecuación reducida 1.1 se tiene $(q/2)^2+(p/3)^3<0$, entonces este "número" no podía considerarse ni positivo ni negativo, pero se podía tratar como un número más con ciertas precauciones. El introdujo lo que él llamo *più radice di meno 1* y *men radice di meno 1*, es decir *más raíz de menos 1* y *menos raíz de menos 1.*
Así, Bombelli aceptó e introdujo los números imaginarios, notando *p.di.m.a* a $+ai$ y

m.di.m.a a $-ai$. En lo que sigue en su libro desarrolló la aritmética de los números complejos, comenzando con la forma de sumarlos y restarlos, y con las reglas más básicas de multiplicación de números reales y complejos. En estas reglas explicaba como tratar a *più radice di meno 1*, donde lo peculiar era que se podía tratar como un número real más solo que cumplía además que $(\sqrt{-1})^2 = -1$.
Posteriormente, introdujo lo que hoy conocemos como conjugado de un número complejo. Le dió el nombre de residuo, y era cambiar *p.di.m* por *m.di.m* en su notación. También explicó a base de ejemplos como multiplicar números complejos, siempre con raíces cúbicas de por medio, quizás por provenir dichos números de soluciones de la ecuación cúbica. Como ejemplo dio la multiplicación paso a paso de $\sqrt[3]{3+\sqrt{-5}}$ y $\sqrt[3]{6+\sqrt{-5}}$ que no es más que la forma en lo que lo haríamos en la actualidad.
La siguiente operación que consideró fue la extracción de raíces cúbicas (impulsado seguramente por su necesidad) de un número compuesto que tiene un factor del tipo *più di meno*. El dio un método o regla general para esto, pero sin explicación de por qué era así. A día de hoy sí sabemos el motivo, por lo que lo enunciamos en el siguiente resultado.

Proposición. *Dada una expresión de la forma* $a+\sqrt{-b}$*, con* $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$*, entonces*

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}} = x + \sqrt{-y}$$

implica que x, y *cumplan*

$$x^2 + y = \sqrt[3]{a^2+b} \qquad x^3 - 3xy = a.$$

Demostración.
Buscamos x, y que cumplan $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}} = x + \sqrt{-y}$. Tomando modulo complejo en ambas expresiones tenemos que $|a+\sqrt{-b}| = a^2 + b \Rightarrow |\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}| = \sqrt[3]{a^2+b}$ lo que nos da la primera condición.
Elevando al cubo ambas expresiones

$$a + \sqrt{-b} = x^3 + 3x^2\sqrt{-y} - 3xy + (\sqrt{-y})^3,$$

y tomando partes reales, llegamos a la segunda condición. ■

La idea del método era encontrar por prueba y error x e y cumpliendo esto. Como primer ejemplo calculó el resultado que obtuvo al resolver la cúbica que comentamos al principio, $1.4, \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$. Entonces busca

$$x^2 + y = \sqrt[3]{2^2+121} = 5, \qquad x^3 - 3xy = 2,$$

y razona de la siguiente forma. Buscamos un número cuyo cuadrado es menor que 5 (x) y cuyo cubo es mayor que 2. Una buena elección es $x = 2$, y entonces necesariamente $y = 1$, cumplen las condiciones. Entonces el resultado buscado es

$2+\sqrt{-1}$. De forma similar se puede razonar que el otro sumando,$-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$, es justo el residuo (conjugado) de este, $2-\sqrt{-1}$, y sumando se llega a 4 , la solución anunciada.
Bombelli también explicó como tratar con las divisiones con números complejos, de nuevo con ejemplos. Realmente estos ejemplos eran con raíces cúbicas de por medio, como en la multiplicación, pero siempre elevaba numerador y denominador al cubo, y después multiplicaba por el conjugado del denominador, como se sigue haciendo a día de hoy.
Sin duda, el mayor logro de Bombelli fue la resolución de la ecuación cúbica y la introducción de reglas básicas de aritmética compleja, aunque ni tan siquiera supiera con exactitud qué era eso de los números imaginarios.

1.2. Los números reales: construcción y formalización.

Los números reales se vienen usando desde la antigüedad, aunque no se les diese originalmente ese nombre. Ya a partir de la época de Pitágoras y su conocido teorema, aparecieron números "que no se podían expresar como fracciones". No fue hasta Descartes (1596-1650) que surgió el término "número real" que él acuñó entre las dos clases de raíces que podían surgir al resolver una ecuación polinómica.
La mayor parte del análisis del comienzo del siglo XIX se basaba en una idea intuitiva de cantidad que abarcaba todos aquellos objetos medibles para los que los naturales no eran adecuados, sobre todo para distancias. El análisis real era el estudio de cantidades variables y, al menos de forma informal, era compatible con "las cantidades infinitas e infinitesimales". Cauchy ya había definido esto en términos de límites, pero seguía habiendo incertidumbre sobre qué eran las cantidades reales. Hubo varios matemáticos que intentaron zanjar dicha incertidumbre dando una buena definición de lo que podían ser los números reales, unos con más éxito que otros. Nos centraremos en el intento de Weierstrass que no fue muy aceptado, la posterior construcción de Dedekind de forma más explícita, y por último las ideas de Heine y Cantor.

Ideas de Weierstrass

Un concepto que dejó de tener relevancia en el análisis bajo la influencia de Weierstrass (1815-1897) fue el de infinitesimal, que fue olvidado con su creación, en 1860, del concepto de número real. Además esto influyó en la identificación de magnitudes ordinarias con números reales, es decir que el concepto de magnitud podía ser reemplazado por el de número real, y el de una variable de magnitud por una variable real. Al final, esta forma de hacerlo no se adoptó, pero Weierstrass consiguió percatarse de las principales características del problema y de su solución.
Weierstrass tenía claro que debía crearse un "sistema numérico" que atrapase las

propiedades intuitivas de las magnitudes finitas, y que dicho sistema debía crearse fuera de los números racionales. Así, de esta forma, para él la totalidad de los números enteros positivos eran "colecciones" de objetos aparentemente idénticos y los racionales eran colecciones finitas de partes del tipo $1/n$, con n entero. Los irracionales los construyó como sumas infinitas de estos números racionales.
Más que el desarrollo explícito de esta construcción, es interesante resaltar que Weierstrass sabía que lo que acaba de construir debía cumplir una propiedad fundamental, (y que posteriormente lo probó), lo que hoy conocemos como **Teorema de Bolzano-Weierstrass**. Este teorema dice que todo sucesión de números reales acotada admite una sucesión parcial convergente. Este resultado destaca la diferencia fundamental entre las ideas de Cauchy y las de Weierstrass, y es que este fue el primero en evitar asumir que los límites siempre existen, para definir los números reales.
El sistema de Weierstrass era un sistema numérico preciso que podía introducirse en demostraciones y que aportaba rigor. Las matemáticas ya no estuvieron ligadas a la intuición a un nivel de "magnitudes continuas", sino a un nivel más básico de números racionales o incluso de enteros. Estas ideas provocaron alguna controversia en Berlín. Kronecker consideró el principio de Bolzano-Weierstrass como algo obvio, y dijo ser capaz de encontrar funciones tan aparentemente extrañas que cumpliesen todas las hipótesis de Weierstrass pero que no tuviesen cotas superiores. Schwarz y Cantor defendieron a Weierstrass, y aunque Kronecker intentó encontrar estas funciones, fracasó.

Ideas de Dedekind

La construcción (para algunos dudosa) de Weierstrass, fue sustituida por otras versiones, una de ellas de Dedekind (1831-1916). Él terminó la suya en 1858 pero no la publicó hasta 1872 al ver que perdía relevancia tras las versiones de Cantor y Heine.
La construcción de Dedekind se basa en su idea de lo que hoy conocemos como **cortes de Dedekind**. Se dio cuenta de que, dada una unidad de longitud arbitraria, cada racional podía asociarse con un único punto en una recta , pero el recíproco era falso. Es decir, hay longitudes que no se pueden expresar como múltiplos racionales de la unidad de longitud (claro, aquí entran en juego los números irracionales).

Definición (Cortes de Dedekind)**.** Un corte o corte de Dedekind es una división de los números racionales en dos subconjuntos disjuntos y no vacíos, a los que denotaremos L y R, tales que verifican que todo elemento de L es menor que cualquier elemento de R.

Dedekind definió y probó cómo tratar sus cortes como números, y les dio una estructura de cuerpo ordenado para ciertas operaciones. Él distinguió dos tipos de cortes, aquellos para los que existía un racional q en L tal que $l \leq q < r$, $\forall l \in$ L y $\forall r \in$ R (o de forma análoga si q perteneciese a R), y aquellos para los que no existía

ese racional. Como se intuye, identificó a los números racionales con los cortes del primer tipo, mientras que los del segundo los identificó con los irracionales.
Según comentó, el hecho de que hubiese cortes de este segundo tipo era la razón para la incompletitud o discontinuidad de los números racionales. Veremos a continuación un ejemplo de estos cortes.

Ejemplo.
Si consideramos el irracional $\sqrt{3}$, está definido por el corte

$$\mathrm{L} = \left\{q \in \mathbb{Q} : \ q < 0 \ o \ q^2 < 3\right\}, \quad \mathrm{R} = \left\{q \in \mathbb{Q} : \ q > 0 \ y \ q^2 > 3\right\}.$$

Este corte es un corte del segundo tipo, pues no existe ningún racional q en L o en R tal que $l \leq q < r$ (o $l < q \leq r$), $\forall l \in \mathrm{L}$ y $\forall r \in \mathrm{R}$.

Cada corte define un número real, y de hecho Dedekind probó que si se intentaban definir cortes de forma análoga en el conjunto de los números reales, todos serían del primer tipo, por lo que no se podrían obtener nuevos números reiterando el proceso. De esta forma, con su construcción, Dedekind explicó, de una forma más clara a la de Weierstrass, la relación que había entre los números reales y las magnitudes a lo largo de una recta.
Por último cabe mencionar que Dedekind se dio cuenta de que los números reales y las magnitudes de una recta eran biyectivos, entonces forzosamente cualquiera que fuese la forma en la que una recta se dividiese en dos segmentos, debía haber exactamente un único punto que delimitase la separación.

Heine

Heine (1797-1856) apreció que, muchos de los resultados aún no publicados de Weierstrass, permanecerían un poco ambiguos hasta que se aclarara qué eran los números reales. Por ello Heine dio su versión, y definió los números reales como clases de equivalencia de ciertas sucesiones de racionales y probó que reiterando esta construcción no daba pie a más tipos de números. Gracias a su definición consiguió probar que una función continua en un conjunto cerrado y acotado es uniformemente continua.

Cantor

Cantor (1845-1918) tuvo interés, entre otros temas, por las series de Fourier. Llegó al punto de preguntarse por el conjunto global sobre el que trabajaba y dio su propia definición de los números reales. Consideró lo que hoy conocemos como sucesiones de Cauchy de números racionales, es decir sucesiones en las que dos términos cualesquiera distan cantidades infinitamente pequeñas a partir de un término suficientemente avanzado.
Cantor dijo que este tipo de sucesiones tenían un determinado límite, y posteriormente se dispuso a dar una aritmética a estos límites. Primero partió de que dos

sucesiones tendrían el mismo límite si el límite de la sucesión diferencia era 0. Pues bien estos límites eran los números reales. Los dotó de un orden y estableció que dados dos límites cualesquiera podía darse una de las siguientes posibilidades:

- Los dos límites son iguales.
- El primero es más grande que el segundo.
- El primero es más pequeño que el segundo.

Después definió las operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división de estos límites en términos de las sucesiones originales. Para terminar consideró el conjunto de todos estos límites, y construyó un nuevo conjunto de forma análoga a este solo que ahora las sucesiones eran de estos límites en lugar de números racionales. Tras probar que ambos conjuntos eran biyectivos (aunque teóricamente distintos) concluyó que ambos eran equivalentes, y definió el conjunto de los números reales como el conjunto de todos estos límites.

1.3. Conclusión

A lo largo de la historia de las Matemáticas hay algo que se repite: se usan y se hacen cotidianos objetos matemáticos antes de saber qué son realmente. Como hemos visto, esto ocurre tanto con los números reales como con los complejos. Los complejos aparecieron de la necesidad de explicar las raíces de una ecuación cúbica, y se usaron y manipularon desde el comienzo sin saber qué eran. Los números reales de igual forma, se estuvieron usando muchos siglos antes de que se hiciesen la pregunta *¿Qué son los números reales?*, e incluso haciéndosela se dieron muchas versiones y definiciones distintas, aparentemente, pero simplemente eran distintas formas de ver una misma cosa.

Capítulo 2

Estudio comparativo de diversos conceptos y resultados importantes del Análisis Real y Análisis Complejo

En este capítulo vamos a exponer algunas diferencias y parecidos entre los números reales y los números complejos, pero ahora ya no desde el punto de vista histórico sino desde un punto de vista analítico. Esta parte del trabajo está basada principalmente en [5], y también usaremos [6] y [8].

2.1. Introducción básica a los números complejos. Primeras diferencias y similitudes

Antes de meternos a fondo con conceptos que pueden poner de manifiesto sutiles diferencias entre el mundo real y el mundo complejo, es conveniente fijar algunas nociones básicas. Lo referente al mundo real, salvo que se precise más precaución, lo asumiremos conocido, aunque se especificará todo lo que se use en su debido momento.

Construcción formal de los números complejos

Definición 2.1.1. Definimos el conjunto de los **números complejos** y lo denotaremos por $\mathbb{C}$ al conjunto

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ya observamos el primer parecido, y es que vemos que, como conjuntos, *los números complejos y* $\mathbb{R}^2$ *son totalmente idénticos.* Nos disponemos ahora a darle una estructura algebraica a $\mathbb{C}$.

Definición 2.1.2. En $\mathbb{C}$ se definen dos operaciones binarias internas, $+$ y $\cdot$, por

$$\begin{array}{rcccc} + & : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (a+c, b+d) \\ \cdot & : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (ac-bd, ad+bc) \end{array}$$

Observación 2.1.3. El conjunto $\mathbb{C}$ con la operación $+$ aquí definida hace que $(\mathbb{C}, +)$ y $(\mathbb{R}^2, +)$ sean indistinguibles a este nivel. La gran diferencia y lo que hace que el

mundo real y el mundo complejo sean diferentes es la definición de un producto, $\cdot$. Es fácil comprobar que $\mathbb{C}$ con estas operaciones, es decir $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, es un cuerpo.

Observación 2.1.4.

1 En lo que sigue denotaremos $i \equiv (0,1)$ y también haremos la identificación $a \equiv (a,0), \forall a \in \mathbb{R}$. Con esto $i^2 = i \cdot i = (-1,0) = -1$ y llegamos a una relación que ya anunciábamos en el capítulo anterior.

2 Dado que para $b \in \mathbb{R}$, tenemos $bi = (b,0)(0,1) = (0,b)$, podemos entonces identificar cualquier complejo $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ por $z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a + bi$. Esto se conoce como **forma binómica** de un complejo.

Nociones básicas sobre complejos

Definición 2.1.5. Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ definimos:

- La **parte real** de z, $Re(z) = a$, y la **parte imaginaria** de z, $Im(z) = b$.
- Su **conjugado**, y se denota como $\bar{z}$, por $\bar{z} = a - bi$.
- Su **módulo**, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si $z \neq 0$, el **argumento principal**, y se denota por $\arg(z)$, como el único $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \tfrac{a}{|z|}, \qquad \sin(\theta) = \tfrac{b}{|z|}.$$

Definición 2.1.6. Dado cualquier $\theta \in \mathbb{R}$ definimos $e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ por la igualdad

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Esta definición es un caso particular de exponencial compleja que trataremos más adelante pero que mencionamos ya porque nos será de utilidad.

Observación 2.1.7. Gracias a 2.1.5 y 2.1.6 tenemos que para cualquier $z = a + bi \in \mathbb{C} - \{0\}$, podemos expresarlo, si $\theta = \arg(z)$, como $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}$. Esto se conoce como **forma polar** de un complejo. Como el seno y coseno son funciones $2\pi-$periódicas entonces $z = |z|e^{i\theta} = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}, \forall k \in \mathbb{Z}$, y esto jugará un papel importante en la definición de algunas funciones clásicas del análisis. Así diremos que $\theta \in \mathbb{R}$ es un argumento de $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ si $z = |z|e^{i\theta}$, y se puede comprobar que el conjunto de todos los argumentos de un complejo no nulo z es $Arg(z) = \{arg(z) + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Orden, la primera gran diferencia

Para entender mejor esta diferencia es necesario precisar qué es un orden.

