MÉTODOS VARIACIONALES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Quinto curso, examen final, 02/02/2010.

1. Considérese el problema de contorno

$$u''(t) = f(t, u(t)), \ t \in \ [a, b], \quad u(a) = u'(b) = 0, \tag{1}$$

donde $f : [a, b] \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, es continua.

(a) Interprétese (1) desde el punto de vista de la Física.

(b) Elíjase algún espacio normado X (o mejor, algún espacio de Hilbert) y algún funcional $\Phi : X \to \mathrm{R}$, de tal forma que los puntos críticos de Φ sean soluciones de (1).

(c) Dar condiciones suficientes sobre Φ (basadas en condiciones sobre f) que permitan afirmar que Φ tiene mínimo global en X.

2. Considérense los espacios

$$X = \{u \in C^1([-1, 1], \mathrm{R}) : u(-1) = 0, \ u(1) = 1\},$$

$$Y = \{u \in H^{1,2}(-1, 1) : u(-1) = 0, \ u(1) = 1\},$$

y el funcional $\Phi : Y \to \mathrm{R}$, definido como $\Phi(u) = \int_{-1}^{1} u^2(x)(1 - u'(x))^2 \, dx, \ \forall \ u \in Y$.

(a) Demuéstrese que la función

$$v(x) = 0, \ \forall \ x \in [-1, 0]; \ v(x) = x, \ \forall \ x \in [0, 1],$$

pertenece a Y y que $\min_Y \ \Phi = \Phi(v) = 0$.

(b) Demuéstrese que $\inf_X \ \Phi = 0$, y que tal ínfimo no se alcanza en X.

3. Considérese el funcional

$$\Phi : X \to \mathrm{R}, \ \Phi(u) = \int_0^1 e^{u(x)} (u'(x))^2 \, dx, \ \forall \ u \in X,$$

donde

$$X = \{u \in C^1([0, 1], \mathrm{R}) : u(0) = 0, \ u(1) = \ln 4\}.$$

Demuéstrese que existe $\min_X \ \Phi$ y encuéntrense todas las funciones $v \in X$ tales que $\Phi(v) = \min_X \ \Phi$.