MÉTODOS VARIACIONALES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Quinto curso, examen final, 05/02/2014.

1. (2.5 puntos) Enunciar la desigualdad de Sobolev y obtener como consecuencia las inmersiones, en los espacios $L^q(\mathrm{R}^N)$, de $W^{1,p}(\mathrm{R}^N)$, para $p < N$.

2. (2.5 puntos) Dados $1 \le p < q$ y $\Omega \subset \mathrm{R}^N$, ¿es cierto que $W^{1,q}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$? En caso afirmativo, dar una demostración. En caso negativo, encontrar un contraejemplo y estudiar para qué dominios Ω sí es cierto.

3. Sean X, Y espacios normados reales, Ω un subconjunto de X abierto, $\Phi : \Omega \to Y$ y $x_0 \in \Omega$.

   (a) (0.5 puntos) Defínase con precisión el concepto de derivada según Fréchet de Φ en x_0.

   (b) (2 puntos) Pruébese rigurosamente que si en X, Y tomamos otras normas, respectivamente equivalente a las anteriores, entonces tal derivada, en caso de existir, es la misma.

4. (2.5 puntos) Considérese el funcional

$$\Phi : X \to \mathrm{R},\ \Phi(u) = \int_0^1 e^{u(x)}(u'(x))^2\, dx,\ \forall\ u \in X,$$

donde

$$X = \{u \in C^1([0,1], \mathrm{R}) : u(0) = 0,\ u(1) = \ln 4\}.$$

Demuéstrese que existe $\min_X\ \Phi$ y encuéntrense todas las funciones $v \in X$ tales que $\Phi(v) = \min_X\ \Phi$.

Sugerencia: Si $u(\cdot) \in X$, el cambio de variable $e^{u(x)} = z(x)$ puede ser útil.