Definición 2.1.8.

- Dado un subconjunto no vacío X, una relación R es cualquier subconjunto de $X \times X$. Si $(x, y) \in R$ lo notaremos por xRy.
- Una relación R se dice que es reflexiva si $xRx, \forall x \in X$. De igual forma se dice antisimétrica si xRy e yRx implican que $x = y$. Por último se dirá transitiva si xRy e yRz entonces xRz para cualesquiera $x, y, z \in X$.
- Una relación R es un **orden** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En este caso se suele denotar por $\preccurlyeq$. Si dice que el **orden es total** si $\forall x, y \in X$ se tiene que o bien $x \preccurlyeq y$ o bien $y \preccurlyeq x$. Además diremos que $x \prec y$ si $x \preccurlyeq y$ y $x \neq y$.

Definición 2.1.9. Un cuerpo $\mathbb{K}$ es totalmente ordenado (o simplemente ordenado) si hay definida un relación de orden total $\preccurlyeq$ que es compatible con la suma y el producto, es decir:

- Si $x \preccurlyeq y$ entonces $x + z \preccurlyeq y + z$ para cualquier $z \in \mathbb{K}$.
- Si $x \preccurlyeq y$ entonces $xz \preccurlyeq yz$ para cualquier $z \in \mathbb{K}$ tal que $0 \preccurlyeq z$.

Es bien sabido que el cuerpo de los números reales con el orden usual es un cuerpo totalmente ordenado, en cambio veremos en la siguiente proposición que los números complejos no admiten un orden que los haga ser un cuerpo ordenado.

Proposición 2.1.10. *El cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado.*

Demostración.
Supongamos por reducción al absurdo que $\mathbb{C}$ admite un orden total $\preccurlyeq$ que lo hace ser un cuerpo ordenado. Si $x \in \mathbb{C}$ y $0 \prec x$ entonces de la segunda propiedad de la definición $0 \prec x^2$. Por otro lado si también $x, y \in \mathbb{C}$, con $0 \prec x,\ 0 \prec y$, como $\preccurlyeq$ es un orden total podemos suponer que $x \prec y$, y de la primera propiedad de la definición $0 \prec y \Rightarrow x \prec x + y$. La transitividad del orden nos da como conclusión que $0 \prec x + y$. Es decir, hemos probado que para ser $\mathbb{C}$ un cuerpo ordenado, debe verificar que $0 \prec x^2$ para cualquier $x \in \mathbb{C}$,y que $0 \prec x$,$0 \prec y \Rightarrow 0 \prec x + y$.
Así tenemos $0 \prec i^2 = -1$ y $0 \prec 1^2 = 1$ por lo primero, y de lo segundo $0 \prec -1+1 = 0$, con lo que llegaríamos a que $0 \neq 0$, un absurdo. Por tanto $\mathbb{C}$ no puede ser un cuerpo ordenado. ■

Topología

Definición 2.1.11. Se define la distancia euclídea usual de $\mathbb{R}^2$ como $d_u(x,y) = |x-y|$ para $x, y \in \mathbb{R}^2$, donde $|\cdot|$ denota ahora la norma euclídea determinada por $|(x_1,x_2)| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}, \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Al principio de la sección notamos que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ como conjuntos son iguales, así que podemos extender esta idea a $\mathbb{C}$.

Definición 2.1.12. En $\mathbb{C}$ se define la distancia $d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$ para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, con $|\cdot|$ el módulo complejo.

Cabe destacar que estas distancias aquí definidas son completamente iguales, basta ver a $\mathbb{C}$ como pares ordenados. Así, como $(\mathbb{R}^2, d_u)$ es un espacio métrico, y por tanto topológico con la topología inducida por la distancia, $(\mathbb{C}, d)$ también lo es, y entonces $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ son **topológicamente idénticos**.
Que sean topológicamente indistinguibles tiene consecuencias importantes, porque podemos traspasar cualquier resultado conocido del análisis real, que dependa únicamente de la topología, al análisis complejo. Recogemos algunos de ellos en el siguiente corolario que no demostraremos, se pueden ver estos y otros muchos resultados en [7].

Corolario 2.1.13.

1) *$\mathbb{C}$ es Hausdorff, y por tanto el límite de sucesiones, de existir, es único. Los conjuntos abiertos, cerrados, adherencias, puntos de acumulación etc son los de $\mathbb{R}^2$. Como consecuencia, los conjuntos compactos de $\mathbb{C}$ son los cerrados y acotados.*

2) *Sea $f\colon A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, y sean $u, v\colon A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),\ (x,y) \in A$. Entonces:*
   - *f es continua en $z \in A \Leftrightarrow u, v$ son continuas en z.*
   - *f es continua en $z \in A \Leftrightarrow \forall \{z_n\} \subset A$ sucesión de complejos tal que $\{z_n\} \to z$ se tiene que $\{f(z_n)\} \to f(z)$.*
   - *Si $c = (c_1, c_2) \in A'$ donde A' es la acumulación de A, entonces, en caso de existir,*

$$\lim_{z \to c} f(z) = \lim_{(x,y)\to(c_1,c_2)} u(x,y) + i\left(\lim_{(x,y)\to(c_1,c_2)} v(x,y)\right).$$

Funciones clásicas del análisis

En esta sección vamos a tratar las funciones clásicas del análisis desde el punto de vista real y complejo destacando así sus parecidos y sus diferencias.

Exponencial y logaritmo

Comenzaremos dando una definición rápida de las funciones exponencial y logaritmo reales, asumiendo conocidas ciertas propiedades, para pasar al ámbito complejo y resaltar las diferencias entre ambas.

Definición 2.1.14. Se define la función logaritmo (o logaritmo natural) como $\ln\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Gracias al Teorema Fundamental del Cálculo y algún manejo de análisis real se puede ver que esta función es una función estrictamente creciente en su dominio, y por tanto inyectiva. De igual forma se puede ver sin mucha dificultad que también es sobreyectiva. El número e se define como el **único** real positivo tal que su imagen por la función ln es 1, es decir e es el único tal que $\ln(e) = 1$. Esto da pie a la definición siguiente.

Definición 2.1.15. Se define la exponencial real como la función inversa de ln, y se denota por e^x a la imagen de cada valor $x \in \mathbb{R}$, de forma que $\ln(e^x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $e^{\ln(y)} = y, \ \forall y \in \mathbb{R}^+$.

Vayamos ahora al mundo complejo.

Definición 2.1.16. Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se define la exponencial compleja como $e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.

Observación 2.1.17. Algo importante que remarcar es que, si $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ entonces la definición de la exponencial compleja resulta ser la exponencial real, es decir, **extiende** a la exponencial real.

Proposición 2.1.18 (Diferencias y similitudes de la exponencial)**.**

i) Tanto la real como la compleja verifican que $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, para cualesquiera z_1, z_2 reales o complejos según corresponda.

ii) Ambas son funciones no nulas, es decir, $e^x \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $e^z \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

iii) La exponencial real es inyectiva, pero la compleja no lo es.

Demostración.

i) Que la exponencial real verifica esta propiedad es bien conocido, podría haber duda en el caso complejo. Sean entonces $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$, así:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{a_1}\left(\cos(b_1) + i\sin(b_1)\right)e^{a_2}\left(\cos(b_2) + i\sin(b_2)\right) =$$

$$e^{a_1+a_2}\left(\cos(b_1)\cos(b_2) - \sin(b_1)\sin(b_2) + i\left(\sin(b_1)\cos(b_2) + \cos(b_1)\sin(b_2)\right)\right), (1)$$

y usando las propiedades del seno y coseno real sobre la adición:

$$(1) = e^{a_1+a_2}\left(\cos(b_1+b_2) + i\sin(b_1+b_2)\right) = e^{z_1+z_2}.$$

ii) Por definición, $e^x \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Sea ahora $z = x + iy \in \mathbb{C}$, entonces $e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = 0$, implica, al ser el primer factor no nulo, que $\cos(y) = \sin(y) = 0$, pero esto no es posible pues el coseno y seno reales no se pueden anular simultáneamente. Por tanto $e^z \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

iii) La exponencial real es, de hecho, una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, y por tanto inyectiva. En cambio, la exponencial compleja no lo es. Para esto vamos a probar que

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Con esto se aseguraría la no inyectividad de la misma, ya que estamos probando que hay infinitos valores con la misma imagen. Gracias al apartado i), $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2} = 1$. Llamamos $z = z_1 - z_2 = x + iy$, entonces $e^z = 1 \Leftrightarrow e^x\cos(y) = 1,\ e^x\sin(y) = 0$. De la segunda sacamos que para que se anule el seno y debe ser un múltiplo entero de π, es decir $y = m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$. Con esto, $\cos(y) = \pm 1$, pero como $e^x > 0$ se tiene que $\cos(y) = 1$ y por tanto $y = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Ahora para que $e^x = 1$ necesariamente $x = 0$, y entonces tenemos que $z = z_1 - z_2 = 2k\pi i$ como queríamos.

■

El **logaritmo** complejo requiere un poco más de precaución. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo, $z \neq 0$, y buscamos $w \in \mathbb{C}$ tal que $e^w = z$. Surgen dos preguntas: ¿existe este w?,¿es único? Supongamos que $w = u + iv$, entonces

$$e^w = z \Rightarrow e^{u+iv} = e^u e^{iv} = z,$$

donde hemos usado 2.1.6, y si ahora utilizamos lo explicado en 2.1.7,

$$e^u e^{iv} = |z| e^{i(\arg(z) + 2m\pi)},\ m \in \mathbb{Z},$$

y así obtenemos

$$e^u = |z|, \qquad v = \arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, gracias al logaritmo real llegamos a que $u = \ln|z|$ y $v = \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. A cualquiera de estos w es a los que se le llama **un logaritmo** de z, luego sí existe este número, pero no es único. Normalmente se trabaja con uno de ellos, al que se le llama rama principal del logaritmo.

Definición 2.1.19. Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Entonces se define el logaritmo o logaritmo principal de z como

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z).$$

Observación 2.1.20. Al igual que ocurría con la exponencial, el logaritmo principal **extiende** al logaritmo natural real, pues si z es real positivo, la definición anterior nos da la igualdad.

Proposición 2.1.21 (Diferencias entre los logaritmos)**.**

i) Las propiedades $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ *y* $\ln(a^b) = b\ln(a)$ *para* $a, b \in \mathbb{R}^+$ *no son ciertas para el logaritmo complejo aplicado a complejos no nulos arbitrarios.*

ii) El logaritmo real es continuo en todo su dominio, pero el logaritmo complejo no.

Demostración.

i) Las propiedades del logaritmo real las damos por conocidas. Para ver que no son ciertas en el caso complejo veamos el siguiente ejemplo. Sean $z_1 = -1 = z_2$, entonces como $|-1| = 1$ y $\arg(-1) = \pi$, se tiene que $\log(-1) = \ln(1) + i\pi = i\pi$ y $\log((-1)(-1)) = \log(1) = 0$, con lo que $0 = \log((-1)(-1)) \neq \log(-1) + \log(-1) = 2i\pi$. Este ejemplo también nos sirve para el segundo caso tomando $z_1 = -1$ y $z_2 = 2$.

ii) Que el logaritmo real es continuo es consecuencia de la definición y del Teorema Fundamental del Cálculo. Para el caso complejo es importante recordar que, a efectos topológicos, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ son idénticos, por lo que estudiar la continuidad del logaritmo equivale a estudiar la continuidad de la parte real e imaginaria de esta función. Y en efecto, $\arg(z)$ presenta una discontinuidad en el eje real negativo, esto se ve muy claro de la siguiente forma. Sea $c \in \mathbb{R}^-$ y estudiamos los límites

$$\lim_{\substack{z \to c \\ Im(z)>0}} \log(z) = \ln|c| + i\pi,$$

$$\lim_{\substack{z \to c \\ Im(z)<0}} \log(z) = \ln|c| - i\pi,$$

por lo que la función no es continua para ningún $c \in \mathbb{R}^-$.

■

Observación 2.1.22. En 2.1.18 probamos que la exponencial compleja no era inyectiva en todo $\mathbb{C}$, pero en cambio probamos que $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Esto nos asegura inyectividad de la misma en bandas cuya parte imaginaria tenga una amplitud menor que 2π. Pues bien, se puede probar que la **exponencial compleja establece una biyección** entre bandas de este tipo y sectores angulares de amplitud exactamente la misma que la de la banda, cuya inversa es **un logaritmo**, no necesariamente el principal, dependiendo de la banda. Con esto quiero resaltar que **al igual que ocurre en el caso real**, la exponencial y el logaritmo son una inversa de la otra, pero en el caso complejo ya no es de forma global. Se puede ver con detalle todo sobre los logaritmos complejos en [8].

Raíz n-ésima

Comenzamos con el caso real. Dado $a \in \mathbb{R}$, que supondremos $a \neq 0$ para evitar trivialidades, y $n \in \mathbb{N}$ buscamos $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$. Aquí debemos hacer algunas distinciones:

- Si n es par, entonces $b^n \geq 0$ cualquiera sea b, por lo que para poder encontrar solución real, a debe ser positivo o 0. Además, en este caso $b^n = (-b)^n$ por lo que tendríamos dos candidatos, cada uno de ellos sería **una raíz n-ésima** de a. Una de ellas es negativa, y la otra positiva. Pues bien, a la positiva se llama **raíz principal** de a, y se denota por $\sqrt[n]{a}$.

- Si n es impar, entonces existe una única solución $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$. Esto es sencillo viéndolo de la siguiente forma. Sea $f(x) = x^n - a$ un función definida en todo $\mathbb{R}$, continua, monótona y con un único cambio de signo. Bolzano concluye con lo que anunciábamos. Igual que antes, a este b se le llama **raíz n-ésima principal** de a, y se denota por $\sqrt[n]{a}$.

Para ver el caso complejo nos será de ayuda el siguiente lema.

Lema 2.1.23 (Fórmula de Moivre)**.** *Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se verifica*

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx).$$

Demostración.
Gracias a la fórmula de Euler 2.1.6, probar esto es probar que $(e^{ix})^n = e^{inx}$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. De 2.1.18 sabemos que $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ para cualesquiera sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, luego si $n \in \mathbb{N}$,

$$(e^z)^n = e^z \overbrace{\cdots}^{n} e^z = e^{nz},$$

y de forma similar si $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$. En cualquier caso, hemos probado lo que buscábamos. ■

Con esto, veamos el caso complejo de forma análoga al real. Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, buscamos entonces $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^n = z$. Supongamos que $w = |w|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, luego gracias a la fórmula de Moivre,

$$w^n = |w|^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Sea $\varphi = \arg(z)$, si $w^n = z$ entonces

$$|w|^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = |z| (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \Leftrightarrow$$

$$|w|^n = |z|, \quad n\theta - \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

A cualquiera de estos w se les llama **una ráiz n-esima** de z. Probaremos que hay exactamente n distintas.

Proposición 2.1.24. *Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existen n raíces n-ésimas complejas distintas.*

Demostración.
Sabemos que si w es una raíz n-ésima de z y $\varphi = \arg(z)$, entonces

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

El módulo es siempre el mismo, lo único que cambia es el argumento, por lo que para que dos números de igual módulo fuesen iguales debería darse que sus argumentos difieran $2m\pi, m \in \mathbb{Z}$. Si estudiamos estos argumentos en función del valor de k, θ_k,

$$\theta_0 = \frac{\varphi}{n},\quad \theta_1 = \frac{\varphi + 2\pi}{n},\quad \cdots\quad, \theta_{n-1} = \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n},$$

podemos ver que $\theta_{n-1+m} - \theta_{m-1} = 2\pi$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Por tanto, solo hay argumentos distintos de 0 a $n-1$, y por tanto hay exactamente n raíces n-ésimas distintas. ■

De todas las raíces n-ésimas de un complejo, también se escoge una como principal.

