TRABAJO VOLUNTARIO II. [1]
Fecha límite de entrega: 21 de Mayo 2020

En la segunda prueba para la evaluación continua, que os propuse el 14/04/2020 (principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor) incluí, además de un resumen teórico, 6 ejercicios. **He terminado de corregir la prueba y me han llamado la atención las diferentes respuestas al Ejercicio PMM2,** que decía así

Ejercicio PMM2: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es $C^2[a,b]$ y alcanza el máximo en un punto $x_0 \in (a,b)$, entonces $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \leq 0$.

En realidad, este ejercicio debe formar parte de los conocimientos básicos de Análisis Matemático, o incluso de los conocimientos básicos de los estudios de Matemáticas. Teóricamente, todos los alumnos deberían haber realizado el ejercicio correctamente, pero no es así, debido a que **los razonamientos que habéis usado muchos de vosotros para obtener la conclusión, no son correctos**. Está muy bien que conozcáis los teoremas fundamentales de análisis de fourier, análisis funcional, edps,...etc., pero la formación básica es imprescindible para llegar a ser un auténtico matemático.

Antes de comenzar, debemos dejar claro cuáles son las hipótesis del ejercicio y cuál es la conclusión a la que debemos llegar.

HIPÓTESIS: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es $C^2[a,b]$ y alcanza el máximo en un punto $x_0 \in (a,b)$.

TESIS O CONCLUSIÓN: $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \leq 0$.

Posteriormente os proporcioné las soluciones de los ejercicios. Concretamente en éste, yo procedía de la forma siguiente: $f'(x_0) = 0$ se ha demostrado en el ejercicio anterior. Además, si $f''(x_0) > 0$, entonces...

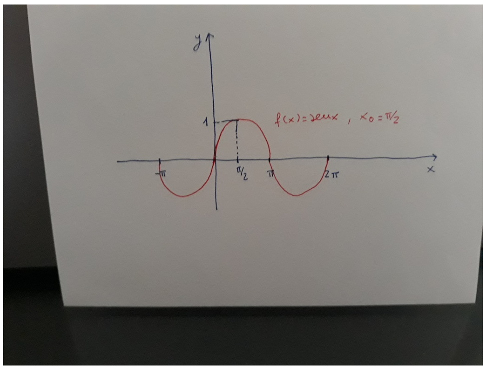
Lo que quiero concentrarme ahora es en dos razonamientos no correctos que me he encontrado frecuentemente al corregir:

[1] A. Cañada, Mayo 2020

RAZONAMIENTO 1 (ERRÓNEO): Se deduce ¿claramente? de las hipótesis que al ser x_0 un máximo absoluto de f en $[a, b]$, entonces f es creciente en (a, x_0) y decreciente en (x_0, b). Por tanto $f'(x) \geq 0, \ \forall \ x \in (a, x_0)$ y $f'(x) \leq 0, \ \forall \ x \in (x_0, b)$. En consecuencia (aquí cada uno razona de la forma que estima más conveniente)...$f''(x_0) \leq 0$.

CONTRAEJEMPLO PARA EL RAZONAMIENTO ERRÓNEO 1:

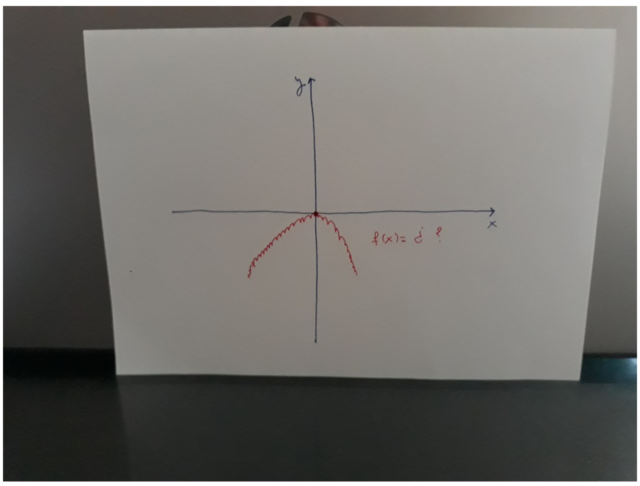
$$f : [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}, \ x \to \text{sen}(x), x_0 = \pi/2.$$



Podéis pensar: el profesor es muy astuto, porque ha tomado "intervalos muy grandes" e incluso podéis pensar también: al menos localmente, "cerca de x_0," es verdad lo que se afirma en el "razonamiento erróneo 1". Pues no. Veamos el

RAZONAMIENTO 2 (ERRÓNEO) : De las hipótesis se ¿deduce claramente? que $\exists \ \delta > 0$ tal que f es creciente en $(x_0 - \delta, x_0)$ y decreciente en $(x_0, x_0 + \delta)$. Por tanto $f'(x) \geq 0, \ \forall \ x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) \leq 0, \ \forall \ x \in (x_0, x_0 + \delta)$. En consecuencia (aquí cada uno razona de la forma que estima más conveniente)... $f''(x_0) \geq 0$.

En este caso, no es tan fácil encontrar un contraejemplo, pero gráficamente es ¿fácil? ver que el razonamiento anterior es incorrecto. Uno puede pensar en alguna función que tenga una gráfica como



Pero sabéis que los "razonamientos gráficos no son rigurosos" (es conocido que ni el punto, la recta, el plano,..., etc. existen en la realidad) y que los matemáticos necesitamos tener contraejemplos para probar que algunas afirmaciones no son correctas.

Precisamente, este es el objeto del ejercicio.

EJERCICIO VOLUNTARIO II: Considérese la función $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, definida como

$$f(x) = \begin{cases} -x^6 \mathrm{sen}^2(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Pruébese

1. $f \in C^2[-1,1]$.
2. $x_0 = 0$ es máximo (absoluto) de f en $[-1,1]$.
3. Existen dos sucesiones de números reales convergentes a cero por la derecha $\{x_n\}, \ \{y_n\}$, tales que $f'(x_n) < 0 < f'(y_n), \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Como la función dada es simétrica $(f(x) = f(-x))$, también existen dos sucesiones de números reales convergentes a cero por la izquierda $\{r_n\}, \ \{s_n\}$, tales que $f'(r_n) < 0 < f'(s_n), \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

Claramente, el ejemplo anterior demuestra que ni el razonamiento 1 ni el razonamiento 2 son correctos, puesto que para cualquier $1 > \delta > 0$, ni f es creciente en $(-\delta, 0)$ ni decreciente en $(0, \delta)$.

Si queréis, repetimos lo que hemos dicho en clase en varias ocasiones:

LAS MATEMÁTICAS NO SON COMO QUEREMOS QUE SEAN, LAS MATEMÁTICAS SON COMO "SON"

Nota final: lo he pasado muy bien, pensando y redactando este ejercicio. Espero que vosotros también, al intentar resolverlo.