MÉTODOS VARIACIONALES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Quinto curso, examen parcial, 22/11/2013.

1. Enunciar el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones.

2. Sea $\Omega \subset \mathrm{R}^N$ un dominio acotado con frontera C^1, $1 < p < N$, y $q \in [p, \frac{Np}{N-p})$. Definimos:

$$M = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^q \, dx = 1\},$$
$$I : M \to \mathrm{R}, \quad I(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^p + |u(x)|^p \, dx.$$

a) Probar que $\inf I := \alpha$ es una constante positiva (*Sugerencia: usar la continuidad de las inclusiones de Sobolev*).

b) Sea $u_n \in M$, $I(u_n) \to \alpha$. Probar que u_n es una sucesión acotada en $W^{1,p}(\Omega)$.

c) Probar que existe $u \in M$ con $I(u) = \alpha$.

3. En este ejercicio denotamos por Q^n el cubo centrado centrado en cero con lado igual a 2, es decir, $Q^n = [-1,1]^n \subset \mathrm{R}^n$. Sea $u \in W^{1,p}(Q^n)$, y fijemos $x_n \in (-1,1)$. Definimos:

$$\hat{u} : Q^{n-1} \to \mathrm{R},$$
$$\hat{u}(y_1 \ldots y_{n-1}) = u(y_1 \ldots y_{n-1}, x_n).$$

a) Probar que para casi todo $x_n \in (-1,1)$, $\hat{u} \in W^{1,p}(Q^{n-1})$.

b) En la afirmación anterior, "para casi todo" no puede sustituirse con "para todo". Dar un ejemplo.

Nota: Para hacer el ejercicio 3 necesitáis la siguiente versión del Teorema de Fubini, que os enuncio a continuación:

Teorema Sean $A \subset \mathrm{R}^m$, $B \subset \mathrm{R}^n$ dos conjuntos medibles, y $f \in L^1(A \times B)$. Entonces:

1. Para casi todo $x \in A$, la función $B \ni y \mapsto f(x,y)$ pertenece a $L^1(B)$.
2. Para casi todo $y \in B$, la función $A \ni x \mapsto f(x,y)$ pertenece a $L^1(A)$.
3. Las funciones $x \mapsto \int_B f(x,y)\,dy$, $y \mapsto \int_A f(x,y)\,dx$ son integrables en sus respectivos dominios.
4. Se tiene la igualdad:

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx \right) dx.$$