Definición 2.1.25. Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $\varphi = \arg(z)$. Se define la **raíz n-ésima principal de** z como

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right).$$

Hemos visto que en el caso de **los reales** podíamos como mucho conseguir **dos raíces n-ésimas**, mientras que en **los complejos siempre hay exactamente n**. Aun así, considerando las raíces principales, la raíz compleja extiende a la raíz real en el sentido de que la raíz compleja de un real coincide con la real. Ahora sí, como ya anunciábamos tenemos todo el derecho a decir, si hablamos de raíz principal, que $\sqrt{-1} = i$, pues la raíz cuadrada principal de -1 sería $\sqrt{-1} = |-1|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Funciones trigonométricas

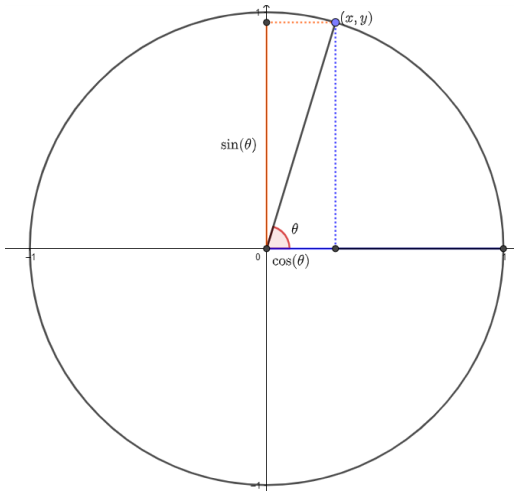
Aunque son bien conocidas las funciones seno y coseno en el ámbito real, conviene dar una definición que nos ayudará a la hora de diferenciar ciertas propiedades.

Definición 2.1.26. Consideramos una circunferencia en $\mathbb{R}^2$ centrada en $(0,0)$ y de radio 1. Un ángulo θ se situarán en la circunferencia cumpliendo lo siguiente:

- El vértice será el centro de la circunferencia, y un lado será el semieje positivo de abscisas.
- El otro lado se colocará donde corresponda, abriendo el ángulo en sentido contrario a las agujas del reloj, dando un punto en la circunferencia.

Así θ determinará un único punto (x, y) en la circunferencia unidad. Entones se definen:

- $\sin(\theta) = y$.
- $\cos(\theta) = x$.



Ahora pasamos a definir estas funciones en $\mathbb{C}$.

Definición 2.1.27. Sea $z \in \mathbb{C}$ entonces definimos:

- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.
- $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Observación 2.1.28. Como ocurre con otras funciones, la versión compleja extiende a la real pues $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \underset{\substack{\uparrow \\ 2.1.6}}{=} \frac{\cos(x) + i\sin(x) - \cos(x) + i\sin(x)}{2i} = \sin(x),$$

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ 2.1.6}}{=} \frac{\cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x)}{2} = \cos(x).$$

Proposición 2.1.29 (Parecidos)**.** *Las siguientes propiedades son comunes:*

i) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

ii) $\cos(-z) = \cos(z)$ *y* $\sin(-z) = -\sin(z), \ \forall z \in \mathbb{C}$.

iii) $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ *y* $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w), \ \forall z, w \in \mathbb{C}$.

iv) $\sin(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$ *y* $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

Demostración.
Estas propiedades las damos por conocidas en $\mathbb{R}$, veamos en el ámbito complejo.

i)

$$\sin^2(z)+\cos^2(z)=\frac{1}{4i^2}\left(e^{2iz}+e^{-2iz}-2\right)+\frac{1}{4}\left(e^{2iz}+e^{-2iz}+2\right)=1,\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

ii)

$$\cos(-z)=\frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2}=\cos(z),\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

$$\sin(-z)=\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i}=-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\sin(z),\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

iii) Por un lado tenemos $\sin(z+w)=\frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2i}$. Por otro tenemos que, usando las propiedades de la exponencial:

$$\sin(z)\cos(w)+\cos(z)\sin(w)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

$$=\frac{2e^{i(z+w)}-2e^{-i(z+w)}}{4i}=\frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2i}=\sin(z+w).$$

De igual forma $\cos(z+w)=\frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}}{2}$, y

$$\cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

$$=\frac{2e^{i(z+w)}+2e^{-i(z+w)}}{4}=\frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}}{2}=\cos(z+w).$$

iv) Por un lado,

$$\sin(z)=0\Leftrightarrow e^{iz}=e^{-iz}\underset{2.1}{\Leftrightarrow} iz-(-iz)=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Para el otro, $\cos(z)=0\Leftrightarrow e^{iz}=-e^{-iz}\Leftrightarrow e^{iz-(-iz)}=-1$. Vamos a estudiar cuando $e^w=-1$, razonando igual que en 2.1.18, $e^w=-1, w=x+iy\Leftrightarrow e^x\cos(y)=-1, e^x\sin(y)=0\Leftrightarrow y=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}, x=0$. Entonces $e^{iz-(-iz)}=-1\Leftrightarrow iz-(-iz)=i(\pi+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow z=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ como queríamos probar.

■

Vamos ahora con la gran diferencia entre estas funciones, algo que podría parecer sorprendente, pero para hacerlo más claro enunciaremos y demostraremos un lema previo.

Lema 2.1.30. *Dado cualquier $M\in\mathbb{R}^+$, existen $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ tal que $\sin(z_1)=M$ y $\cos(z_2)=M$.*

Demostración.
Sea $M \in \mathbb{R}^+$ y buscamos primero z_1 tal que $\sin(z_1) = M$. Para que esto ocurra debe darse que

$$\sin(z_1) = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} = M \Leftrightarrow e^{iz_1} - e^{-iz_1} = 2iM.$$

Por comodidad, vamos a buscar $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z_1) \in]-\pi, \pi[$, luego veremos por qué aquí. Llamamos $e^{iz_1} = w$ y entonces

$$e^{iz_1} - e^{-iz_1} = 2iM \Leftrightarrow w - \frac{1}{w} = 2iM \Leftrightarrow w^2 - 2iMw - 1 = 0,$$

y resolviendo esta ecuación (con coeficientes complejos)

$$w = \frac{2iM \pm \sqrt{-4M^2 + 4}}{2} = iM \pm \sqrt{1 - M^2}.$$

Ahora bien, si $z_1 = x + iy \Rightarrow iz_1 = -y + ix \Rightarrow Im(iz_1) = Re(z_1)$, y ahora viene el por qué buscar z_1 en esta zona concreta, ya que así tenemos que $Im(iz_1) \in]-\pi, \pi[$. Nos encontramos en la banda del argumento principal, donde tenemos garantizada que la exponencial compleja y el logaritmo principal son inversas. Entonces:

$$e^{iz_1} = w \Leftrightarrow iz_1 = \log(w) \Leftrightarrow z_1 = -i\log(w).$$

Cualquier raíz de la ecuación nos sirve, tomamos por ejemplo $w = iM + \sqrt{1 - M^2}$, y llegamos a $z_1 = -i\log(iM + \sqrt{1 - M^2})$ que nos da lo buscado. Razonando igual para z_2, ahora tenemos la ecuación

$$w^2 - 2Mw + 1 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{2M \pm \sqrt{4M^2 - 4}}{2} = M \pm \sqrt{M^2 - 1},$$

con $e^{iz_2} = w$, llegando a $z_2 = -i\log(M + \sqrt{M^2 - 1})$. ■

Corolario 2.1.31 (Diferencia)**.** *Las funciones seno y coseno reales están acotadas, pero no lo están en el campo complejo. Concretamente,* $|\sin(x)| \leq 1, |\cos(x)| \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, *pero* $\nexists M \in \mathbb{R}^+ : |\sin(z)| < M$ *ni* $|\cos(z)| < M,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Demostración.
De la definición 2.1.26 es obvio que $|\sin(x)| \leq 1$ y $|\cos(x)| \leq 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. El caso complejo lo da el lema 2.1.30. ■

2.2. Diferenciabilidad, tan parecidos y tan diferentes

Definiciones y primeras diferencias

Comencemos recordando algunas nociones de diferenciabilidad real que utilizaremos en la sección y que nos servirán para compararlas con las complejas.

Definición 2.2.1. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ (con A' la acumulación topológica de A) y sea $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es derivable en el punto a si existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En tal caso, denotamos $f'(a)$ al valor de dicho límite y se denomina derivada de la función f en el punto a.

Definición 2.2.2. Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ y $(a, b) \in \overset{\circ}{A}$ (con $\overset{\circ}{A}$ el interior topológico de A).

- Sea $h\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es derivable o diferenciable en el punto (a, b) si existe una aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{|h(x, y) - h(a, b) - T((x, y) - (a, b))|}{\| x - (a, b) \|} = 0,$$

  donde $\| \cdot \|$ denota cualquier norma en $\mathbb{R}^2$, y a T, que si existe, es única, se le denota por $h'(a, b)$. En tal caso, también existen $\frac{\partial h(a,b)}{\partial x}$ y $\frac{\partial h(a,b)}{\partial y}$ que además verifican

$$T(m, n) = \frac{\partial h(a, b)}{\partial x} m + \frac{\partial h(a, b)}{\partial y} n = \langle \nabla h(a, b), (m, n) \rangle, \ \forall (m, n) \in \mathbb{R}^2.$$

- Sea $h\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función. Se dice que h es derivable o diferenciable en el punto (a, b) si existe una aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ verificando

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{\| h(x, y) - h(a, b) - T((x, y) - (a, b)) \|}{\| x - (a, b) \|} = 0,$$

  donde $\| \cdot \|$ denota cualquier norma en $\mathbb{R}^2$, y a T, que si existe, es única, se le denota por $h'(a, b)$. En tal caso, si h_1, h_2 denotan las componentes de h, es decir $h = (h_1, h_2)$, también existen $\frac{\partial h_1(a,b)}{\partial x}$, $\frac{\partial h_1(a,b)}{\partial y}$, $\frac{\partial h_2(a,b)}{\partial x}$ y $\frac{\partial h_2(a,b)}{\partial y}$, que además verifican

$$T(m, n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(a,b)}{\partial x} & \frac{\partial h_1(a,b)}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2(a,b)}{\partial x} & \frac{\partial h_2(a,b)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla h_1(a, b) \\ \nabla h_2(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, \forall (m, n) \in \mathbb{R}^2.$$

Observación 2.2.3. Algo importante a tener en cuenta es que, si

$$h = (h_1, h_2)\colon A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

es derivable en un punto (a, b) entonces $h_1\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h_2\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ son derivables en (a, b). De hecho el recíproco también es cierto.

Cabe mencionar que, como vamos a ver, lo que se hace en variable compleja es "extender la definición de derivada real de una variable real a los complejos." Claro, esto es posible gracias a la estructura de cuerpo de $\mathbb{C}$, pero no es posible en funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.2.4. Sean $D \subset \mathbb{C}$, $c \in D \cap D'$ y sea $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Diremos que f es derivable (o diferenciable) en c, si existe

$$\lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}.$$

En tal caso, dicho valor se denota por $f'(c)$.

Observación 2.2.5. Como anunciábamos, las definiciones 2.2.1 y 2.2.4 son idénticas en cuanto al límite a calcular. Esto hace que **las reglas básicas de derivación sean las mismas en ambos casos**, como la derivación de la suma, producto, cociente o composición de funciones, así como la derivada de las funciones elementales.

Pero llegados a este punto, ¿qué tiene de especial la derivabilidad compleja?, ¿es idéntica a la real como parece? La respuesta es no, y es que aunque parezcan tan parecidas, realmente son muy diferentes. Esto viene dado por el siguiente teorema, extraído de [5].

Teorema 2.2.6 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $c \in \Omega$ y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Notaremos $c = a + bi$ y $u, v\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $u(x,y) = Ref(x+iy)$, $v(x,y) = Imf(x+iy), \forall (x,y) \in \Omega$. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) $\exists f'(c)$ (en sentido complejo).

ii) Las funciones u y v son derivables (en sentido real) en (a,b) y se verifican las igualdades

$$\frac{\partial u(a,b)}{\partial x} = \frac{\partial v(a,b)}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u(a,b)}{\partial y} = -\frac{\partial v(a,b)}{\partial x}.$$

Además en ese caso se tiene que

$$f'(c) = \frac{\partial u(a,b)}{\partial x} + i\frac{\partial v(a,b)}{\partial x}.$$

Demostración.
Por definición, tenemos que i) es equivalente a que

$$f'(c) = \lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} \Leftrightarrow \lim_{z \to c} \frac{|f(z) - f(c) - f'(c)(z - c)|}{|z - c|} = 0. \tag{2.2}$$

Supongamos que $f'(c) = \lambda + i\mu$, entonces tenemos que

$$f'(c)(z-c) = (\lambda+i\mu)(x+iy-a-ib) = \lambda(x-a)-\mu(y-b)+i\left[\mu(x-a)+\lambda(y-b)\right].$$

Usando la definición de módulo complejo podemos ver 2.2 como

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{\|(u(x,y),v(x,y))-(u(a,b),v(a,b))-(\lambda(x-a)-\mu(y-b),\mu(x-a)+\lambda(y-b))\|}{\|(x,y)-(a,b)\|} \right) = 0.$$

Ahora, como

$$(\lambda(x-a)-\mu(y-b),\mu(x-a)+\lambda(y-b)) = \left[\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \right]^T,$$

si nos fijamos en la segunda parte de la definición 2.2.2, tomando como función $h = (u, v)$ y como aplicación lineal T la determinado por la matriz $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ tenemos que la relación anterior se cumple si y solo si h es derivable en (a, b), y su derivada cumple

$$\begin{pmatrix} \nabla h_1(a,b) \\ \nabla h_2(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(a,b)}{\partial x} & \frac{\partial u(a,b)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(a,b)}{\partial x} & \frac{\partial v(a,b)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Por la unicidad de la aplicación lineal que aparece, tenemos que tiene que ser igual a la matriz $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$, lo que implica:

$$\frac{\partial u(a,b)}{\partial x} = \lambda = \frac{\partial v(a,b)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u(a,b)}{\partial y} = -\mu = -\frac{\partial v(a,b)}{\partial x},$$

que son las ecuaciones de ii). Además por la observación 2.2.5 tenemos la derivabilidad de u y v. Por último como $f'(c) = \lambda + i\mu$ tenemos

$$f'(c) = \frac{\partial u(a,b)}{\partial x} + i\frac{\partial v(a,b)}{\partial x},$$

como queríamos probar. ■

Observación 2.2.7. La mayoría de las funciones típicas del análisis presentadas en la sección anterior siguen siendo derivables en sentido complejo, como lo eran en el real. De hecho, cabe mencionar **algo común entre la diferenciabilidad real y compleja: ser diferenciable implica continuidad de la función.** Esto hace, por ejemplo, que el logaritmo complejo principal no sea derivable en el eje real negativo.

Definición 2.2.8. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $f\colon \Omega \longrightarrow C$ una función. Diremos que f es holomorfa en Ω si es derivable en todo punto de Ω, y denotaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto de las funciones holomorfas en Ω.

¿Existe un Teorema del Valor Medio complejo?

Si recordamos la versión real, que podemos consultar en [7], tendremos una idea de qué estaríamos buscando.

Teorema 2.2.9 (Teorema del Valor Medio Real)**.** *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $g\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en Ω. Sean $x, y \in \Omega$ tales que*

$$[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\} \subset \Omega.$$

Entonces $\exists \xi \in]x, y[= \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in]0,1[\}$ tal que

$$g(y) - g(x) = \langle \nabla g(\xi), y - x\rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$.

Antes de seguir con el propósito relacionado con el título de esta parte, gracias a este teorema 2.2.9 y a al teorema 2.2.6, tenemos **una propiedad interesante que es común tanto en el análisis real como en el complejo.**

Corolario 2.2.10.

i) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y convexo y sea $g\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en Ω tal que $\nabla g(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Entonces g es constante. En particular, si $n = 1$ y $g'(x) = 0,\ \forall x \in \Omega$ implica que g es constante.

ii) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y convexo y sea $g\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω tal que $g'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Entonces g es constante.

Demostración

i) Como Ω es convexo, para cualesquiera $x, y \in \Omega$ se tiene que $[x, y] \in \Omega$, por lo que podemos utilizar el teorema 2.2.9 para llegar a que

$$\exists \xi_{x,y} \in]x, y[\colon g(y) - g(x) = \langle \nabla g(\xi_{x,y}), y - x\rangle = 0 \Rightarrow g(y) = g(x), \forall x, y \in \Omega.$$

Por tanto, g es constante como queríamos probar.

ii) Sean $u, v\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $g(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), \forall (x,y) \in \Omega$. Entonces, por el teorema 2.2.6, se tiene

$$g'(z) = g'(x+iy) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \underset{\substack{\uparrow \\ Hipótesis}}{=} 0, \forall (x,y) \in \Omega.$$

Por tanto $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0, \forall (x,y) \in \Omega$, y de nuevo por las ecuaciones de Cauchy-Riemann 2.2.6 se tiene $0 = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \forall (x,y) \in \Omega$. Es decir tenemos $\nabla u(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \Omega$, y por el teorema 2.2.9 tenemos que u sería contante. De igual forma $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0, \forall (x,y) \in \Omega$, luego $\nabla v(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \Omega$ por lo que v también es constante. Así g sería constante. ■

Ahora sí, nos planteamos responder la pregunta con la que empezamos, ¿existe una versión similar a 2.2.9 del Teorema del Valor Medio en $\mathbb{C}$? Es decir, **nos preguntamos si el siguiente enunciado es cierto:**

> " Sea Ω un abierto y convexo de $\mathbb{C}$ y sea $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces $\forall z_1, z_2 \in \Omega,\ \exists \xi \in]z_1, z_2[$ tal que $f(z_1) - f(z_2) = f'(\xi)(z_1 - z_2)$."

