MÉTODOS VARIACIONALES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Quinto curso, 19/09/2014.

1. **(2.5 puntos)** Enunciar la desigualdad de Poincaré para funciones de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$. Usar dicha desigualdad para mostrar que la norma usual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ es equivalente a:

$$\|u\|^* = \|\nabla u\|_{L^p}.$$

2. Sea $D \subset \mathrm{R}^2$ el disco unidad, $u : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ una función no trivial C^∞ con soporte compacto en D. Definimos la sucesión $u_n : D \to \mathrm{R}$, $u_n(x) = u(n\,x)$. Probar que:

   (a) **(0.8 puntos)** La sucesión u_n está acotada en $H_0^1(D)$.

   (b) **(0.7 puntos)** $\{u_n\} \to 0$ en $L^2(D)$.

   (c) **(1 punto)** Ninguna sucesión parcial de u_n converge en $H_0^1(D)$.

3. **(2.5 puntos)** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $\Omega \subset E$ abierto convexo y $\Phi : \Omega \to \mathrm{R}$ de clase $C^1(\Omega)$. Pruébese que son equivalentes las afirmaciones siguientes:

   (a) Φ es convexa en Ω, es decir $\Phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\Phi(x) + (1-\lambda)\Phi(y)$, $\forall\, x, y \in \Omega, \forall\, \lambda \in [0, 1]$.

   (b) $\Phi' : \Omega \to \mathcal{L}(E, \mathrm{R})$ es monótona, es decir $(\Phi'(x) - \Phi'(y))(x - y) \geq 0$, $\forall\, x, y \in \Omega$, donde $\mathcal{L}(E, \mathrm{R})$ denota el conjunto de aplicaciones lineales y continuas de E en R y Φ' denota la derivada de Frèchet.

4. Sean $E = \{y \in C^1[a, b] : y(a) = a_1,\ y(b) = b_1\}$, $f : [a, b] \times \mathrm{R} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $(x, y, y') \to f(x, y, y')$ continua y para cada $x \in [a, b]$ fijo, de clase C^1 respecto de (y, y'). Considérese el funcional $\Phi : E \to \mathrm{R}$, definido como $\Phi(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$, $\forall\, y \in E$.

   (a) **(1 punto)** Pruébese que si Φ es convexo, entonces cualquier función $z \in E$ que satisfaga la ecuación de Euler-Lagrange es mínimo global de Φ en E.

   (b) **(1.5 puntos)** Si $\Phi : E \to \mathrm{R}$ está definido como $E = \{y \in C^1[0, \pi] : y(0) = 1,\ y(\pi) = -1\}$, $\Phi(y) = \displaystyle\int_0^\pi [(y'(x))^2 - (y(x))^2]\, dx$, $\forall\, y \in E$, pruébese que Φ es convexo y que la ecuación de Euler-Lagrange tiene infinitas soluciones. Teniendo en cuenta el apartado anterior, ¿qué conclusión se obtendría?