MÉTODOS VARIACIONALES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Quinto curso, examen final, 09/02/2012.

1. Es bien conocido que si $f : \mathrm{R}\backslash\{0\} \to \mathrm{R}$, es la función $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\forall\, x \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$. Usando la notación habitual para derivada de Fréchet, escribiríamos $f'(x)(h) = -\frac{h}{x^2}$, $\forall\ x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$, $\forall\, h \in \mathrm{R}$. En este ejercicio se propone una generalización de este resultado cuando R se sustituye por el conjunto de matrices cuadradas reales de orden n, $n \in \mathbb{N}$.

   Para ello, sea Σ el conjunto de matrices reales cuadradas de orden n, dotado de una norma cualquiera (pensemos que Σ es un espacio vectorial real de dimensión finita) y Γ el subconjunto de Σ formado por todas las matrices inversibles.

   (a) Pruébese que Γ es un subconjunto abierto de Σ.

   (b) Demuéstrese que la aplicación $\Phi : \Gamma \to \Gamma$, definida como $\Phi(A) = A^{-1}$, $\forall\ A \in \Gamma$, es continua.

   (c) Demuéstrese que la aplicación $\Phi : \Gamma \to \Gamma$, definida como $\Phi(A) = A^{-1}$, $\forall\ A \in \Gamma$, es derivable.

   (d) Usando el apartado anterior y la noción de derivada direccional, pruébese que $\Phi'(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}$, $\forall\ A \in \Gamma$, $\forall\ H \in \Sigma$. *Sugerencia*: $(A+B)^{-1} - A^{-1} = (A+B)^{-1}[I-(A+B)A^{-1}]$.

   (e) Finalmente, demuéstrese que $\Phi : \Gamma \to \Gamma$, es de clase $C^\infty(\Gamma)$.

2. En este ejercicio proponemos el uso de la desigualdad de Jensen para el estudio de un problema de cálculo de variaciones. Para ello, recordemos que es bien conocido el hecho siguiente: si $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ es una función de clase C^1 y convexa, entonces

$$f(\alpha) \geq f(\beta) + f'(\beta)(\alpha - \beta),\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathrm{R}. \tag{1}$$

   (a) Pruébese la desigualdad de Jensen: sea Ω un subconjunto abierto y acotado de R^n, $u \in L^1(\Omega)$ y $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ de clase C^1 y convexa. Entonces

$$f\left(\frac{1}{meas(\Omega)} \int_\Omega u(x)\ dx\right) \leq \frac{1}{meas(\Omega)} \int_\Omega f(u(x))\ dx \tag{2}$$

   Sugerencia: tómese en (1), $\alpha = u(x)$, $\beta = \frac{1}{meas(\Omega)} \int_\Omega u(x)\ dx$, e intégrese en Ω.

   (b) Sean $p > 1$ y $m : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ una función continua tal que $\inf_{\mathrm{R}} m > 0$. Sea $X = \{u \in C^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta$ y $\Phi : X \to \mathrm{R}$ definido como $\Phi(u) = \int_a^b m(u(x))|u'(x)|^p\ dx$, $\forall\ u \in X$. Pruébese que

$$\Phi(u) \geq (b-a)\left|\frac{M(\beta) - M(\alpha)}{b-a}\right|^p,\ \forall\ u \in X, \tag{3}$$

   donde $M(z) = \int_0^z |m(s)|^{1/p}\ ds$, $\forall\ z \in \mathrm{R}$.

   Sugerencia: si $v(x) = M(u(x))$, entonces pruébese que $\Phi(u) = \int_a^b |v'(x)|^p\ dx$, y a continuación úsese la desigualdad de Jensen (2) con $f(x) = |x|^p$.

   (c) Si $\overline{v}(x) = \frac{M(\beta)-M(\alpha)}{b-a}(x-a) + M(\alpha)$ y $\overline{u}(x) = M^{-1}(\overline{v}(x))$, demuéstrese que

$$\Phi(\overline{u}) = (b-a)\left|\frac{M(\beta) - M(\alpha)}{b-a}\right|^p \tag{4}$$

   con lo que el ínfimo de Φ en X se alcanza en $\overline{u}$. Por último, pruébese que el elemento de X donde se alcanza dicho ínfimo es único.

Nota final: la desigualdad de Jensen (2) es válida para funciones $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexas (véase Jan Van Tiel, Convex Analysis, John Wiley and Sons, 1984). Usando este hecho, el problema anterior puede estudiarse también para el caso $p = 1$.