Vamos a ver que **NO es cierto**, con el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 2.2.11. Sea $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^3$ y tomamos los puntos $z_1 = i$ y $z_2 = 1$. Supongamos que existe $\xi \in]z_1, z_2[$ tal que $f(z_1) - f(z_2) = f'(\xi)(z_1 - z_2)$, entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} f(z_1) - f(z_2) & = & i^3 - 1 = -i - 1 \\ f'(\xi)(z_1 - z_2) & = & 3\xi^2(i-1) \end{array}\right\} \Rightarrow -i - 1 = 3\xi^2(i-1).$$

Lo que ocurre, si y solo si,

$$\xi^2 = \frac{-i-1}{3(i-1)} = \frac{(-i-1)(-1-i)}{3(i-1)(-1-i)} = \frac{2i}{6} = \frac{i}{3}.$$

Si calculamos las raíces cuadradas de $\frac{i}{3}$ según se explicó en la sección anterior, tenemos que como $\frac{i}{3} = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ entonces las raíces son

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Además $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$. Ahora bien, $\xi \in]z_1, z_2[$ por lo que $\exists \lambda \in]0,1[$ tal que $\xi = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 = (1-\lambda) + i\lambda$. Si $\xi = \xi_1$ entonces $(1-\lambda) + i\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ lo que implicaría que $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, (1-\lambda) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ que es imposible pues en ese caso se daría que $1 = \lambda + (1-\lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. De igual forma, si $\xi = \xi_2$ entonces $(1-\lambda) + i\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ lo que implicaría que $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, (1-\lambda) = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ que es imposible de nuevo pues ahora daría que $1 = \lambda + (1-\lambda) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Por tanto no existe tal ξ, lo que desmiente lo pretendido.

Así concluimos que en los complejos no hay una versión similar a la versión real del Teorema del Valor Medio.

Holomorfía y Analiticidad

Nuestro objetivo en esta sección es probar la equivalencia para funciones complejas de variable compleja, entre holomorfía, analiticidad y el hecho de ser infinitamente derivable, cosa que como sabemos ni de lejos ocurre en $\mathbb{R}$. Para ello fijaremos nociones que nos ayudarán a probarlo poco a poco. La mayor parte de los resultados están extraídos de [5] y [8].

Series de potencias

Definición 2.2.12. Sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ una sucesión de números complejos y $a \in \mathbb{C}$. Se consideran las funciones $f_0(z) = c_0$ y $f_n(z) = c_n(z-a)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ definidas en $\mathbb{C}$. Entonces la serie definida por esta sucesión de funciones, que se representa por

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

se llama serie de potencias compleja centrada en a con coeficientes c_n.

Definición 2.2.13 (Convergencia)**.** Dada una serie de potencias centrada en a, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, se define para cada $M \in \mathbb{N}$ la suma parcial

$$S_M = \sum_{n=0}^{M} c_n(z-a)^n.$$

Así, diremos que:

- La serie de potencias es convergente en z cuando la sucesión $\{S_M\}_{M\in\mathbb{N}}$ es convergente.
- La serie de potencias es absolutamente convergente en z cuando la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n(z-a)^n|$ es convergente, donde $|\cdot|$ es el módulo complejo.

Vamos a ver cómo se comportan las series de potencias respecto de la convergencia.

Lema 2.2.14. *Si la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ es convergente para $z-a = d \neq 0$ entonces converge absolutamente para cualquier $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w-a| < |d|$.*

Demostración.
Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ es convergente para $z-a = d$, entonces la sucesión $\{c_n d^n\}$ converge a 0 (condición necesaria de convergencia en series). Por tanto, $\exists k \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $|c_n d^n| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$. Sea ahora $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w-a| < d$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|c_n(w-a)^n| = \left| c_n d^n \frac{(w-a)^n}{d^n} \right| = |c_n d^n| \frac{|w-a|^n}{|d|^n} \leq k \left(\frac{|w-a|}{|d|} \right)^n.$$

Como $|w-a| < |d| \Rightarrow \frac{|w-a|}{|d|} < 1$. Así la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|w-a|}{|d|}\right)^n$ es una serie geométrica de razón menor que 1, y por tanto convergente. Usando el criterio de comparación (real) tenemos que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n(w-a)^n|$ es convergente, y por tanto la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(w-a)^n$ es absolutamente convergente, como queríamos probar. ■

Corolario 2.2.15. *Dada la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$*, si* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *es tal que la sucesión* $\{c_n\rho^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada, entonces la serie anterior es absolutamente convergente si* $|z-a| < \rho$.

Teorema 2.2.16. *Dada una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *se tiene una (y solo una) de las siguientes situaciones:*

i) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *converge* $\forall z \in \mathbb{C}$.

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *converge solo en z=a.*

iii) $\exists R > 0$ *tal que* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *converge (absolutamente)* $\forall z \in \mathbb{C} : |z-a| < R$ *y no converge para* $|z-a| > R$.

Demostración.
Definimos $A = \{\rho \in \mathbb{R}_0^+ : \{c_n\rho^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada*$\}$. Es claro que $0 \in A$ luego $A \neq \varnothing$. Tomamos

$$R = \sup(A) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

Ahora tenemos las siguientes posibilidades:

i) Si $R = +\infty$ entonces para cada $z \in \mathbb{C}$ podemos encontrar $\rho \in A$ tal que $\rho > |z-a|$. Así, por el corolario 2.2.15 tenemos que la serie converge absolutamente (y por tanto converge).

ii) Si $R = 0$ entonces forzosamente $A = \{0\}$. Por tanto, para $z \neq a$ la sucesión $\{c_n(z-a)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está acotada, por lo que no puede converger a 0. Por la condición necesaria de convergencia de series, la serie de potencias no convergería.

iii) Si $R \in]0, +\infty[$, para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-a| < R$ existe $\rho \in A : |z-a| < \rho$. De nuevo el corolario 2.2.15 nos da que la serie es absolutamente convergente. En cambio para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-a| > R$, si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ es convergente entonces $\{c_n(z-a)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, en particular es acotada, pero esto no es posible ya que en ese caso $|z-a|$ pertenecería a A y así $\sup(A) > R$. Por tanto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ no converge para $|z-a| > R$.

Esto prueba cada caso del teorema, respectivamente. ■

Definición 2.2.17. Al R que proporciona el teorema 2.2.16 se le llama radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, aceptando los valores $R = +\infty$ si la serie converge en todo $\mathbb{C}$ o $R = 0$ si solo converge para $z = a$.

Definición 2.2.18 (Analítica)**.** Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Diremos que f es analítica en Ω cuando $\forall b \in \Omega$ exista $\rho_b \in \mathbb{R}^+$ tal que el disco

$$D(b, \rho_b) = \{z \in \mathbb{C} : |z - b| < \rho_b\} \subset \Omega$$

y una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^{(b)}(z-b)^n$ con radio de convergencia R, tal que $D(b, \rho_b)$ esté contenido en $D(b, R)$ y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(b)}(z-b)^n, \ \forall z \in D(b, \rho_b).$$

Aunque esta definición pueda parecer extraña, no dice más que lo siguiente: una función analítica es aquella que localmente es una serie de potencias convergente. Nos acercamos a probar uno de los resultados anunciados, pero antes necesitamos algunas nociones más.

Lema 2.2.19. *Si $z, w \in \mathbb{C}$ son tales que $|w| < |z|$ entonces se verifica:*

$$n\left|\frac{w}{z}\right|^{n-1} < \frac{|z|}{|z| - |w|}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración.
Como $\frac{|w|}{|z|} < 1$, la serie geométrica con este término general será convergente, y por tanto, fijado $n \in \mathbb{N}$, la suma finita será menor que la suma infinita, es decir:

$$1 + \frac{|w|}{|z|} + \cdots + \frac{|w|^{n-1}}{|z|^{n-1}} < \frac{1}{1 - \frac{|w|}{|z|}} = \frac{|z|}{|z| - |w|}.$$

Además, como $\frac{|w|^{n-1}}{|z|^{n-1}} < \frac{|w|^m}{|z|^m}, \forall m < n-1$ pues $\frac{|w|}{|z|} < 1$, tenemos

$$n\left|\frac{w}{z}\right|^{n-1} < 1 + \frac{|w|}{|z|} + \cdots + \frac{|w|^{n-1}}{|z|^{n-1}} < \frac{|z|}{|z| - |w|}.$$

■

Proposición 2.2.20. *Las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia, es decir, si derivamos término a término la primera el radio de convergencia es el mismo.*

Demostración.
No es restrictivo suponer que $a = 0$, en otro caso podríamos trasladar el problema a esta situación.

Supongamos que R_1 es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ y R_2 el de $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$, y supongamos primero que ambos pertenecen a $\mathbb{R}_0^+$. Ahora, si $|z| < R_2$, tenemos

$$|c_n z^n| = |z||c_n z^{n-1}| \leq n|z||c_n z^{n-1}| < R_2 |n c_n z^{n-1}|, \forall n \in \mathbb{N},$$

y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ es absolutamente convergente $\forall z \in \mathbb{C} : |z| < R_2$ (teorema 2.2.16) tendríamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ también lo sería, por lo que $R_2 \leq R_1$ (recordemos que el radio de convergencia es el mayor radio del disco centrado en a donde converge la serie). Si tuviésemos que $R_2 < R_1$, entonces elegimos $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $R_2 < |w| < |z| < R_1$, y usando 2.2.19 obtenemos

$$n \left|\frac{w}{z}\right|^{n-1} < \frac{|z|}{|z| - |w|}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n|c_n w^{n-1}| < \frac{|c_n z^n|}{|z| - |w|}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $|z| < R_1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es convergente, luego $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n w^{n-1}$ también sería convergente, pero $|w| > R_2$ lo que contradice que R_2 sea el radio de convergencia, por tanto $R_2 = R_1$.
Veamos ahora que ocurre si alguno de ellos es 0, supongamos por ejemplo que $R_2 = 0$, en ese caso $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ solo converge para $z = 0$. Por tanto, $z \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ también converge solo para $z = 0$, y así $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ convergería solo para $z = 0$ y $R_1 = 0$. Análogamente si se supusiese $R_1 = 0$.
Supongamos ahora que alguno de los radios es infinito, por ejemplo $R_2 = +\infty$. En ese caso, dado $z \in \mathbb{C}$ fijo pero arbitrario, de

$$|c_n z^n| = |z||c_n z^{n-1}| \leq n|z||c_n z^{n-1}|, \forall n \in \mathbb{N},$$

tendríamos que la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} |n c_n z^{n-1}|$ implicaría la de $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$, y por tanto la de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, y esto lo tendríamos para cualquier $z \in \mathbb{C}$, luego $R_1 = +\infty$. Si partiésemos de $R_1 = +\infty$, fijado de nuevo $z \in \mathbb{C}$, como

$$|n c_n z^{n-1}| \leq |c_n z^{n-1}| \Rightarrow |z||n c_n z^{n-1}| \leq |c_n z^n|,$$

de la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ tendríamos la de $\sum_{n=1}^{\infty} |n c_n z^{n-1}|$ y así $R_2 = +\infty$. Con esto acaba la demostración, pues en cualquier caso ambas tienen siempre el mismo radio de convergencia. ■

Enunciaremos un criterio que nos será de utilidad, cuya demostración podemos ver en [8].

Lema 2.2.21 (Criterio de Weierstrass).
Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *una serie de funciones complejas definidas en un conjunto* $A \subset \mathbb{C}$. *Supongamos que existe una sucesión* $\{\alpha_n\}$ *de números reales positivos tal que:*

i) $|f_n(z)| \leq \alpha_n$ *para todo* $z \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *es convergente.*

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge absolutamente y uniformemente en* A.

Teorema 2.2.22 (Analítica$\Rightarrow$ Infinitamente derivable).
Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R > 0$ *y consideramos la función* $f\colon D(a,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ *definida por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Entonces $\exists f'(z),\ \forall z \in D(a,R)$ *y*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

En consecuencia, f *es infinitamente derivable en* $D(a,R)$ *y para cada* $k \in \mathbb{N}$ *su derivada* k*-ésima se obtiene derivando* k *veces la serie término a término, esto es:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k}.$$

Y en particular se verifica que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Demostración.
De nuevo, no es restrictivo suponer $a = 0$, de forma que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Sea $b \in D(0,R)$, y para $z \neq b, z \in D(0,R)$ consideramos la función

$$\varphi(z) = \frac{f(z)-f(b)}{z-b} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - b^n}{z-b} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z),$$

con $p_n(z) = c_n \frac{z^n - b^n}{z-b}$. Ahora bien, como para $zb \neq 0$ se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} z^{n-j} b^{j-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{z^n}{b}\left(\frac{b}{z}\right)^j \underset{\substack{\uparrow \\ serie\ geométrica}}{=} \frac{z^{n-1} - b^{n-1}\frac{b}{z}}{1-\frac{b}{z}} = \frac{z^n - b^n}{z-b},$$

y si alguno fuese 0 se cumple de igual forma. Entonces $p_n(z) = c_n \sum_{j=1}^{n} z^{n-j} b^{j-1}$, y nuestra idea ahora es probar que existe $\lim_{z \to b} \varphi(z)$. Para ello, como $b \in D(0,R)$, y es un abierto de $\mathbb{C}$ entonces

$$\exists \delta > 0 : \overline{D}(b,\delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z-b| \leq \delta\} \subset D(0,R). \tag{2.3}$$

Por otro lado, como $\forall z \in \overline{D}(b,\delta)$, se tiene que $|z| - |b| \leq |z-b| \leq \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |z| &\leq |b| + \delta \\ |b| &\leq |b| + \delta \end{aligned} \tag{2.4}$$

, y obtenemos

$$|p_n(z)| \leq |c_n| \sum_{j=1}^{n} |z^{n-j} b^{j-1}| \underset{\substack{\uparrow \\ 2.4}}{\leq} n|c_n|(|b|+\delta)^{n-1}. \tag{2.5}$$

Ahora, como $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es convergente si $|z| < R$, por la proposición 2.2.20 tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ converge si $|z| < R$, y por el teorema 2.2.16 lo hace absolutamente, por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n||z^{n-1}|$ es convergente si $|z| < R$. Vamos a buscar $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = |b| + \delta$ y $|z| < R$. Si $b = 0$ tomamos $z = \delta$ y $|z| = \delta < R$, en otro caso tomamos $z = b + \delta \frac{b}{|b|}$ de forma que como $|z-b| = \delta$, por 2.3, $|z| < R$ y además

$$|z|^2 = z\overline{z} = \left(b + \delta \frac{b}{|b|}\right)\left(\overline{b} + \delta \frac{\overline{b}}{b}\right) = |b|^2 + 2\delta|b| + \delta^2 = (|b|+\delta)^2,$$

por lo que $|z| < R$. Por tanto como $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n||z^{n-1}|$ es convergente si $|z| < R$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|(|b|+\delta)^{n-1}$ es convergente. Aplicando el criterio 2.2.21 para $f_n = p_n$ y $\alpha_n = n|c_n|(|b|+\delta)^{n-1}$ tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(z)$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(b,\delta)$.

Sabemos, del análisis real (y como este ámbito es estrictamente topológico también es cierto en análisis complejo), que la convergencia uniforme en sucesiones (y por tanto en series) de funciones continuas es continua, luego φ es continua en $\overline{D}(b,\delta)$, definiendo, para $z = b$,

$$\varphi(b) = \lim_{z \to b} \frac{f(z) - f(b)}{z - b}.$$

Por tanto, tenemos que $\exists f'(b) = \varphi(b) = \lim_{z \to b} \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n b^{n-1}$, probando asi la primera parte. Para probar que f es infinitamente derivable y que cumple la fórmula

anunciada basta aplicar lo ya probado a f' y así sucesivamente las veces que se desee. Por último si

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k},$$

entonces $f^{(k)}(a) = k!c_k$, lo que concluye la demostración. ■

Con esto acabamos de probar algo importante que anunciábamos al principio: **toda función analítica es infinitamente derivable**. Este hecho se cumple también en el análisis real, y de hecho, como veremos, es el único hecho (no trivial) de los que dijimos.

