MÉTODOS VARIACIONALES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Quinto curso, examen final, 07/02/2013.

1. Dados $p \in [1, +\infty]$, $N \in \mathbb{N}$, se pide enunciar en detalle las distintas inmersiones de los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, así como las correspondientes desigualdades.

2. Considérese el siguiente problema de contorno:

$$\begin{array}{l} -u''(x) + f(u(x)) = 0,\ x \in [0,1], \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{array} \tag{1}$$

   En este problema, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua satisfaciendo que:

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) > 0 > \lim_{t \to -\infty} f(t).$$

   (a) Definir un funcional en un espacio de Hilbert adecuado de forma que (1) sea la ecuación de Euler-Lagrange asociada.

   (b) Probar que dicho funcional alcanza su mínimo.

   Sugerencia: si F es una primitiva de la función f, probar que existen constantes $\alpha > 0$, $C > 0$ de forma que $F(t) > \alpha|t| - C$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

3. Sea $\Phi : X \to Y$, definido como

$$X = C^1([a,b], \mathbb{R}),\ Y = C([a,b], \mathbb{R}),\ a < b,$$

$$\Phi(u)(x) = (u(x))^n + \operatorname{sen}(u'(x)),\ \forall\ u \in X,\ \forall\ x \in [a,b],$$

   donde n es un número natural dado. Si en X consideramos la norma $\|u\| = \max_{x\in[a,b]}\ |u(x)| + \max_{x\in[a,b]}\ |u'(x)|$, $\forall\ u \in X$, y en Y la norma $\|v\| = \max_{x\in[a,b]}\ |v(x)|$, $\forall\ v \in Y$, propóngase una expresión para la derivada de Fréchet de Φ en cualquier $u \in X$, y pruébese rigurosamente que tal expresión es la derivada de Fréchet de Φ en u.

4. Sea $X = \{u \in C^1([0,1], \mathbb{R}) : u(0) = u(1) = 0\}$ y $\Phi : X \to \mathbb{R}$, definido como

$$\Phi(u) = \int_0^1 e^{-(u'(x))^2}\ dx,\ \forall\ u \in X.$$

   (a) Demuéstrese que $\inf_X\ \Phi = 0$ y que no existe $\min_X\ \Phi$ *(sugerencia: considérese la sucesión $u_n(x) = n(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{n}{4}$)*

   (b) Pruébese que la ecuación de E-L tiene solución. ¿Podemos afirmar que Φ no es convexo?