MÉTODOS VARIACIONALES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Quinto curso, examen final, 28/01/2011.

1. Considérese el espacio

$$X = \{u \in C^1([1,2], \mathrm{R}) : u(1) = 0,\ u(2) = -1\},$$

y el funcional $\Phi : X \to \mathrm{R}$, definido como $\Phi(u) = \displaystyle\int_1^2 (u'^2(x) - 2xu(x))\ dx,\ \forall\ u \in X$.

(a) Demuéstrese que Φ es estrictamente convexo.

(b) Escríbase la Ecuación de Euler-Lagrange del funcional Φ y calcúlense las soluciones de la misma que pertenecen a X.

(c) Usando los dos apartados anteriores, calcúlese la única función $v \in X$ tal que $\Phi(v) = \min_{u\in X}\ \Phi(u)$.

2. Considérese el espacio

$$X = \{u \in C^1([0,\pi], \mathrm{R}) : u(0) = 0,\ u(\pi) = 0\},$$

y el funcional $\Phi : X \to \mathrm{R}$, definido como $\Phi(u) = \displaystyle\int_0^\pi u^2(x)(1 - u'^2(x))\ dx,\ \forall\ u \in X$.

(a) Demuéstrese que la función $u \equiv 0$ es mínimo local de Φ cuando en X se considera la norma $\|\cdot\|_1$.

(b) Demuéstrese que la función $u \equiv 0$ no es mínimo local de Φ cuando en X se considera la norma $\|\cdot\|_0$. *Sugerencia*: considérese la sucesión de funciones $u_n(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$).

(c) Demuéstrese que no existe el mínimo global de Φ en X. *Sugerencia*: considérese la sucesión de funciones $v_n(x) = n\ \mathrm{sen} x$.

3. Considérese el espacio

$$X = \{u \in C^1([-1,1], \mathrm{R}) : u(-1) = -1,\ u(1) = 1\},$$

y el funcional $\Phi : X \to \mathrm{R}$, definido como $\Phi(u) = \displaystyle\int_{-1}^1 x^2u'^2(x))\ dx,\ \forall\ u \in X$.

(a) Demuéstrese que Φ es estrictamente convexo y que $\Phi(u) > 0,\ \forall\ u \in X$.

(b) Considérese la sucesión de funciones $u_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{\arctan n}$. Demuéstrese que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Phi(u_n) = 0$.

(c) Calcúlese la función $v : [-1,1] \to \mathrm{R}$, definida como $v(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(x),\ \forall\ x \in\ [-1,1]$ y demuéstrese que $\Phi(v) = 0$.

(d) Elabore el alumno sus propias conclusiones