Integrales

El camino para probar las importantes propiedades que dijimos al comienzo pasa por las integrales sobre curvas en $\mathbb{C}$ y los resultados de Cauchy. Vamos a ello dando primero unas pinceladas básicas de integrales.

Definición 2.2.23. Diremos que una función $\varphi\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es integrable si lo son $Re\varphi$ y $Im\varphi$ como funciones reales de variable real. En tal caso, definimos la integral de φ en $[a,b]$ como

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b Re\varphi(t)dt + i\int_a^b Im\varphi(t)dt.$$

Definición 2.2.24 (Nociones sobre curvas)**.**

- Una curva en $\mathbb{C}$ es una aplicación $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. La curva se dice cerrada si $\varphi(a) = \varphi(b)$, y se dice simple si φ es inyectiva en $[a,b[$.

- Una curva φ se dirá regular a trozos y se notará como $\varphi \in C^1_{tr}[a,b]$ si existe un partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a,b]$ tal que φ es C^1 en $[t_k, t_{k+1}]$, para todo $k \in \{0, ..., n-1\}$. Si una curva es regular a trozos, la llamaremos **camino**.

- Gracias al Teorema de Jordan, tenemos que una curva cerrada y simple φ divide al plano complejo en dos componentes conexas abiertas. A la componente acotada la denotaremos por $I(\varphi)$, y a la no acotada, $E(\varphi)$.

- Se llama traza de una curva φ y se representa por φ^* al conjunto

$$\varphi^* = \{\varphi(t) : t \in [a,b]\}.$$

- Se define la longitud de un camino $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$\mathcal{L}(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|dt.$$

Definición 2.2.25.

- Dada una curva $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ definimos $-\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, -\varphi(t) = \varphi(b+a-t)$ su curva opuesta. Con esto lo que hacemos realmente es "recorrer" la curva en sentido contrario.

- Dadas dos curvas $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\sigma\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $\varphi(b) = \sigma(c)$, se define la yuxtaposición como $\varphi + \sigma\colon [a, b+d-c] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(\varphi+\sigma)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & a \leq t \leq b \\ \sigma(c-b+t) & b \leq t \leq b+d-c \end{cases}$$

Definición 2.2.26 (Integral curvilínea)**.** Sea $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino, y sea $f\colon \varphi^* \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Definimos la integral de f a lo largo de φ como

$$\int_\varphi f(z)dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Proposición 2.2.27 (Propiedades, en [8])**.**

1) Dados dos caminos φ y σ, y la función continua $f\colon \varphi^* \cup \sigma^* \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces se cumple

$$\int_{\varphi+\sigma} f(z)dz = \int_\varphi f(z)dz + \int_\sigma f(z)dz.$$

2) Dado un camino φ y una función f continua en φ^* se cumple

$$\int_{-\varphi} f(z)dz = -\int_\varphi f(z)dz.$$

3) Si $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un camino y $f\colon \varphi^* \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua se tiene la acotación

$$\left|\int_\varphi f(z)dz\right| \leq \max\{|f(z)| : z \in \varphi^*\}\mathcal{L}(\varphi).$$

Enunciamos a continuación un resultado esencial para probar lo que se propone, cuya demostración se puede consultar donde se indica.

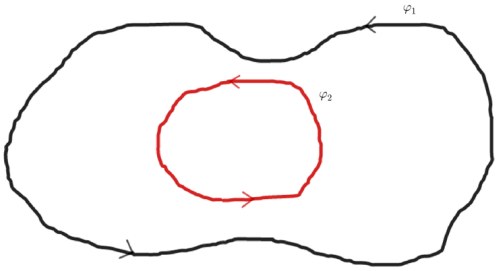
Teorema 2.2.28 (Teorema de Cauchy([9],pag.107))**.**
Sea $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado y simple, y sea $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω, con Ω un abierto verificando que $I(\varphi) \cup \varphi^* \subset \Omega$. Entonces

$$\int_\varphi f(z)dz = 0.$$

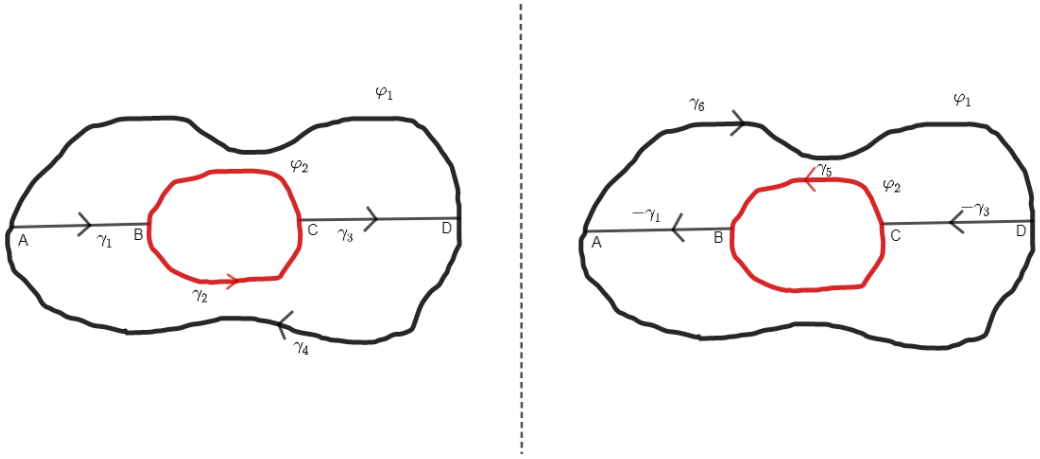
Trataremos algunos lemas previos que nos serán de utilidad en nuestro objetivo.

Lema 2.2.29 (Lema de Deformación). *Sean φ_1, φ_2 dos caminos cerrados ,simples y con la misma orientación tales que $\varphi_2^* \subset I(\varphi_1)$ y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, con Ω un abierto verificando $\varphi_1^* \cup \varphi_2^* \cup [E(\varphi_2) \cap I(\varphi_1)] \subset \Omega$. Entonces*

$$\int_{\varphi_1} f(z)dz = \int_{\varphi_2} f(z)dz$$



Demostración.
Planteamos la siguiente división de los caminos φ_1, φ_2 y unos nuevos segmentos para construir nuevos caminos cerrados. Esto se ve más claro en el siguiente esquema:



Definimos los nuevos caminos γ_1 cuya traza es el segmento $\overline{AB}$, γ_2 la parte inferior de φ_2, γ_3 el segmento $\overline{CD}$, γ_4 la parte inferior de φ_1, γ_5 la parte superior de φ_2 y por último γ_6 la parte superior de φ_1, todas con la orientación indicada. Definimos así otros caminos como yuxtaposición de estos, $\sigma_1 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ y $\sigma_2 = -\gamma_3 + \gamma_5 + (-\gamma_1) + \gamma_6$. Por hipótesis, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Cauchy 2.2.28 a σ_1 y a σ_2 para obtener,

$$\int_{\sigma_1} f(z)dz = \int_{\sigma_2} f(z)dz = 0.$$

De esta forma por las propiedades anunciadas en 2.2.27 tenemos, sumando ambas integrales

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz \int_{-\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_5} f(z)dz$$

$$+\int_{-\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_6} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz + \int_{\gamma_5} f(z)dz + \int_{\gamma_6} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_5} f(z)dz = \int_{-\gamma_4} f(z)dz + \int_{-\gamma_6} f(z)dz.$$

Ahora como $\gamma_2 + \gamma_5 = \varphi_2$ y $(-\gamma_4) + (-\gamma_6) = \varphi_1$ llegamos a

$$\int_{\varphi_1} f(z)dz = \int_{\varphi_2} f(z)dz,$$

como queríamos probar. ■

Lema 2.2.30. *Sea $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ y sea $C(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\}$, entonces*

$$\int_{C(a,R)} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i.$$

Demostración.
Como primera observación cabe destacar que la función $z \longmapsto \frac{1}{z-a}$ es continua en $C(a,R)$ luego la integral existe. Parametrizamos este conjunto con la curva $\varphi\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\varphi(t) = Re^{it} + a$ de forma que $\varphi^* = C(a,R)$ y $\varphi'(t) = Rie^{it}$, $\forall t \in [0,2\pi]$. Entonces:

$$\int_{C(a,R)} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}} dt = 2\pi i.$$

■

Teorema 2.2.31 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Sea $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado, simple y orientado positivamente, y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω, con Ω un abierto cumpliendo $\varphi^* \cup I(\varphi) \subset \Omega$. Entonces*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-a} dz, \ \forall a \in I(\varphi).$$

Demostración.
Fijamos $a \in I(\varphi)$ arbitrario, entonces la función $z \longmapsto \frac{f(z)}{z-a}$ está bien definida y es continua para todo $z \in \varphi^*$, por lo que su integral está asegurada que exista. Definimos la función $h\colon I(\varphi) - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$h(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z-a} - f'(a),$$

que está bien definida y es continua en su dominio (de hecho al ser f holomorfa h también lo sería). De la definición obtenemos la relación

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + h(z)(z-a),\ \forall z \in I(\varphi) - \{a\}. \tag{2.6}$$

Además, como $\lim\limits_{z\to a} h(z) = f'(a) - f'(a) = 0$, entonces tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |h(z)| < \varepsilon,\ \forall z \in D(a,\delta_\varepsilon) - \{a\} \subset I(\varphi) - \{a\}. \tag{2.7}$$

Con esta idea tomamos $\varepsilon > 0$, fijo pero arbitrario, y encontramos $\delta_\varepsilon > 0$ de forma que se cumplen 2.6 y 2.7. Fijamos $0 < R < \delta_\varepsilon$ de forma que $\overline{D}(a,R) \subset D(a,\delta) \subset I(\varphi)$ y se siguen cumpliendo 2.6 y 2.7, luego si denotamos por $Fr(A)$ a la frontera topológica del conjunto A, tenemos:

$$\int_\varphi \frac{f(a)}{z-a}dz \underset{\substack{\uparrow \\ L.Deformación 2.2.29}}{=} \int_{Fr(\overline{D}(a,R))} \frac{f(z)}{z-a}dz =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 2.6}}{=} \int_{Fr(\overline{D}(a,R))} \frac{f(a)}{z-a}dz + \int_{Fr(\overline{D}(a,R))} f'(a)dz + \int_{Fr(\overline{D}(a,R))} h(z)dz$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ Lema 2.2.30}}{=} 2\pi i f(a) + f'(a)\int_{Fr(\overline{D}(a,R))} 1dz + \int_{Fr(\overline{D}(a,R))} h(z)dz.$$

Ahora como la función constante 1 es holomorfa cualquiera sea el dominio, el Teorema de Cauchy 2.2.28 nos asegura que su integral es 0. Así,

$$\int_\varphi \frac{f(a)}{z-a}dz = 2\pi i f(a) + \int_{Fr(\overline{D}(a,R))} h(z)dz,$$

y de aquí, obtenemos

$$\left|\int_\varphi \frac{f(a)}{z-a}dz - 2\pi i f(a)\right| = \left|\int_{Fr(\overline{D}(a,R))} h(z)dz\right| \underset{\substack{\uparrow \\ 2.2.27}}{\leq} \max\{|h(z)| : z \in \gamma^*\}\mathcal{L}(\gamma) \underset{\substack{\uparrow \\ 2.7}}{<} 2\pi R\varepsilon.$$

Como esto lo tenemos para todo $\varepsilon > 0$ podemos hacer tender $\varepsilon \to 0$ de forma que llegamos a

$$\int_\varphi \frac{f(a)}{z-a}dz - 2\pi i f(a) = 0 \Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(a)}{z-a}dz.$$

■

Vamos ya sí con uno de los resultados que buscábamos.

Teorema 2.2.32. *Sea $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado y simple, y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto Ω con $\varphi^* \cup I(\varphi) \subset \Omega$. Entonces para todo $a \in I(\varphi)$ se tiene*

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz.$$

Demostración.
Dado $a \in I(\varphi)$, como es $I(\varphi)$ es abierto y $Fr(I(\varphi)) = \varphi^*$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|z - a| > 2\delta, \ \forall z \in \varphi^*. \tag{2.8}$$

Ahora, para $h \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |h| < \delta$ se tiene que $a + h \in I(\varphi)$ pues $|a + h - a| = |h| < \delta < 2\delta$. Además se verifica que

$$|z - a - h| \geq |z - a| - |h| > 2\delta - \delta > \delta, \ \forall z \in \varphi^*. \tag{2.9}$$

Como f es holomorfa, es continua y en particular podemos tomar

$$M = \max\{|f(z)| : z \in \varphi^*\}.$$

Gracias a la fórmula de Cauchy 2.2.28 (estamos en las hipótesis adecuadas) se tiene que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i h} \int_\varphi f(z) \left(\frac{1}{z - a - h} - \frac{1}{z - a} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i h} \int_\varphi \frac{h f(z)}{(z - a - h)(z - a)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z - a - h)(z - a)} dz.$$

Por tanto:

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z - a)^2} dz \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi f(z) \left(\frac{1}{(z - a - h)(z - a)} - \frac{1}{(z - a)^2} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - a} \left(\frac{1}{z - a - h} - \frac{1}{z - a} \right) dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{h f(z)}{(z - a - h)(z - a)^2} dz \right|$$

$$\underset{2.8 \ y \ 2.9}{\overset{z \in \varphi^*}{\leq}} \frac{|h|}{2\pi 4\delta^2 \cdot \delta} \left| \int_\varphi f(z) dz \right| \underset{2.2.27}{\overset{\uparrow}{\leq}} \frac{M \mathcal{L}(\varphi)}{8\pi\delta^3} |h|.$$

De donde, como $z = a + h$, $z \to a \Leftrightarrow h \to 0$, entonces haciendo tender $h \to 0$ se tiene que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z - a)^2} dz = 0 \Leftrightarrow f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z - a)^2} dz,$$

como queríamos probar. ■

El siguiente resultado es un proceso inductivo de este que acabamos de probar, la demostración es similar. Se puede consultar en [5] o en [8].

Teorema 2.2.33. *Sea $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado y simple, y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con $\varphi^* \cup I(\varphi) \subset \Omega$. Entonces para todo $a \in I(\varphi)$, $\exists f^{(n)}(a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se tiene*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$$

Con los teoremas 2.2.32 y 2.2.33 parece que hemos dado con una forma de calcular el valor de la derivada de una función holomorfa en un punto, pero **hemos hecho mucho más.** En efecto, si $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, dado cualquier $a \in \Omega$, con Ω abierto, podemos encontrar $R > 0$ tal que $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$ y tomar φ un camino simple tal que $\varphi^* = Fr(\overline{D}(a,R))$. De esta forma el teorema 2.2.33 nos dice que **existen las derivadas de cualquier orden en dicho punto**, es decir, **si la función es holomorfa en un abierto, entonces es infinitamente derivable.** Esto es algo que no ocurre en $\mathbb{R}$ y las funciones derivables, veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 2.2.34. Definimos la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

que es claramente continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. Además como 0 es un punto de acumulación, será continua en 0 si, y solo si, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Como

$$\left|x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x^2| \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, por lo que f es continua en $\mathbb{R}$. Además f es claramente derivable en el abierto $\mathbb{R} - \{0\}$ por ser composición de funciones derivables. Ahora, como

$$\left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

se tiene que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, luego $\exists f'(0) = 0$. De hecho,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Ahora bien, esta función no es continua en 0 pues el límite

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ni siquiera existe, por tanto $f'(x)$ **no** puede ser derivable en 0.
Aquí tenemos un ejemplo **de función real que es derivable una vez, pero no 2 y mucho menos infinitamente derivable.**

Nos disponemos ahora a probar la última de las implicaciones anunciadas.

