Consideremos el problema

A. Cañada (19/4/2018)

$$(PC)\ \begin{cases} u_t(x,t) = \Delta_x u(x,t), & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0 \quad \equiv \Omega \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$u \in C^1_t(\Omega) \cap C^2_x(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \quad \varphi \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

TEOREMA

(PC) tiene, a lo sumo, una sol. acotada.

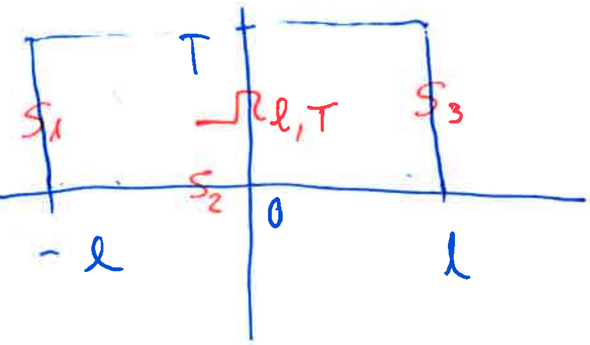
Demostración

Sean z, w dos sol. acotadas de (PC). Entonces $u = z - w$ verifica

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u & \text{en } \Omega \\ u(x,0) = 0 \\ u \text{ acotada en } \bar{\Omega} \end{cases}$$

Si $|u(x,t)| \leq M$, $\forall (x,t) \in \bar{\Omega}$, elijamos la función

$$v(x,t) \equiv \frac{2M}{l^2}\left(\frac{x^2}{2} + t\right), \quad l > 0, \quad T > 0$$



Entonces

$$(*)\ |u(x,t)| \leq v(x,t), \quad \forall (x,t) \in \partial_1 \Omega_{l,T}$$

S_1: $|u(x,t)| \leq M$, $v(x,t) = M + \frac{2M}{l^2} t \geq M$

S_3: igual

S_2: $u(x,0) = 0$, $v(x,0) \geq 0$

Sea $(x_0, t_0) \in \Omega$. Elegimos $l > 0$, $T > 0$ / $(x_0,t_0) \in \Omega_{l,T}$

Por lo anterior $|u(x_0,t_0)| \leq \frac{2M}{l^2}\left(\frac{x_0^2}{2} + t_0\right)$ $\forall$

Ahora si $l \to +\infty$, T fijo,

$u(x_0,t_0) = 0$, $\forall (x_0,t_0) \in \Omega \Rightarrow u \equiv 0$.