

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo online voluntario e interdisciplinar (Análisis Funcional y EDP). 30 Marzo 2020

Fecha límite de entrega, a través de email: 12 Abril 2020. Extensión máxima: 5 páginas, por una cara

1. Considérese el espacio vectorial real $L^2(0, \pi)$ de funciones medibles y de cuadrado integrable en $[0, \pi]$ en el sentido de Lebesgue (dos funciones son iguales si lo son c.p.d.).

Concepto de base algebraica (base de Hamel) de $L^2(0, \pi)$. ¿Cuántas bases algebraicas existen para $L^2(0, \pi)$?

2. Demuéstrese que cualquier base algebraica \mathcal{A} es infinita no numerable.
3. Demuéstrese que $L^2(0, \pi)$, como espacio de Hilbert real, respecto del producto escalar usual

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x) dx, \quad \forall f, g \in L^2(0, \pi)$$

tiene alguna base hilbertiana \mathcal{B} infinita numerable. ¿Cuántas bases hilbertianas de $L^2(0, \pi)$ existen?

4. Demuéstrese que ninguna base algebraica de $L^2(0, \pi)$ es base hilbertiana y, recíprocamente, ninguna base hilbertiana de $L^2(0, \pi)$ es base algebraica.
5. Escribe dos ejemplos, al menos, de bases hilbertianas de $L^2(0, \pi)$.
6. En relación con Ecuaciones en Derivadas Parciales, ¿qué utilidad tiene el concepto de base hilbertiana en el espacio $L^2(0, \pi)$?
7. Escribe dos problemas concretos de E.D.P. donde las bases que has propuesto en el apartado (5) se usen para resolver el problema.
8. Este apartado es **optativo**: Expresa, con sinceridad, si este trabajo ha sido útil o no, para tí. ¿Por qué?

Nota 1: Para desarrollar las preguntas anteriores, puede ser de utilidad: contenido explicado en la asignaturas A.Funcional y E.D.P, bibliografía básica de las citadas asignaturas, introducción histórica de mi libro.

Nota 2: Si se usan Teoremas, Lemas, etc. no es necesario demostrarlos, simplemente referenciarlos bibliográficamente. La idea básica es que sea **un trabajo ágil** que unifique diferentes conceptos, utilidades, etc.