Lema 2.2.35. *Sean $z, c \in \mathbb{C}$ con $z \neq c$. Entonces se verifica que, $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{1}{z-h-c} = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{(z-c)^{k+1}} + \frac{h^{n+1}}{(z-h-c)(z-c)^{n+1}}, \ \forall h \in \mathbb{C} : h \neq z-c.$$

Demostración.
Sea $h \in \mathbb{C}$ con $h \neq z-c$, entonces la suma $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{z-c}\left(\frac{h}{z-c}\right)^k$ es una serie geométrica (finita) de razón $\frac{h}{z-c} \neq 1$ por hipótesis. Entonces,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{z-c}\left(\frac{h}{z-c}\right)^k = \frac{\frac{1}{z-c} - \frac{h^n}{(z-c)^{n+1}} \cdot \frac{h}{z-c}}{1-\frac{h}{z-c}} = \frac{\frac{1}{z-c}\left(1-\frac{h^{n+1}}{(z-c)^{n+1}}\right)}{\frac{z-c-h}{z-c}} =$$

$$= \frac{(z-c)^{n+1}-h^{n+1}}{(z-c)^{n+1}(z-c-h)} = \frac{1}{z-c-h} - \frac{h^{n+1}}{(z-c)^{n+1}(z-c-h)},$$

de donde despejando obtenemos lo buscado. ■

Teorema 2.2.36 (Taylor)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω. Entonces, para todo $c \in \Omega$ existe $r_c > 0$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n, \ \forall z \in D(c, r_c).$$

Demostración.
Dado $c \in \Omega$, por ser un conjunto abierto encontramos $r_c, R \in \mathbb{R}^+$ con $0 < r_c < R$ tales que $D(c, r_c) \subset \overline{D}(c, R) \subset \Omega$. Tomamos un camino cerrado y simple φ tal que $\varphi^* = Fr(\overline{D}(c, R))$, de forma que $D(c, r_c) \subset I(\varphi) = D(c, R)$ y $\varphi^* \cup I(\varphi) \subset \Omega$. Así, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Fórmula integral de Cauchy 2.2.31 para cualquier $c + h \in D(c, r_c)$, obteniendo:

$$f(c+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-c-h}dz.$$

Ahora, como $\forall z \in \varphi^*$ se tiene que $\frac{|h|}{|z-c|} < 1$ podemos utilizar el lema 2.2.35, por lo que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f(c+h) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{k=0}^{n} h^k \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}}dz + h^{n+1}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}(z-c-h)}dz\right]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ Teorema 2.2.33}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}h^k + P_n, \ con \ P_n = \frac{h^{n+1}}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}(z-c-h)}dz.$$

Nuestro objetivo ahora es probar que $P_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En primer lugar, φ^* es un conjunto cerrado y acotado, luego compacto, por lo que (f es continua):

$$\exists M > 0 : |f(z)| \leq M, \ \forall z \in \varphi^*. \tag{2.10}$$

Además, como $c + h \in D(c, r)$ se tiene que $|h| < r$ y entonces:

$$\forall z \in \varphi^*, |z - c - h| \geq |z - c| - |h| > R - r. \tag{2.11}$$

Por tanto podemos acotar P_n por

$$|P_n| \leq \frac{|h|^{n+1}}{2\pi R^{n+1}(R-r)} \left| \int_\varphi f(z)dz \right| \underset{\substack{\uparrow \\ Propiedad 2.2.27}}{\leq} \frac{M\mathcal{L}(\varphi)}{2\pi(R-r)} \left(\frac{|h|}{R}\right)^{n+1}.$$

Como $|h| < r < R$ entonces $\frac{|h|}{R} < 1$ y por tanto

$$|P_n| \leq \frac{M\mathcal{L}(\varphi)}{2\pi(R-r)} \left(\frac{|h|}{R}\right)^{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

como queríamos ver. Así entonces tenemos que tomando límites en n en la expresión obtenida para $f(c + h)$, pues es válida para todo $n \in \mathbb{N}$, llegamos a

$$f(c + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} h^k,$$

y como $c + h$ era arbitrario en $D(c, r_c)$, probamos el resultado. ■

Observación 2.2.37. El radio r_c que se obtiene en el teorema anterior no es más que **el radio del mayor disco centrado en el punto** c contenido en el dominio de holomorfía de la función.

Con este teorema acabamos de probar que **toda función holomorfa es analítica**, y de hecho hemos dado una fórmula para calcular los coeficientes de la serie de potencias. Esto no ocurre en $\mathbb{R}$, pues una condición necesaria para ser analítica es ser infinitamente derivable, y en los reales ser derivable una vez no implica, como ya hemos visto, serlo infinitamente. Podemos recoger lo probado en esta sección en el siguiente corolario.

Corolario 2.2.38 (Equivalencias en $\mathbb{C}$, pero no en $\mathbb{R}$)**.**
Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, con Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Entonces equivalen:

i) f es holomorfa en Ω.

ii) f es analítica en Ω.

iii) f es infinitamente derivable en Ω.

2.3. Otros resultados importantes

En esta sección estudiaremos varios resultados del análisis complejo, que como veremos, no tienen una versión similar en variable real. La demostración de los mismos la podemos ver en [5] o en [8], aquí nos centraremos más en compararlos con el análisis real.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Liouville)**.**
Cualquier función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y acotada es constante.

Con este teorema podríamos probar algo que ya probamos en su momento, que las funciones $\sin(\cdot)$ y $\cos(\cdot)$ complejas no están acotadas, pues son holomorfas en todo $\mathbb{C}$ y obviamente no son constantes. **En los reales un afirmación similar sería falsa**, es decir, **una función derivable en sentido real en todo $\mathbb{R}$ y acotada no tiene por qué ser constante.** De hecho las mismas funciones trigonométricas nos sirven de ejemplo, tanto el $\sin(\cdot)$ como el $\cos(\cdot)$ son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ y acotadas, pero no son constantes.
De hecho, hay otro teorema más genérico que este, que da una cualidad que puede parecer asombrosa de las funciones complejas de variable compleja que son holomorfas en todo $\mathbb{C}$, este es el siguiente.

Teorema 2.3.2 (Teorema de Picard)**.**
Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y f no es constante entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(\mathbb{C}) \supset \mathbb{C} - \{\alpha\}$.

Esto le ocurre por ejemplo a la función $\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y se tiene $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$. En cambio en variable real no es cierto. Esto, por ejemplo, se puede ver con la misma función en versión real, pues la exponencial real es derivable (en sentido real) en todo $\mathbb{R}$, no es constante, pero $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

Teorema 2.3.3 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.**
$\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, es decir, todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ de grado $n \in \mathbb{N}$ tiene exactamente n raíces (contando la multiplicidad) en $\mathbb{C}$.

Quizás este teorema es de los más conocidos, incluso desde cursos muy tempranos de matemáticas, y es de gran importancia. Nos dice que toda ecuación polinómica tiene el mismo número de raíces que el grado del polinomio. Este hecho es bien sabido que no se cumple en $\mathbb{R}$, por ejemplo con ecuaciones de segundo grado, como $x^2 + 1 = 0$, nos encontramos que no tiene soluciones reales.
Aunque este teorema no es cierto en $\mathbb{R}$, si nos puede ayudar con el estudio de las raíces de una ecuación polinómica real. Esto es, si $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,\ a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{0, ..., n\}$, el hecho de que $z \in \mathbb{C}$ sea raíz de esta ecuación implica que $\overline{z}$ también lo es, pues $a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z} + \cdots + a_0 = \overline{a_n z^n} + \cdots + \overline{a_0} = \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0} = 0$. Así, podemos aplicar el teorema anterior para saber que tiene tantas raíces como grado el polinomio (en $\mathbb{C}$) y después usar esto que hemos comentado. Por ejemplo, **en ecuaciones de grado 3, tendríamos garantizado que siempre tiene al menos una raíz real,** hecho que ya probamos en el primer capítulo.

Teorema 2.3.4 (Teorema de extensión de Riemann)**.**
Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $\alpha \in \Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega - \{\alpha\}$. Equivalen:

i) *f tiene una extensión holomorfa en Ω, es decir, $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega) : g(z) = f(z),\ \forall z \in \Omega - \{\alpha\}$.*

ii) *f tiene una extensión continua en Ω, es decir, $\exists g \in \mathcal{C}(\Omega) : h(z) = g(z)\ \forall z \in \Omega - \{\alpha\}$.*

iii) *f está acotada en algún entorno de α en $\Omega - \{\alpha\}$.*

iv) $\lim\limits_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z) = 0$.

El teorema nos caracteriza la existencia de extensiones holomorfas de una función dada, y aunque puedan parecer condiciones muy restrictivas, no lo son tanto.
El resultado análogo no sería cierto en $\mathbb{R}$, basta por ejemplo considerar la función $|\cdot|: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $|x| = -x$ si $x < 0$ y $|x| = x$ si $x > 0$.Esta función es derivable en su dominio, y tiene una extensión continua obvia, definiendo $|0| = 0$, pero no es derivable en 0, pues $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|-0}{x-0}$.

Teorema 2.3.5 (Teorema de Convergencia de Weierstrass)**.**
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones complejas holomorfas en Ω. Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, y sea

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z),\ \ z \in \Omega,$$

la función límite puntal. Entonces:

i) *f es holomorfa en Ω.*

ii) *Para cada natural k la sucesión de derivadas k-ésimas $\{f_n^{(k)}\}$ converge uniformemente sobre compactos de Ω a la derivada k-ésima $f^{(k)}$ de la función límite.*

De nuevo, **esto no es cierto en el análisis real.** El Teorema de Stone-Weierstrass afirma que todo función continua sobre un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ es límite uniforme de funciones polinómicas. Por tanto, para dar un contraejemplo bastaría tomar la función valor absoluto, en $[-1, 1]$, que sería el límite uniforme de una sucesión de polinomios, y por tanto derivables, pero que no sería derivable en 0.
A pesar de todo esto, si hay una versión "similar" de este teorema en análisis real. Lo que se exige en este caso para garantizar que el límite uniforme es derivable no es la convergencia uniforme de la sucesión de funciones, sino el de las correspondientes derivadas. Se puede ver esto con más detalle en [10].

Teorema 2.3.6 (Principio de identidad para funciones holomorfas)**.**
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto y conexo, y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω. Si $T = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ es el conjunto de los ceros de f, y $T' \cap \Omega \neq \varnothing$, entonces $f \equiv 0$ en Ω (T' denota la acumulación topológica de T).

Como consecuencia, los ceros de una función holomorfa en un dominio (abierto y conexo) no idénticamente nula son aislados. **Todo esto está muy lejos de ocurrir con las funciones derivables en** $\mathbb{R}$. Por ejemplo, si definimos la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

, que es claramente derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, y $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$ por lo que también lo es en 0 y $f'(0) = 0$. En este caso los ceros de f son $T = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} = \mathbb{R}_0^-$, cuya acumulación es el mismo y obviamente interseca a $\mathbb{R}$, pero f no es idénticamente nula.

Teorema 2.3.7 (Principio del módulo máximo para funciones holomorfas)**.**
Sea $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Entonces se tiene:

i) Si la función $|f|$ tiene un máximo relativo en $z_0 \in \Omega$, entonces f es constante en algún entorno de z_0.

ii) Si Ω es abierto, conexo y acotado, y f es además de holomorfa en Ω, continua en $\overline{\Omega}$, entonces f es constante en Ω o el máximo absoluto de $|f|$ se alcanza en $Fr(\Omega)$ (y no en Ω).

La historia se vuelve a repetir, esto no ocurre con las funciones derivables en sentido real. Por ejemplo, si definimos la función $f\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x$, se tiene que el valor absoluto de f coincide con ella, y además f tiene un máximo en $x_0 = 1$, es derivable en $]0,2[$ que es abierto, conexo y acotado, pero f obviamente no es constante en ningún entorno de x_0. De hecho esta misma función nos sirve también de contraejemplo para el segundo punto, pues además, f es continua en $\overline{]0,2[} = [0,2]$, es no constante y el máximo se alcanza en el interior (en $x_0 = 1$) y no en la frontera.

Capítulo 3
Ecuaciones diferenciales lineales complejas de variable compleja. Núcleo de la ecuación del calor

3.1. Ecuaciones diferenciales lineales complejas de variable compleja

En esta sección presentaremos otra gran diferencia entre el análisis real y el análisis complejo, ahora en el ámbito de las ecuaciones diferenciales. Se usarán principalmente las referencias [11] y [12].

Introducción y algunos resultados en ecuaciones lineales reales de variable real

Definición 3.1.1.

- Una ecuación diferencial lineal de orden $k \in \mathbb{N}$ es una ecuación del tipo

$$x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = b \tag{3.1}$$

  con $a_j, b\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ funciones continuas $\forall j \in \{0, ..., k-1\}$ en un dominio (subconjunto abierto y conexo) $\Omega \subset \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y la incógnita es una función $x\colon \Omega_1 \subset \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$. La ecuación se dirá homogénea si $b \equiv 0$.

- Una función $x\colon \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ se dirá que es solución de la ecuación diferencial 3.1 si $\Omega_1 \subset \Omega$ es un dominio, $x \in C^k(\Omega_1)$ y verifica la ecuación, es decir, $\forall t \in \Omega_1$ se tiene

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t).$$

  Denotaremos por S^k_Ω al conjunto de todas las soluciones de 3.1 en Ω.

Observación 3.1.2. Si la ecuación se está tratando en variable real, que Ω sea un dominio no es más que $\Omega = I$ con I un intervalo real abierto. En el caso de tratarse de una ecuación compleja de variable compleja, por las equivalencias estudiadas en el capítulo anterior, si $x\colon \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ es una solución, entonces $x \in \mathcal{H}(\Omega_1)$, o si se prefiere, x es analítica en Ω_1.

El espacio vectorial de las funciones

Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{K}$, consideramos $\mathcal{F} = \{f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{K}\}$ el conjunto de todas las funciones de Ω sobre $\mathbb{K}$. En él se definen las operaciones suma, $(f+g)(t) = f(t)+g(t), \forall t \in \Omega$, y el producto por escalares, $(\lambda f)(t) = \lambda f(t), \forall t \in \Omega$, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Es inmediato comprobar que estas operaciones dotan a $\mathcal{F}$ de estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y como espacio vectorial que es, podemos usar las definiciones de independencia lineal, bases, dimensión y los resultados conocidos de álgebra lineal.
En el caso de que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\Omega = I$ entonces $C^k(I) \subset \mathcal{F}$, $C(I) \subset \mathcal{F}$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}$. Con esto nos disponemos a probar que **en $\mathbb{R}$ la continuidad de $a_j, j \in \{0, ..., k-1\}$ en 3.1 asegura que el espacio de soluciones de la ecuación lineal homogénea tiene dimensión exactamente igual al orden, hecho que como veremos no ocurre necesariamente en $\mathbb{C}$.** Para ello usaremos el Teorema de Existencia y Unicidad de ecuaciones diferenciales reales, cuya demostración omitiremos, pero se pueden ver algunos detalles en [12].

Teorema 3.1.3 (Existencia y unicidad de soluciones en el caso real)**.**
Dados $k \in \mathbb{N}$, un intervalo I abierto de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, números $\alpha_0, ..., \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ y las funciones continuas $a_0, ..., a_k, b\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces existe una única función $x \in C^k(I)$ tal que

$$\begin{cases} x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = b \\ x(t_0) = \alpha_0, ..., x^{(k-1)}(t_0) = \alpha_{k-1} \end{cases}$$

Este teorema nos aporta, además de la existencia y unicidad, la globalidad de la solución, es decir, la solución estará definida en el mismo intervalo en el que estén definidas las funciones a_j, b para $j \in \{0, ..., k-1\}$.

Teorema 3.1.4 (Dimensión del espacio de soluciones reales de variable real)**.**
El espacio de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea (real de variable real) es un espacio vectorial de dimensión exactamente el orden de la ecuación.

