① Soluciones del examen del 15/6/2018

1. a) Realizando el cambio de variables independientes: $(x,t) \longleftrightarrow (\xi,\mu)$, donde $\xi = x+t$, $\mu = x-t$, la ecuación (1) se transforma en

$$v_{\xi\mu} = 0 \qquad (2)$$

Las soluciones de (2) son de la forma $F(\xi)+G(\mu)$, donde $F, G \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Por tanto las soluciones de (1) son <u>todas</u> de la forma $u(x,t) = F(x+t)+G(x-t)$, $F, G \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. b) El conjunto de funciones $\{\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(nt),\ n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, linealmente independiente, y todas son soluciones de (1).

Por cierto, ¿podrías escribir cada función $\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, de la forma dada en el apartado 1. a)? ¿Quiénes son las funciones F y G en este caso?

2. a) Apuntes de clase

2. b) La diferencia w de dos soluciones cualesquiera u, v de (2) es idénticamente cero en la frontera parabólica de (2): $(\{0\} \times [0,T]) \cup (\{\pi\} \times [0,T]) \cup ([0,\pi] \times \{0\})$. Por tanto, por el principio del máx-min, $w \equiv 0$ y así $u \equiv v$.

2. c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)\, e^{-n^2 t}$, $\quad f_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

②

2. d) $f_4 \operatorname{sen}(4x) e^{-16t}$, $f_4 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(4x)\,dx =$

$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}(4x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(-x+\pi)\operatorname{sen}(4x)\,dx\right. = 0$

(después de integrar por partes)

3. a) Apuntes de clase (también está en la pg. web)

3. b) $u(\rho,\theta) = \frac{3}{2} - 7\rho\cos\theta - \frac{3}{2}\rho^2\cos(2\theta)$.

(separación de variables)