## ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. GRADO EN MATEMÁTICAS

**Trabajo online voluntario e interdisciplinar** (Análisis Funcional y EDP). 30 Marzo 2020

Fecha límite de entrega, a través de email: 12 Abril 2020. Éxtensión máxima: 5 páginas, por una cara

1. Considérese el espacio vectorial real $L^2(0, \pi)$ de funciones medibles y de cuadrado integrable en $[0, \pi]$ en el sentido de Lebesgue (dos funciones son iguales si lo son c.p.d.).

   Concepto de base algebraica (base de Hamel) de $L^2(0, \pi)$. ¿Cuántas bases algebraicas existen para $L^2(0, \pi)$?

   Dado un espacio vectorial real cualquiera $V$, un subconjunto $A$ de $V$, se dice que es una base de Hamel para $V$ (también llamada base algebraica) si cualquier elemento de $V$ es combinación lineal finita y única de elementos de $A$. Esto es equivalente a que el conjunto $A$ sea un sistema de generadores de $V$, linealmente independiente. Si $f \in A$, y $\lambda$ es cualquier número real no nulo, $f$ puede sustituirse por $\lambda f$ en el conjunto $A$ y así tenemos una nueva base de Hamel $B$. Por tanto, hay infinitas bases de Hamel de $V$. $L^2(0, \pi)$ es un caso particular.

2. Demuéstrese que cualquier base algebraica $\mathcal{A}$ es infinita no numerable.

   Una de las consecuencias más bonitas del Teorema o Lema de la Categoría de Baire es que si $V$ es un espacio normado real completo (espacio de Banach) y de dimensión infinita, entonces cualquier base de Hamel es no numerable. $L^2(0, \pi)$ es un caso particular.

3. Demuéstrese que $L^2(0, \pi)$, como espacio de Hilbert real, respecto del producto escalar usual
$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\ dx,\ \ \forall\ f, g \in L^2(0, \pi)$$
   tiene alguna base hilbertiana $\mathcal{B}$ infinita numerable. ¿Cuántas bases hilbertianas de $L^2(0, \pi)$ existen?

   Cualquier espacio de Hilbert real $H$de dimensión infinita y separable, admite bases hilbertianas. Véase, por ejemplo cualquier libro de Análisis Funcional que trate adecuadamente el tema de los espacios de Hilbert o mi archivo

   https://www.ugr.es/ acanada/docencia/matematicas/analisisfuncional/miobaseshilbertianas.pdf

   Recordemos que si $B \subset H$ es infinito numerable y ortonormal, entonces $B$ es base hilbertiana si y sólo si el subespacio ortogonal de $B$ es cero (esta es una de las caracterizaciones de base hilbertiana; hay otras muchas). Teniendo en cuenta esto, si $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \cdots\}$ es base hilbertiana de $H$, entonces $\{\frac{(b_1+b_2)}{\|b_1+b_2\|}, \frac{(b_1-b_2)}{\|b_1-b_2\|}, b_3, b_4, \cdots\}$ también lo es. Este procedimiento prueba que existen infinitas bases hilbertianas.

   $L^2(0, \pi)$ es un caso particular.

4. Demuéstrese que ninguna base algebraica de $L^2(0, \pi)$ es base hilbertiana y, recíprocamente, ninguna base hilbertiana de $L^2(0, \pi)$ es base algebraica.

   Cualquier base algebraica de $L^2(0, \pi)$ es infinita no numerable, mientras que cualquier base hilbertiana de $L^2(0, \pi)$ es infinita numerable

5. Escribe dos ejemplos, al menos, de bases hilbertianas de $L^2(0,\pi)$.

   Se puede ver, por ejemplo en mi libro, capítulo II, que los conjuntos

   $$\{(2/\pi)^{1/2}\mathrm{sen}(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N}\},\ \ \{(1/\pi)^{1/2},\ (2/\pi)^{1/2}\cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N}\},$$

   son bases hilbertianas de $L^2(0,\pi)$.

6. En relación con Ecuaciones en Derivadas Parciales, ¿qué utilidad tiene el concepto de base hilbertiana en el espacio $L^2(0,\pi)$?

   Permite justificar, y usar, el método de separación de variables.

7. Escribe dos problemas concretos de E.D.P. donde las bases que has propuesto en el apartado (5) se usen para resolver el problema.

   En estos dos problemas de tipo mixto, para la ecuación del calor se usan, respectivamente las bases del apartado (5

   $$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \le T, \\ u(x,0) & = & f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{array} \qquad (C1)$$

   $$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\ u_x(0,t) & = & u_x(\pi,t) = 0, & 0 \le t \le T, \\ u(x,0) & = & f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{array} \qquad (C2)$$

   También se pueden plantear estos problemas para la ecuación de ondas, como hemos visto en clase. Véase, por ejemplo, mi libro.

8. Este apartado es **optativo**: Expresa, con sinceridad, si este trabajo ha sido útil o no, para tí. ¿Por qué?

   Opto por contestar. He creido conveniente proponer este trabajo porque todos los cursos observo que muchos alumnos no tienen claro los conceptos de base algebraica, base hilbertiana, etc, así como su uso en Análisis Funcional y EDPs. Las respuestas que me habéis mandado me confirman la utilidad de este trabajo para vosotros.

**Nota 1**: Para desarrollar las preguntas anteriores, puede ser de utilidad: contenido explicado en la asignaturas A.Funcional y E.D.P, bibliografía básica de las citadas asignaturas, introducción histórica de mi libro.

**Nota 2**: Si se usan Teoremas, Lemas, etc. no es necesario demostrarlos, simplemente referenciarlos bibliográficamente. La idea básica es que sea **un trabajo ágil** que unifique diferentes conceptos, utilidades, etc.