Demostración.
Partimos de una ecuación del tipo

$$x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0,$$

con a_j continuas en I un intervalo abierto, $\forall j \in \{0, ..., k-1\}$ y $k \in \mathbb{N}$ dado. Definimos el operador

$$\begin{array}{rcccl} L & : & C^k(I) & \longrightarrow & C(I) \\ & & x & \longmapsto & x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x \end{array}$$

que está bien definido pues dicha combinación es continua al serlo los a_j y ser x de clase k. Además se tiene que $L(x+y) = L(x) + L(y), \forall x, y \in C^k(I)$ y $L(\lambda x) =$

$\lambda L(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in C^k(I)$. Por tanto L es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal del espacio vectorial $C^k(I)$ en el espacio vectorial $C(I)$. Además,

$$Ker(L) = \{x \in C^k(I) : L(x) = 0\} = S_I^k,$$

donde la última igualdad es consecuencia del teorema 3.1.3 (nos da la globalidad de las soluciones). Como S_I^k es el núcleo de una aplicación lineal, tenemos que es un subespacio vectorial de $C^k(I)$. Vamos a ver que su dimensión es justamente k. Para ello fijamos $t_0 \in I$ y definimos

$$\begin{array}{rcccc} \psi_{t_0} & : & Ker(L) & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ & & x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ ... \\ x^{k-1}(t_0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Como primera observación, ψ_{t_0} es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal, es decir $\psi_{t_0}(x+y) = \psi_{t_0}(x) + \psi_{t_0}(y)$ y $\psi_{t_0}(\lambda x) = \lambda \psi_{t_0}(x), \forall x \in Ker(L), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ debido a la linealidad de la derivada. Veremos que ψ_{t_0} es un isomorfismo. Sean $x, y \in Ker(L)$ tales que $\psi_{t_0}(x) = \psi_{t_0}(y)$. Como ambas pertenecen a $Ker(L)$ ambas son soluciones de la ecuación homogénea, y como $\psi_{t_0}(x) = \psi_{t_0}(y)$ entonces ambas tienen igual condición inicial para t_0, por lo que el teorema 3.1.3 asegura que $x = y$ y por tanto ψ_{t_0} es inyectiva. Por otro lado, dado un vector $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$, de nuevo el teorema 3.1.3 nos asegura que existe una solución (de hecho única) en $Ker(L) = S_I^k$ tal que $x(t_0) = \alpha_0, ..., x^{(k-1)}(t_0) = \alpha_{k-1}$. Por tanto $\psi_{t_0}(x) = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})$, y concluimos que ψ_{t_0} es sobreyectiva.
Por tanto tenemos que ψ_{t_0} es un **isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal** de $Ker(L)$ en $\mathbb{R}^k$, luego $\dim(S_I^k) = \dim(Ker(L)) = \dim(\mathbb{R}^k) = k$, como queríamos probar. ■

Otra gran diferencia entre el análisis real y el análisis complejo

Contrariamente a lo que sucede en variable real, en el plano complejo, que las funciones $a_j, j \in \{0, ..., k-1\}$ en 3.1 sean continuas **no es suficiente** para garantizar que el espacio de soluciones de la ecuación lineal homogénea tenga dimensión igual al orden de la ecuación. La clave está en que en los complejos, el teorema 3.1.3 no es cierto con hipótesis tan débiles. Tenemos un resultado análogo pero más restrictivo, que enunciamos a continuación y cuya demostración se puede ver en [13].

Teorema 3.1.5 (Existencia y unicidad en $\mathbb{C}$).
*Dado $k \in \mathbb{N}$, un **dominio simplemente conexo** $\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, números $\alpha_0, ..., \alpha_{k-1} \in \mathbb{C}$ y las funciones **analíticas** $a_0, ..., a_{k-1} \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces existe una única función x analítica en Ω tal que*

$$\begin{cases} x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0 \\ x(z_0) = \alpha_0, ..., x^{(k-1)}(z_0) = \alpha_{k-1} \end{cases}$$

Al igual que ocurría en los reales, este teorema no solo nos proporciona la existencia y unicidad de solución, sino que también afirma que la solución está definida dónde los coeficientes sean analíticos (nos proporciona globalidad).

Corolario 3.1.6 (Dimensión del espacio de soluciones complejas de variable compleja)**.**
El espacio de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea 3.1 (compleja de variable compleja), con coeficientes a_j analíticos en un dominio ***simplemente conexo****, es un espacio vectorial de dimensión exactamente el orden de la ecuación.*

Demostración.
La demostración se sigue de la propia demostración de 3.1.4 cambiando $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$, I por Ω, y el operador L ahora definido de $\mathcal{H}(\Omega)$ en $\mathcal{H}(\Omega)$, y haciendo uso del teorema 3.1.5. ■

Nuestro objetivo es probar que realmente el recíproco es también cierto. Es decir, si el espacio de soluciones tiene dimensión igual al orden de la ecuación, entonces los coeficientes son analíticos. Para ello enunciaremos y demostraremos algunos lemas previos. En lo que sigue en esta sección, consideraremos la ecuación lineal homogénea 3.1 expresada de la siguiente forma equivalente:

$$x^{(k)} = a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x, \tag{3.2}$$

$$a_j \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \textit{ continuas con } \Omega \subset \mathbb{C} \textit{ un dominio.}$$

Definición 3.1.7. Diremos que una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, tiene un cero de orden $k \in \mathbb{N}$ en $a \in \Omega$ si existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(a) \neq 0$ y

$$f(z) = (z-a)^k g(z), \ \forall z \in \Omega.$$

Lema 3.1.8. *Si x es una solución de 3.2 y tiene un cero de orden k, entonces $x \equiv 0$.*

Demostración.
Supongamos que $x \colon \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ es una solución y que $z_0 \in \Omega_1$ es un cero de orden k de x. Entonces sabemos que $x^{(n)}(z_0) = 0, \ \forall n \in \{0, ..., k-1\}$ y de 3.2 tendríamos entonces que $x^{(k)}(z_0) = 0$ y por tanto sería realmente un cero de orden al menos $k+1$. Supongamos por reducción al absurdo que x no es idénticamente nula, entonces $\exists p \in \mathbb{Z}$ tal que x tiene un cero de orden $k+p$ en z_0. Encontramos por tanto $r > 0$ tal que

$$x(z) = (z-z_0)^{k+p} f(z), \ \forall z \in D(z_0, r),$$

y donde f es una función holomorfa en $D(z_0, r)$ tal que $f(z_0) \neq 0$. Si consideramos la derivada, tenemos que

$$((z-z_0)^{k+p} f(z))' = (k+p)(z-z_0)^{k+p-1} f(z) + (z-z_0)^{p+1} h_1(z), \ \forall z \in D(z_0, r),$$

donde $h_1(z) = (z - z_0)^{k-1} f'(z)$. Siguiendo este proceso, para cada $j \in \{0, ..., k\}$ podemos encontrar h_k continua tal que , $\forall z \in D(z_0, r)$,

$$x^{(j)} = (k+p)(k+p-1)\cdots(k+p-(j-1))(z-z_0)^{k+p-j} f(z) + (z-z_0)^{p+1} h_j(z).$$

Sustituyendo en 3.2 y reagrupando tenemos

$$(k+p)(k+p-1)\cdots(p+1)(z-z_0)^p f(z) = (z-z_0)^{p+1} h(z),\ \forall z \in D(z_0, r),$$

donde h es una función continua (será combinación de las funciones h_j y coeficientes de la ecuación). De aquí se sigue que

$$(k+p)(k+p-1)\cdots(p+1) f(z) = (z-z_0) h(z),\ \forall z \in D(z_0, r) - \{z_0\},$$

con z_0 un punto de acumulación en dicho disco. Haciendo tender $z \to z_0$ llegamos a que (como h es continua)

$$(k+p)(k+p-1)\cdots(p+1) f(z_0) = 0,$$

lo que implicaría $f(z_0) = 0$, pero sabemos que esto no es cierto, y llegamos a un absurdo al suponer que x no era idénticamente nula. ■

Lema 3.1.9. *El espacio de soluciones S_Ω^k de 3.2 es un espacio vectorial con dimensión menor o igual que el orden, es decir,* $\dim(S_\Omega^k) \leq k$.

Demostración.
Que S_Ω^k es un espacio vectorial es ya conocido. Supongamos por reducción al absurdo que $\dim(S_\Omega^k) > k$, entonces existen $x_1, ..., x_{k+1}$ funciones linealmente independientes de S_Ω^k. Sea $z_0 \in \Omega$ y consideramos el sistema

$$\lambda_1 x_1^{(n)}(z_0) + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}^{(n)}(z_0) = 0,\ n = 0, ..., k-1,$$

con $k+1$ incógnitas $(\lambda_1, ..., \lambda_{k+1})$ y k ecuaciones. Por tanto, como tenemos más incógnitas que ecuaciones, podemos garantizar la existencia de una solución no trivial $(\lambda_1, ..., \lambda_{k+1}) = (c_1, ..., c_{k+1})$. Entonces la función $c_1 x_1 + \cdots + c_{k+1} x_{k+1} \in S_\Omega^k$ tiene un cero de orden k en z_0. Usando el lema anterior 3.1.8 se tiene que $c_1 x_1 + \cdots + c_{k+1} x_{k+1} = 0$ en Ω, pero esto contradice que $x_1, ..., x_{k+1}$ sean linealmente independientes, llegando a un absurdo. ■

Teorema 3.1.10. *Para un dominio simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, donde todas las funciones coeficiente a_j en 3.2 son continuas, se tiene que* $\dim(S_\Omega^k) = k$ *si, y solo si, a_j son analíticas en Ω para todo $j = 0, ..., k-1$.*

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ Haremos inducción sobre el orden de la ecuación k de 3.2. Consideramos la ecuación de primer orden homogénea

$$x' = a(z)x,$$

con a una función continua en Ω. Por hipótesis, tenemos que $\dim(S^1_\Omega) = 1$, por lo que existe $f \in S^1_\Omega$ una solución no trivial. Como $f \not\equiv 0$, consideremos $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) \neq 0$, y tendremos que $f(z) \neq 0$ en algún entorno de z_0. En dicho entorno tenemos que

$$a(z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

por lo que al ser f solución, es analítica y por tanto también lo sería a en z_0. Así, para todo $z \in \Omega$ tal que $f(z) \neq 0$ tendríamos lo buscado. Como los ceros de una función analítica son aislados, en dichos casos la continuidad de a y el Teorema de extensión de Riemann 2.3.4 aseguran que a también es analítica, lo que acaba el caso $k = 1$ de la inducción. Para completar la prueba por inducción deberíamos, supuesto cierto para k, probarlo para $k + 1$. Esto requiere de una gran cantidad de operaciones y manipulaciones algebraicas que se escapan de nuestro propósito. Podemos ver esto con cierto detalle en [11].

$\boxed{\Leftarrow}$ Esta implicación nos la da directamente el corolario 3.1.6. ■

Este teorema pone de manifiesto lo que ya anunciábamos, otra gran diferencia entre el análisis real y el análisis complejo. En los reales, que los coeficientes sean continuas es suficiente para que el espacio de soluciones mencionado tenga igual dimensión que el orden de la ecuación, pero en cambio en los complejos se requiere no solo continuidad sino también analiticidad. Veremos algunos ejemplos de la utilidad del mismo.

Ejemplo 3.1.11.

1. Si consideramos la ecuación diferencial en el plano complejo

$$x'(z) = |z|x(z), \ z \in \mathbb{C},$$

tenemos que $x \equiv 0$ es una solución, y de hecho veremos que es la única. La función $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x + iy \in \mathbb{C}$ es continua en todo $\mathbb{C}$, en cambio tenemos que para $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$,

$$\frac{\partial Ref(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq \frac{\partial Imf(x,y)}{\partial y} = 0,$$

luego por las ecuaciones de Cauchy-Riemann 2.2.6 f no es derivable en $\mathbb{C} - \{0\}$, y por tanto no es analítica aquí. En consecuencia, por el teorema 3.1.10 la dimensión del espacio de soluciones no puede ser igual al orden, y como sabemos por el lema 3.1.9 entonces $\dim(S^1_\mathbb{C}) = 0$. Como cualquier solución no idénticamente nula sería linealmente independiente con ella y $\dim(S^1_\mathbb{C}) = 0$, concluimos que la única solución posible es $x \equiv 0$.

Quizás en este caso pueda no verse el potencial de estos resultados ya que es una ecuación de primer orden. Veamos otro caso.

2. Consideremos ahora la ecuación

$$x'''(z) = |z|zx''(z) - |z|x'(z),\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Tenemos que $x \equiv 1$ y $x(z) = \frac{z^2}{2}$ son soluciones. Que $x \equiv 1$ es solución es claro pues sus derivadas son nulas. En el caso de $x(z) = \frac{z^2}{2}$, como $x'(z) = z, x''(z) = 1, x'''(z) = 0$ se sigue, sustituyendo, que también es solución. Además,

$$\lambda \cdot 1 + \mu \frac{z^2}{2} = 0, \forall z \in \mathbb{C}$$

implica necesariamente que $\lambda = \mu = 0$ y por tanto son soluciones linealmente independientes de la ecuación. De nuevo como antes, $|z|$ no es analítica en $\mathbb{C}$, y razonando igual llegaríamos a que $\dim(S^3_{\mathbb{C}}) < 3$, por lo que las funciones $x \equiv 1$ y $x(z) = \frac{z^2}{2}$ son base del espacio de soluciones y $\dim(S^3_{\mathbb{C}}) = 2$.

3.2. Núcleo de la ecuación del calor

En esta sección pretendemos deducir, con ayuda de algunos resultados de variable compleja ya estudiados, lo que se denomina núcleo de la conocida ecuación del calor que presentaremos a continuación. Esta sección esta basada sobre todo en [14], y también se pueden consultar algunos resultados si se necesita con más detalle en [15], [16] o [17].

Definiciones y conocimientos previos

Definición 3.2.1 (Problema de Cauchy para la ecuación del calor)**.** Es un problema de la forma

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta_x u(x,t)\ , x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \text{ (ecuación del calor)} \quad (3.3)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad , x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ y $\Delta_x u(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2}$. Una solución de dicho problema es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisfaga la ecuación puntualmente, con

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > 0\}.$$

Enunciaremos el siguiente teorema que nos será de utilidad, extraído de [14] y [16].

Teorema 3.2.2 (Principio del máximo-mínimo)**.**
Sea O un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $T > 0$. Notemos $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in O, 0 < t < T\}$.

Entonces si u es de clase 2 respecto la variable x en Ω, de clase 1 respecto a t en Ω y además $u \in C(\overline{\Omega})$ verifica

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta_x u(x,t) = 0, \ \forall (x,t) \in \Omega,$$

se tiene que

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial_t \Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial_t \Omega} u,$$

donde $\partial_t \Omega$ es la denominada frontera parabólica de Ω que se define como

$$\partial_t \Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in Fr(O), 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in O, t = 0\}.$$

El estudio del núcleo de la ecuación del calor es una de las mejores motivaciones para la introducción de la transformada de Fourier. Como vamos a necesitar algunos conceptos e ideas sobre esta teoría para conseguir nuestro objetivo, vamos a dar unas pinceladas a continuación. En lo que sigue en esta sección, consideraremos el problema que estamos tratando para $n = 1$ y así trabajar con funciones integrables en $\mathbb{R}$, en el sentido de Lebesgue.

Transformada de Fourier

Definición 3.2.3 (Transformada de Fourier)**.** Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ (funciones Lebesgue integrables). Se define la transformada de Fourier de f, y se denota por $\hat{f}$, como

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx, \ y \in \mathbb{R}.$$

Observación 3.2.4. Cabe mencionar que al ser f una función Lebesgue integrable, la anterior definición está bien hecha. El factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ es simplemente un factor normalizador, y la transformada puede definirse de formas equivalentes con otros factores.

Definición 3.2.5 (Transformada inversa de Fourier)**.** Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se define la transformada inversa de Fourier de f, y se denota por $\check{f}$, como

$$\check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx, \ y \in \mathbb{R}.$$

La idea es ver que realmente la transformada y la transformada inversa son operadores inversos uno del otro, pero para esto hay que restringirse a una clase de funciones más pequeña que $L^1(\mathbb{R})$. Recogemos esto en el siguiente teorema, bien conocido en la teoría del análisis de Fourier. Su demostración se puede consultar en [16] y [17].

Teorema 3.2.6 (Teorema de inversión)**.** *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ entonces se verifica que $f = \hat{\check{f}} = \check{\hat{f}}$.*

Deducción del núcleo de la ecuación del calor

Lo que llamamos núcleo de la ecuación del calor surge de manera natural al intentar encontrar la única solución acotada del problema 3.3. Por ello es interesante saber que, en el caso de buscar soluciones acotadas del problema, de existir esta, es única. Veremos esto en el siguiente lema, y recordemos que estamos tratando el caso $n = 1$ aunque todo esto es cierto en general para cualquier dimensión.

Lema 3.2.7. *El problema 3.3, tiene, a lo sumo, una solución acotada.*

Demostración.
Probaremos primero que la única solución acotada en el caso de que $\varphi \equiv 0$ es la función $u \equiv 0$, es decir es la única solución acotada del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{x^2}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) &= 0 \qquad\qquad , \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sea u una solución acotada de dicho problema. Entonces existe alguna constante positiva $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|u(x,t)| \leq M, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0$. Sea $R \in \mathbb{R}^+$ arbitrario y consideramos el dominio $A(R) =]-R, R[\times]0, T[$ para $T > 0$. Definimos la función

$$v(x,t) = \frac{2M}{R^2}\left(\frac{x^2}{2} + t\right), \ (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[.$$

Como $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{2M}{R^2} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$ tenemos que se cumple la ecuación del calor. Además en la frontera parabólica de $A(R)$, $\partial_t A(R) = (\{-R, R\} \times [0, T]) \cup (]-R, R[\times\{0\})$ se tiene que:

- Si $x \in]-R, R[$ entonces $t = 0$ y por tanto
$$v(x,0) = \frac{2M}{R^2}\left(\frac{x^2}{2}\right) \geq 0 = |u(x,0)|.$$
- Si $x \in \{-R, R\}$ entonces $t > 0$ y así
$$v(x,t) = \frac{2M}{R^2}\left(\frac{x^2}{2} + t\right) > \frac{2M}{R^2}\left(\frac{x^2}{2}\right) = M \geq |u(x,t)|.$$

En cualquier caso, $|u(x,t)| \leq v(x,t), \ \forall (x,t) \in \partial_t A(R), \ \forall R \in \mathbb{R}^+$. Utilizando el principio del máximo-mínimo 3.2.2 se tendría que $|u(x,t)| \leq v(x,t), \ \forall x \in \overline{A(R)}$. Como esto se da para cualquier $R \in \mathbb{R}^+$, podemos hacer tender $R \to +\infty$ obteniendo $|u(x,t)| \leq 0, \ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, T[$ para cualquier $T > 0$, por tanto $u \equiv 0$ es la única solución acotada si $\varphi \equiv 0$.
Ahora supuesto que hubiese dos soluciones acotadas del problema para una cierta función φ, supongamos u, v. Entonces por la linealidad de las derivadas $u - v$ cumpliría la ecuación del calor, y además $u(x,0) = v(x,0) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}^+$. Por tanto $u - v$ sería una solución acotada del problema para una condición de frontera $\psi \equiv 0$. Por el caso anterior deducimos entonces que $u - v \equiv 0$ y por tanto esto concluye la demostración. ■

Obtención de soluciones acotadas de la ecuación del calor

Vamos a buscar entonces una solución u acotada, siguiendo el método de separación de variables, y en dicho proceso obtendremos el núcleo de la ecuación del calor. Supongamos que $u(x,t) = X(x)T(t)$ es dicha solución acotada, entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} & = & X(x)T'(t) \\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & X''(x)T(t) \end{array}\right\} \Rightarrow X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

Buscando soluciones no triviales podemos suponer $X \not\equiv 0, T \not\equiv 0$ y llegamos a

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}, \ \forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[.$$

Por tanto, forzosamente debe existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda, \ \forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,$$

de donde se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{rcll} X''(x) - \lambda X(x) & = & 0 & , \ x \in \mathbb{R}, \\ T'(t) - \lambda T(t) & = & 0 & , \ t > 0. \end{array} \tag{3.4}$$

Resolviendo la primera ecuación diferencial, con polinomio característico $m^2 - \lambda = 0$, obtenemos $m_\pm = \pm\sqrt{\lambda}$. Si $\lambda > 0$ entonces una base del espacio de soluciones es $\{e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}\}$ que proporciona soluciones de la forma $X(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}, \ a, b \in \mathbb{R}$. Como estamos buscando soluciones acotadas de u, esta posibilidad la descartamos, por lo que podemos suponer $\lambda \leq 0$ y considerar las ecuaciones 3.4 equivalentes a

$$\begin{array}{rcll} X''(x) + \lambda^2 X(x) & = & 0 & , \ x \in \mathbb{R}, \\ T'(t) + \lambda^2 T(t) & = & 0 & , \ t > 0, \end{array} \tag{3.5}$$

con ahora $\lambda \in \mathbb{R}$. Si resolvemos, de la primera tenemos el polinomio característico $m^2 + \lambda^2 = 0$ dando soluciones $m_\pm = \pm\sqrt{-\lambda^2} = \pm i\lambda$, obteniendo así las soluciones (complejas) $X(x) = a(\lambda)e^{i\lambda x}$, con $a(\lambda) \in \mathbb{R}$ una constante que dependerá de λ. De igual forma resolviendo la ecuación para T obtenemos $T(t) = b(\lambda)e^{-\lambda^2 t}$ para $b(\lambda) \in \mathbb{R}$ una constante que también dependerá de λ. Uniendo todo esto, tenemos que $u(x,t) = A(\lambda)e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}$ sería una solución acotada, con $A(\lambda) \in \mathbb{R}$.
La idea ahora es calcular la (única) solución acotada a partir de las soluciones acotadas anteriores (dependientes de λ). Con la idea de hacer uso de algún tipo de "principio de superposición" y "sumar" todas las anteriores, se considera la función

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)e^{-\lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda, \ x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{3.6}$$

Ahora viene la importancia de haber introducido la transformada de Fourier. La función A se deberá escoger de forma que

$$u(x,0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Exigiendo como condiciones adicionales que $\varphi, A \in L^1(\mathbb{R})$ entonces

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda = \sqrt{2\pi}\check{A}(\lambda),$$

y usando el Teorema de Inversión de la transformada de Fourier 3.2.6

$$A(\lambda) = \hat{\check{A}}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{\varphi}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)e^{-i\lambda y}dy.$$

Sustituyendo en la expresión 3.6 llegamos a

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)e^{-i\lambda y}dy\right) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}d\lambda.$$

Ahora debemos tener en cuenta que todas las funciones que aparecen bajo los signos integrales son, al menos, Lebesgue integrables ($L^1(\mathbb{R})$). Por tanto, usando el Teorema de Fubini podemos integrar en el orden que nos interese, así que llegamos a la expresión

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t + i\lambda(x-y)}d\lambda\right) \varphi(y)dy, \ x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{3.7}$$

Llegados a este punto, parecería que no podemos continuar ni simplificar más esta expresión. Ahora entra en juego la variable compleja y su gran versatilidad. Vamos a demostrar una interesante fórmula que relaciona una integral compleja con una real bien conocida.

Lema 3.2.8. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-i\alpha)^2}du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du.$$

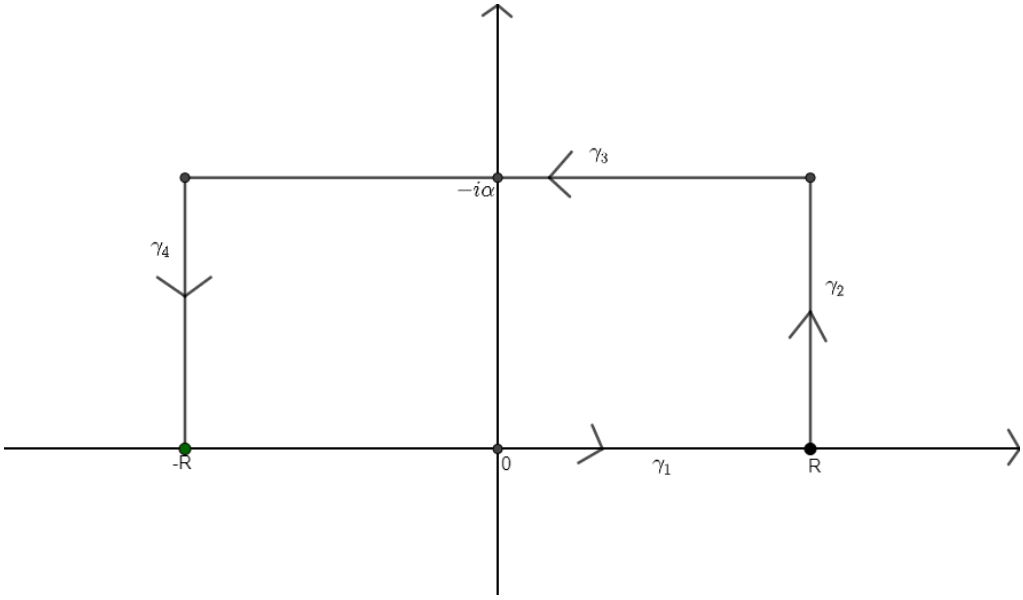
Demostración.
Que ambas funciones son integrables, y por tanto las integrales están bien definidas, es claro. Antes de continuar, cabe destacar que se cumple la igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-i\alpha)^2}du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+i\alpha)^2}du, \ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

ya que por la paridad de la función, $e^{-(u-i\alpha)^2} = e^{-(-u+i\alpha)^2}$, y si hacemos el cambio de variable $t = -u$ tenemos, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-i\alpha)^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(-u+i\alpha)^2} du = -\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-(t+i\alpha)^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+i\alpha)^2} dt.$$

Por tanto, basta probar la igualdad para $\alpha < 0$ (para $\alpha = 0$ no hay nada que probar). Sea $R \in \mathbb{R}^+$ arbitrario y $\alpha < 0$, y consideramos la situación ilustrada a continuación:



donde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ y γ_4 son los caminos definidos por

$$\gamma_1 \colon [-R, R] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = t,$$

$$\gamma_2 \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = (1-t)R + t(R - i\alpha) = R - i\alpha t,$$

$$\gamma_3 \colon [-R, R] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_3(t) = -t - i\alpha,$$

$$\gamma_4 \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_4(t) = (1-t)(-R - i\alpha) + t(-R) = i\alpha t - R - i\alpha.$$

Consideramos ahora la función $f(z) = e^{-z^2}$, $z \in \mathbb{C}$ que es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, y el camino yuxtaposición de los anteriores $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$. Tenemos entonces un camino cerrado y simple en las condiciones de aplicar el Teorema de Cauchy 2.2.28 obteniendo

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{3.8}$$

Ahora si calculamos explícitamente dicha integral,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz =$$

$$= \int_{-R}^{R} e^{-t^2} dt - i\alpha \int_0^1 e^{-(R-i\alpha t)^2} dt - \int_{-R}^{R} e^{-(-t-i\alpha)^2} dt + i\alpha \int_0^1 e^{-(i\alpha t - R - i\alpha)^2} dt. \quad (3.9)$$

Nuestro objetivo es pasar al límite cuándo $R \to +\infty$, y para ello vamos a estudiar que les ocurre a la segunda y cuarta integral en este caso. Para cualquier $\alpha < 0$ se tiene:

$$\left| i\alpha \int_0^1 e^{-(R-i\alpha t)^2} dt \right| \leq -\alpha \int_0^1 \left| e^{-R^2+\alpha^2 t^2} \right| \left| e^{i(2R\alpha t)} \right| dt \underset{\substack{\uparrow \\ max\ t=1}}{\leq} -\alpha e^{\alpha^2} \int_0^1 \left| e^{-R^2} \right| dt$$

$$= -\alpha e^{\alpha^2} e^{-R^2} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (3.10)$$

$$\left| i\alpha \int_0^1 e^{-(i\alpha(1-t)-R)^2} dt \right| \leq -\alpha \int_0^1 \left| e^{-R^2+\alpha^2(1-t)^2} \right| \left| e^{i(-2R\alpha(1-t))} \right| dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ max\ t=0}}{\leq} -\alpha e^{\alpha^2} \int_0^1 \left| e^{-R^2} \right| dt \leq -\alpha e^{\alpha^2} e^{-R^2} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (3.11)$$

Por otro lado, haciendo el cambio de variable $u = -t$ en la tercera integral de 3.9:

$$\int_{-R}^{R} e^{-(-t-i\alpha)^2} dt = -\int_{R}^{-R} e^{-(u-i\alpha)^2} du = \int_{-R}^{R} e^{-(u-i\alpha)^2} du.$$

Con esto, y por 3.8 tenemos, $\forall R \in \mathbb{R}^+$:

$$0 = \int_{-R}^{R} e^{-t^2} dt - i\alpha \int_0^1 e^{-(R-i\alpha t)^2} dt - \int_{-R}^{R} e^{-(t-i\alpha)^2} dt + i\alpha \int_0^1 e^{-(i\alpha t - R - i\alpha)^2} dt.$$

Haciendo tender $R \to +\infty$, teniendo en cuenta que el límite de la suma es la suma de los límites porque existe el límite de cada sumando y usando 3.10 y 3.11 obtenemos

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-i\alpha)^2} dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-i\alpha)^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt, \ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

como se quería probar. ■

Nos disponemos ahora a simplificar la expresión 3.7, y para ello pretendemos estudiar la integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t + i\lambda(x-y)} d\lambda$. Como

$$-\left(\lambda\sqrt{t} - i\left(\frac{x-y}{2\sqrt{t}}\right)\right)^2 = -\lambda^2 t + i\lambda(x-y) + \frac{(x-y)^2}{4t}, \ t > 0, \ \lambda, x, y \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t + i\lambda(x-y)} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\lambda\sqrt{t} - i\left(\frac{x-y}{2\sqrt{t}}\right)\right)^2 - \frac{(x-y)^2}{4t}} d\lambda =$$

$$= e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\lambda\sqrt{t}-i\left(\frac{x-y}{2\sqrt{t}}\right)\right)^2} d\lambda. \tag{3.12}$$

Como $\left(\frac{x-y}{2\sqrt{t}}\right) \in \mathbb{R}$ es fijo (integramos respecto λ), y haciendo el cambio de variable $u = \lambda\sqrt{t}$ obtenemos:

$$(3.12) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u-i\left(\frac{x-y}{2\sqrt{t}}\right)\right)^2} du. \tag{3.13}$$

Haciendo uso del lema 3.2.8 llegamos a

$$(3.13) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \sqrt{\pi}.$$

Entonces podemos escribir la fórmula 3.7 como:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \sqrt{\pi}\varphi(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \varphi(y)dy, \ x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Al término que aparece multiplicando a la función φ dentro del integrando es a lo que se llama **núcleo de la ecuación del calor**, es decir, a la función

$$K(x,y,t) = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \ x, y \in \mathbb{R}, t > 0,$$

y así podemos expresar nuestra solución de la forma

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y,t)\varphi(y)dy, \ x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Se puede probar que esta es realmente la única solución acotada de la ecuación del calor uno dimensional (que es única ya lo sabemos, habría que probar que es solución). En [14] y [16] podemos ver esto y la fórmula para el caso genérico n-dimensional, en la que el núcleo es

$$K(x,y,t) = \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}}{\left(\sqrt{4\pi t}\right)^n}, \ x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

que se obtiene de un proceso análogo al seguido aquí.

Bibliografía

[1] Enrique A González-Velasco. *Journey through mathematics*. Springer, 2011.

[2] Jeremy Gray. *The real and the complex: a history of analysis in the 19th century*. Springer, 2015.

[3] Dave. "Dave's Short Course on Complex Numbers, Quadratic and cubic equations". En: *Clark University,https://www2.clarku.edu/faculty/djoyce/complex/cubic.html* (2013).

[4] Veritasiunm. *Cómo se Inventaron los Números Imaginarios*. https://www.youtube.com/watch?v=VN7nipynE0c&t=1052s. Published: 2021.

[5] Antonio Cañada Villar. "Apuntes Variable Compleja I". En: *UGR, https://www.ugr.es/~acanada/* (2020).

[6] Martin Klazar. "Four differences real-complex analysis". En: *Charles University, https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/pr11_19_MAIII_eng.pdf* (2019).

[7] Camilo Aparicio. "María D. Acosta Camilo Aparicio Antonio Moreno Armando R. Villena". En: *UGR, https://www.ugr.es/~dpto_am/miembros/acosta/apuntes/apuntes-an-mat-i-06-2007.pdf* (2007).

[8] Francisco Javier Pérez González. "Curso de Análisis Complejo". En: *UGR, https://www.ugr.es/~fjperez/textos/funciones_variable_compleja.pdf* (2000).

[9] John M Howie. *Complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2003.

[10] Rafael Payá Albert. "Apuntes Análisis". En: *UGR, https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/An%C3%A1lisis%20II/Apuntes_01.pdf* (2011).

[11] A.K Bose. "Linear Differential Equations on the Complex Plane". En: *The American Mathematical Monthly* 89.4 (1982), págs. 244-246.

[12] Rafael Ortega Ríos. "Ecuaciones Diferenciales I, Lección 4". En: *UGR, https://www.ugr.es/~rortega/PDFs/ED1L4.pdf* (2019).

[13] Dragan Milicic. "Lectures on differential equations in complex domains". En: *Unpublished notes available online at https://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/de.pdf* (1989).

[14] Antonio Cañada Villar. "Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (Física)". En: *UGR, https://www.ugr.es/~acanada/docencia/fisica/2calorfisica0910.pdf* (2010).

[15] Antonio Cañada Villar. *Series de Fourier y Aplicaciones*. Pirámide, 2002.

[16] H.F. Weinberger. *Curso de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Reverté, 1986.

[17] Andrei Nikolaevich Tikhonov, Aleksandr Andreevich Samarskii y Juan José Tolosa. *Ecuaciones de la física matemática*. Mir, 1980.